

多采样率不确定离散时滞系统的鲁棒预见控制

郭玉建, 廖福成[†]

(北京科技大学 数理学院, 北京 100083)

摘要: 研究一类输入多采样率型不确定离散时滞系统的鲁棒预见控制问题. 首先, 利用离散提升技术从形式上消除输入时滞和多采样率特点, 将多采样率不确定系统的鲁棒预见控制问题转化为一个普通的单采样率不确定系统的鲁棒预见控制问题; 然后根据预见控制的基本方法, 构造出包含未来目标信息的扩大误差系统, 并对其相应的标称系统设计预见控制器; 最后, 根据所设计的控制器和 Lyapunov 稳定性理论, 给出不确定闭环系统的鲁棒稳定性判据. 数值仿真结果验证了所提出设计方法的有效性.

关键词: 预见控制; 不确定系统; 多采样控制; 输入时滞; 鲁棒稳定; Lyapunov 方法

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Robust preview control for multirate uncertain discrete-time systems with input delay

GUO Yu-jian, LIAO Fu-cheng[†]

(School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: A class of robust preview control problems of multirate input uncertain discrete-time systems with input delay are studied. Firstly, by using the discrete-time lifting technique to eliminate the input delay and the multirate characteristic, the problem is converted into the robust preview control problem for a single-rate uncertain system. Then, according to the basic method of preview control, an augmented error system containing future target information is constructed, and an optimal preview controller for the corresponding nominal system is designed. Based on the controller and Lyapunov stability theory, some robust stability criterions of the uncertain closed-loop system are obtained. Finally, numerical simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Keywords: preview control; uncertain systems; multirate control; input delay; robust stability; Lyapunov method

0 引 言

在许多现实情况中,控制系统的未来目标信息或者干扰信息完全或部分已知,例如机器人的行走路径、汽车的行驶路径和视线范围内的路况、飞行器预定的飞行航线等,这些都体现了预见控制的思想.如何在系统的控制器设计中充分利用这些已知的未来信息以提高闭环系统的控制性能,是预见控制所研究的基本问题^[1].预见控制自提出至今已有 50 年,继 Tomizuka^[2]、Katayama 等^[3-4]一系列开创性工作之后,预见控制受到了人们的广泛关注.各国学者不仅将预见控制理论与随机系统^[5-6]、多智能体系统^[7]、非线性系统^[8-9]和自适应控制^[10-11]等系统理论相结合,使预见控制在理论上取得了进一步的发

展,同时还将预见控制成功地应用于车辆主动悬挂系统、机电伺服系统、机器人和飞行器等许多实际系统中^[12].近年来,又有学者研究了不确定系统的预见控制问题.文献[13]对汽车主动悬挂系统设计了鲁棒 H_∞ 预见控制器,该不确定系统的状态空间模型由线性标称部分和非线性时变范数有界的不确定部分所描述,并提出一种分解的鲁棒 H_∞ 预见控制器的设计方法,提高了计算效率.文献[14]通过引入一个哈密顿矩阵,基于矩阵 Riccati 方程的解析解研究了时滞系统的 H_∞ 预见控制问题.文献[15]进一步分析相应的矩阵 Riccati 方程的解析解,其可解性取决于超越方程的根并将积分-微分观测器引入控制律中,克服了文献[14]中的解的条件比较复杂的缺陷,研究了更

收稿日期: 2016-10-25; 修回日期: 2017-01-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61174209).

作者简介: 郭玉建(1989—),女,博士生,从事多采样率系统预见控制理论的研究;廖福成(1957—),男,教授,博士生导师,从事预见控制理论和应用等研究.

[†]通讯作者. E-mail: fcliao@ustb.edu.cn

一般的时滞系统的 H_∞ 预见控制问题. 文献[16]假设系统中的不确定矩阵为定常的, 对所构造的扩大误差系统的标称系统设计控制器, 然后根据 Lyapunov 方法给出了不确定系统的鲁棒稳定性条件.

另一方面, 随着计算机和现代电子技术的飞速发展, 数字控制器被广泛地应用于航天器、机器人、硬盘驱动器等复杂系统. 由于受客观物理因素等限制, 要求系统各处都采用相同的采样周期是不实际的, 这就使得人们必须采用多采样率系统^[17]. 多采样率系统具有提高系统性能、适应多种复杂的实际情况等优点, 在现代工业控制中得到了日益广泛的应用^[18-19], 尤其是输入量采样频率多倍于输出量的系统, 即输入多采样率系统, 能够提高系统控制品质, 并具有同时镇定和强鲁棒性等性能^[20].

近年来, 关于多采样率系统的预见控制问题的研究又取得了一些新的成果^[21-23]. 文献[21]利用离散提升技术和经典的差分算子的方法, 通过将输入量的历史值和状态时滞项一起放入扩大系统的状态向量中来构造扩大误差系统, 研究了一类具有状态时滞的输入多采样率离散时间系统的预见控制问题. 文献[22]结合广义系统理论, 利用受限等价变换和离散提升技术, 对一类多采样率广义因果系统设计了最优预见控制器. 文献[23]成功地将时变系统、多采样率系统和预见控制理论相结合, 利用差分算子的性质, 克服了在构造扩大误差系统时遇到的困难, 研究了多采样率变系数系统的预见控制问题. 然而, 目前关于多采样率系统的预见控制问题的研究对象均是采用精确的数学模型所描述的, 对于被控对象是含有未知不确定项的不确定系统尚未涉及. 但是, 在许多实际的工业控制和生产过程中, 被控对象的不确定性是普遍存在的^[24].

本文在文献[16]和多采样率系统的预见控制问题的研究基础上, 研究一类输入多采样率不确定离散时滞系统的鲁棒预见控制问题. 其中, 本文假设系统中的不确定矩阵为时不变和范数有界的. 首先, 利用离散提升技术, 分别将输入时滞和输入多采样率特点从形式上消除; 然后, 利用差分算子的方法构造扩大误差系统, 将跟踪问题转化为调节问题, 并对其相应的标称系统设计预见控制器; 最后, 利用 Lyapunov 方法并进一步结合范数的性质, 给出不确定闭环系统的鲁棒稳定性判据.

1 问题描述及基本假设

考虑不确定离散时间系统

$$\begin{cases} x(k+1) = \\ (A + \Delta A)x(k) + (B_1 + \Delta B_1)u(k) + \\ (B_2 + \Delta B_2)u(k-d), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(k) \in R^n$ 是状态向量, $u(k) \in R^r$ 是输入向量, $y(k) \in R^m$ 是观测输出向量; d 是正整数, 表示输入时滞; A, B, C 为适当维数的常数矩阵; $\Delta A, \Delta B_1, \Delta B_2$ 代表不确定矩阵, 本文假设不确定性是时不变的, 且 $\|\Delta A\| \leq \delta, \|\Delta B_1\| \leq \delta_1, \|\Delta B_2\| \leq \delta_2$.

首先, 多采样率的特点由下面的假设给出:

假设1 设状态向量 $x(k)$ 和输出向量 $y(k)$ 仅在 $k = iN (i = 0, 1, 2, \dots)$ 时能被测量, N 为正整数且 $N \geq 2$.

由假设1可知, 状态向量 $x(k)$ 和输出向量 $y(k)$ 每隔 N 个采样间隔才能测量一次, 而输入向量 $u(k)$ 在每个采样间隔内都产生一次.

另外, 还需要下面几个基本假设:

假设2 对于任意满足 $|\lambda| \geq 1$ 的复数 λ , 矩阵 $[A - \lambda I \ B_2 + \lambda^d B_1]$ 行满秩.

假设3 设矩阵

$$\Phi = \begin{bmatrix} \tilde{A}^N - I & \tilde{A}^{N-1} \tilde{B} & \tilde{A}^{N-2} \tilde{B} & \dots & \tilde{A} \tilde{B} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tilde{C} \tilde{A} & \tilde{C} \tilde{B} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tilde{C} \tilde{A}^2 & \tilde{C} \tilde{A} \tilde{B} & \tilde{C} \tilde{B} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{C} \tilde{A}^{N-1} & \tilde{C} \tilde{A}^{N-2} \tilde{B} & \tilde{C} \tilde{A}^{N-3} \tilde{B} & \dots & \tilde{C} \tilde{B} & 0 \end{bmatrix}$$

行满秩. 其中

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & I_r \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \in R^{(n+dr) \times (n+dr)},$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_r \end{bmatrix} \in R^{n+dr},$$

$$\tilde{C} = [C \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \in R^{m \times (n+dr)}.$$

假设4 设 $(C \ A)$ 可检测.

假设5 设目标信号 $r(k)$ 是可预见的, 预见步数为 M_r , 即在当前时刻 $k, r(k), r(k+1), \dots, r(k+M_r)$ 是已知的, 且 $M_r = S_r N$, 这里 S_r 为非负整数.

理论研究和实际例子表明, 只有一段时间的可预

见信号对系统的性能有较明显的影响,预见步数以外的目标信号值对系统性能的影响不大,所以一般假设可预见步数之外的值为常向量.这里,作出上面的假设完全是为了便于构造扩大误差系统.

定义误差信号为

$$e(k) = r(k) - y(k). \quad (2)$$

对系统(1)引入二次型性能指标函数

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (e^T(k)Q_e e(k) + \Delta u^T(k)H\Delta u(k)), \quad (3)$$

其中权重矩阵满足 $Q_e > 0, H > 0$.

注1 在性能指标函数(3)中使用了控制输入的差分 $\Delta u(k)$,可以使最后的闭环系统中包含积分器,从而有助于消除输出响应的静态误差^[4].

本文的目的是设计一个带有预见作用的状态反馈控制器使得不确定闭环系统鲁棒稳定,并且输出向量 $y(k)$ 能够无静态误差地跟踪目标值信号 $r(k)$,即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} [y(k) - r(k)] = 0. \quad (4)$$

2 扩大误差系统的构造

2.1 时滞的消除

利用定义扩展状态向量的方法,导出一个形式上没有时滞的系统.定义扩展的状态向量

$$\tilde{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \dots \\ u(k-d) \\ u(k-d+1) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

注意到恒等式

$$\begin{bmatrix} u(k-d+1) \\ u(k-d+2) \\ \vdots \\ u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_r & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & I_r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-d) \\ u(k-d+1) \\ u(k-d+2) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I_r \end{bmatrix} u(k), \quad (6)$$

利用式(5),把(6)与(1)合并写为同一系统,得到形式上没有输入时滞的扩大系统

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = (\tilde{A} + \Delta\tilde{A})\tilde{x}(k) + (\tilde{B} + \Delta\tilde{B})u(k), \\ y(k) = \tilde{C}\tilde{x}(k). \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A & B_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & I_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \\ \Delta\tilde{A} &= \begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_r \end{bmatrix}, \quad \Delta\tilde{B} = \begin{bmatrix} \Delta B_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{C} &= [C \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]. \end{aligned}$$

2.2 多采样率系统的离散提升

根据假设1,系统是一个输入多采样率系统,即状态向量 $x(k)$ 仅在 $k = iN (i = 0, 1, 2, \dots)$ 时能被测量.这一特点表明,如果 $k \neq iN$,状态向量 $x(k)$ 不能被用于状态反馈,则 $\tilde{x}(k)$ 不能被用于状态反馈,因此普通控制理论的结果就不能使用.需要利用提升技术消除多采样率特点,以便应用已知的控制理论的结果.注意,系统的不确定性是不随时间变化的.下面对系统(7)进行离散提升.

依次将 $k = iN, k = iN+1, \dots, k = iN+(N-1)$ 代入式(7),经过整理得到以下递推公式:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(iN+j) &= (\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^j \tilde{x}(iN) + (\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{j-1} (\tilde{B} + \Delta\tilde{B})u(iN) + \dots + (\tilde{A} + \Delta\tilde{A})(\tilde{B} + \Delta\tilde{B})u(iN+j-2) + (\tilde{B} + \Delta\tilde{B})u(iN+j-1), \end{aligned}$$

其中 $j = 1, 2, \dots, N$.

当 $j = N$ 时,有

$$\begin{aligned} \tilde{x}((i+1)N) &= (\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^N \tilde{x}(iN) + [M_1 \ \dots \ M_i \ \dots \ M_N] \begin{bmatrix} u(iN) \\ \vdots \\ u(iN+N-2) \\ u(iN+N-1) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$M_i = (\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-i}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

同样, 对于输出方程, 利用上面的结果计算 $y(iN), y(iN + 1), \dots, y(iN + N - 1)$, 可知

$$\begin{cases} y(iN) = \tilde{C}\tilde{x}(iN), \\ y(iN + 1) = \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})\tilde{x}(iN) + \tilde{C}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B})u(iN), \\ \vdots \\ y(iN + N - 1) = \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-1}\tilde{x}(iN) + \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-2}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B})u(iN) + \dots + \\ \tilde{C}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B})u(iN + N - 2). \end{cases} \quad (9)$$

引入新变量

$$X(i) = \tilde{x}(iN) = \begin{bmatrix} x(iN) \\ \dots \\ u(iN - d) \\ u(iN - d + 1) \\ \vdots \\ u(iN - 1) \end{bmatrix} \in R^{n+dr},$$

$$U(i) = \begin{bmatrix} u(iN) \\ u(iN + 1) \\ \vdots \\ u(iN + N - 1) \end{bmatrix} \in R^{Nr},$$

$$Y(i) = \begin{bmatrix} y(iN) \\ y(iN + 1) \\ \vdots \\ y(iN + N - 1) \end{bmatrix} \in R^{Nm},$$

将式(8)和(9)合并在一起, 有

$$\begin{cases} X(i + 1) = (\tilde{A} + \Delta\tilde{A})X(i) + (\tilde{B} + \Delta\tilde{B})U(i), \\ Y(i) = (\tilde{C} + \Delta\tilde{C})X(i) + (\tilde{D} + \Delta\tilde{D})U(i). \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$\bar{A} = \tilde{A}^N, \quad \Delta\bar{A} = (\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^N - \tilde{A}^N,$$

$$\bar{B} = [\tilde{A}^{N-1}\tilde{B} \ \dots \ \tilde{A}\tilde{B} \ \tilde{B}],$$

$$\Delta\bar{B} =$$

$$[(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-1}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) \ \dots \ (\tilde{A} + \Delta\tilde{A})(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) \rightarrow \leftarrow (\tilde{B} + \Delta\tilde{B})] - [\tilde{A}^{N-1}\tilde{B} \ \dots \ \tilde{A}\tilde{B} \ \tilde{B}],$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{N-2} \\ \tilde{C}\tilde{A}^{N-1} \end{bmatrix},$$

$$\Delta\tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A}) \\ \vdots \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-2} \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{N-2} \\ \tilde{C}\tilde{A}^{N-1} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tilde{C}\tilde{B} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{B} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{N-2}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^{N-3}\tilde{B} & \dots & \tilde{C}\tilde{B} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta\tilde{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{C}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) \rightarrow \\ \vdots \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-2}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) \\ 0 \\ 0 \\ \leftarrow \tilde{C}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) \rightarrow \\ \vdots \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-3}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) \\ \dots & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 \\ \leftarrow \dots & 0 & 0 \right. - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \tilde{C}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tilde{C}\tilde{B} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{B} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{N-2}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^{N-3}\tilde{B} & \dots & \tilde{C}\tilde{B} & 0 \end{bmatrix}$$

至此, 已将具有输入多采样率特点的离散时间系统(7)提升为形式上的单采样率系统.

2.3 误差系统的构造

差分算子 Δ 定义为

$$\Delta x(k) = x(k + 1) - x(k). \quad (11)$$

构造向量

$$R(i) = \begin{bmatrix} r(iN) \\ r(iN + 1) \\ \vdots \\ r(iN + N - 1) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

得到变化后的误差向量

$$E(i) = R(i) - Y(i) = \begin{bmatrix} r(iN) \\ r(iN + 1) \\ \vdots \\ r(iN + N - 1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y(iN) \\ y(iN + 1) \\ \vdots \\ y(iN + N - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(iN) \\ e(iN + 1) \\ \vdots \\ e(iN + N - 1) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

对式(10)的两边求差分,得到

$$\begin{cases} \Delta X(i + 1) = \\ (\bar{A} + \Delta\bar{A})\Delta X(i) + (\bar{B} + \Delta\bar{B})\Delta U(i), \\ \Delta Y(i) = (\bar{C} + \Delta\bar{C})\Delta X(i) + (\bar{D} + \Delta\bar{D})\Delta U(i). \end{cases} \quad (14)$$

对式(13)两边取差分并结合式(14)的第2式,有

$$E(i + 1) = E(i) + \Delta R(i) - (\bar{C} + \Delta\bar{C})\Delta X(i) - (\bar{D} + \Delta\bar{D})\Delta U(i). \quad (15)$$

结合式(14)的第1式和式(15),有

$$\begin{bmatrix} E(i + 1) \\ \Delta X(i + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -(\bar{C} + \Delta\bar{C}) \\ 0 & (\bar{A} + \Delta\bar{A}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(i) \\ \Delta X(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(\bar{D} + \Delta\bar{D}) \\ (\bar{B} + \Delta\bar{B}) \end{bmatrix} \Delta U(i) + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \Delta R(i). \quad (16)$$

令

$$\begin{aligned} X_0(i) &= \begin{bmatrix} E(i) \\ \Delta X(i) \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} I & -\bar{C} \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix}, \\ \Delta A_0 &= \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\bar{C} \\ 0 & \Delta\bar{A} \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} -\bar{D} \\ \bar{B} \end{bmatrix}, \\ \Delta B_0 &= \begin{bmatrix} -\Delta\bar{D} \\ \Delta\bar{B} \end{bmatrix}, B_R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

则式(16)可以写为

$$X_0(i + 1) = (A_0 + \Delta A_0)X_0(i) + (B_0 + \Delta B_0)\Delta U(i) + B_R\Delta R(i). \quad (17)$$

由假设知目标信号 $r(k)$ 的预见步数为 M_r , 即在当前时刻 $k, r(k), r(k + 1), \dots, r(k + M_r)$ 是已知的, 且 $M_r = S_r N$, 因此可知目标值信号 $\Delta R(i), \Delta R(i + 1), \dots, \Delta R(i + S_r - 1)$ 也为已知.

为了把目标信号引入系统进而构造扩大误差系统, 定义向量

$$X_R(i) = \begin{bmatrix} \Delta R(i) \\ \Delta R(i + 1) \\ \vdots \\ \Delta R(i + S_r - 1) \end{bmatrix}, A_R = \begin{bmatrix} 0 & I_{Nm} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & I_{Nm} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, B_{PR} = [B_R \ 0 \ \cdots \ 0],$$

则有

$$\bar{X}(i + 1) = (\bar{A}_0 + \Delta\bar{A}_0)\bar{X}(i) + (\bar{B}_0 + \Delta\bar{B}_0)\Delta U(i). \quad (18)$$

其中

$$\bar{X}(i) = \begin{bmatrix} X_0(i) \\ X_R(i) \end{bmatrix}, \bar{A}_0 = \begin{bmatrix} A_0 & B_{PR} \\ 0 & A_R \end{bmatrix}, \Delta\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} \Delta A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_0 = \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta\bar{B}_0 = \begin{bmatrix} \Delta B_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

因此, 性能指标函数可以写为

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=0}^{\infty} (e^T(k)Q_e e(k) + \Delta u^T(k)H\Delta u(k)) = \\ &\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{N-1} [e^T(iN + j)Q_e e(iN + j) + \\ &\Delta u^T(iN + j)H\Delta u(iN + j)] = \\ &\sum_{i=0}^{\infty} (E^T(i)Q_E E(i) + \Delta U^T(i)\bar{H}\Delta U(i)) = \\ &\sum_{i=0}^{\infty} (X_0^T(i)Q X_0(i) + \Delta U^T(i)\bar{H}\Delta U(i)) = \\ &\sum_{i=0}^{\infty} (\bar{X}^T(i)\bar{Q}\bar{X}(i) + \Delta U^T(i)\bar{H}\Delta U(i)). \quad (19) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} Q_E &= \text{diag}(\underbrace{Q_e, Q_e, \dots, Q_e}_N), \\ \bar{H} &= \text{diag}(\underbrace{H, H, \dots, H}_N), \\ \bar{Q} &= \begin{bmatrix} Q \\ 0_{(NmS_r) \times (NmS_r)} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_E \\ 0_{(n+dr) \times (n+dr)} \end{bmatrix}.$$

3 闭环系统的鲁棒稳定性

对扩大误差系统(18)的标称系统应用预见控制理论的相关结果^[16],并结合Lyapunov稳定性理论,可得如下定理:

定理1 如果 $(\bar{A}_0 \ \bar{B}_0)$ 可镇定, $(\bar{Q}^{1/2} \ \bar{A}_0)$ 可检测,并且

$$\|\Delta\bar{A}_0 + \Delta\bar{B}_0F\| < \sqrt{\frac{-\bar{\lambda}}{\|P\|} + \|\bar{A}_0 + \bar{B}_0F\|^2 - \|\bar{A}_0 + \bar{B}_0F\|}, \quad (20)$$

则在性能指标(19)下,存在预见控制器使系统(18)的闭环系统鲁棒稳定. 控制器由下式给出:

$$\Delta U(i) = F\bar{X}(i). \quad (21)$$

其中

$$F = -(\bar{H} + (\bar{B}_0)^T P_p \bar{B}_0)^{-1} (\bar{B}_0)^T P_p \bar{A}_0, \quad (22)$$

P_p 是满足如下Riccati方程的半正定解:

$$P_p = \bar{Q} + (\bar{A}_0)^T P_p \bar{A}_0 - (\bar{A}_0)^T P_p \bar{B}_0 (\bar{H} + (\bar{B}_0)^T P_p \bar{B}_0)^{-1} (\bar{B}_0)^T P_p \bar{A}_0, \quad (23)$$

正定矩阵 P 满足Lyapunov方程

$$(\bar{A}_0 + \bar{B}_0F)^T P (\bar{A}_0 + \bar{B}_0F) - P = G < 0, \\ \bar{\lambda} = \lambda_{\max}(G).$$

注2 式(22)中,因为权重矩阵 $H > 0$,所以 $\bar{H} = \text{diag}(H, H, \dots, H) > 0$. 又 $P_p \geq 0$,所以矩阵 $\bar{H} + (\bar{B}_0)^T P_p \bar{B}_0 > 0$,从而是非奇异的.

证明 首先考虑系统(18)的标称系统

$$\bar{X}(i+1) = \bar{A}_0 \bar{X}(i) + \bar{B}_0 \Delta U(i). \quad (24)$$

因为 $(\bar{A}_0 \ \bar{B}_0)$ 可镇定, $(\bar{Q}^{1/2} \ \bar{A}_0)$ 可检测,性能指标函数由式(19)确定, P_p 和 F 分别由式(23)和(22)确定,所以从最优控制的有关结果知,当取式(21)给出的 $\Delta U(i)$ 作为控制输入时,系统(24)的闭环系统 $\bar{X}(i+1) = (\bar{A}_0 + \bar{B}_0F)\bar{X}(i)$ 是渐近稳定的.

把式(21)给出的 $\Delta U(i)$ 直接作为不确定系统(18)的控制输入,得到闭环系统

$$\bar{X}(i+1) = (\bar{A}_0 + \bar{B}_0F + \Delta\bar{A}_0 + \Delta\bar{B}_0F)\bar{X}(i). \quad (25)$$

下面研究保证式(25)渐近稳定的不确定矩阵需要满足的条件.

因为 $\bar{X}(i+1) = (\bar{A}_0 + \bar{B}_0F)\bar{X}(i)$ 渐近稳定,所以对给定的任一个负定阵 G ,都存在正定矩阵 P

满足Lyapunov方程 $(\bar{A}_0 + \bar{B}_0F)^T P (\bar{A}_0 + \bar{B}_0F) - P = G < 0$. 利用矩阵 P 构造正定的Lyapunov函数 $V(\bar{X}(i)) = \bar{X}(i)^T P \bar{X}(i)$,沿着闭环系统(25)求 V 的差分,得到

$$\Delta V|_{(25)} = \bar{X}^T(i+1)P\bar{X}(i+1) - \bar{X}^T(i)P\bar{X}(i) = \bar{X}^T(i)\{(\bar{A}_0 + \bar{B}_0F + \Delta\bar{A}_0 + \Delta\bar{B}_0F)^T P (\bar{A}_0 + \bar{B}_0F + \Delta\bar{A}_0 + \Delta\bar{B}_0F)\} \bar{X}(i) - \bar{X}^T(i)P\bar{X}(i) = \bar{X}^T(i)\{(\bar{A}_0 + \bar{B}_0F)^T P (\bar{A}_0 + \bar{B}_0F) + (\bar{A}_0 + \bar{B}_0F)^T P (\Delta\bar{A}_0 + \Delta\bar{B}_0F) + (\Delta\bar{A}_0 + \Delta\bar{B}_0F)^T P (\bar{A}_0 + \bar{B}_0F) + (\Delta\bar{A}_0 + \Delta\bar{B}_0F)^T P (\Delta\bar{A}_0 + \Delta\bar{B}_0F) - P\} \bar{X}(i).$$

记 $\bar{\lambda} = \lambda_{\max}(G)$,利用矩阵和向量范数的有关性质得到

$$\Delta V|_{(25)} \leq (\bar{\lambda} + (2\|\Delta\bar{A}_0 + \Delta\bar{B}_0F\| \|\bar{A}_0 + \bar{B}_0F\| + \|\Delta\bar{A}_0 + \Delta\bar{B}_0F\|^2) \|P\|) \|\bar{X}(i)\|^2.$$

为保证闭环系统(25)稳定,要求 $\Delta V|_{(25)}$ 负定,因此只需

$$\bar{\lambda} + (2\|\Delta\bar{A}_0 + \Delta\bar{B}_0F\| \|\bar{A}_0 + \bar{B}_0F\| + \|\Delta\bar{A}_0 + \Delta\bar{B}_0F\|^2) \|P\| < 0. \quad (26)$$

整理得

$$2\|\Delta\bar{A}_0 + \Delta\bar{B}_0F\| \|\bar{A}_0 + \bar{B}_0F\| + \|\Delta\bar{A}_0 + \Delta\bar{B}_0F\|^2 < \frac{-\bar{\lambda}}{\|P\|}. \quad (27)$$

对式(27)两边同时加上 $\|\bar{A}_0 + \bar{B}_0F\|^2$,有

$$(\|\bar{A}_0 + \bar{B}_0F\| + \|\Delta\bar{A}_0 + \Delta\bar{B}_0F\|)^2 < \frac{-\bar{\lambda}}{\|P\|} + \|\bar{A}_0 + \bar{B}_0F\|^2. \quad (28)$$

进一步整理,即得

$$\|\Delta\bar{A}_0 + \Delta\bar{B}_0F\| < \sqrt{\frac{-\bar{\lambda}}{\|P\|} + \|\bar{A}_0 + \bar{B}_0F\|^2} - \|\bar{A}_0 + \bar{B}_0F\|.$$

由此看出,当上述不等式成立时, $\Delta V|_{(25)}$ 负定,从而式(25)稳定,即系统(25)是鲁棒稳定的. \square

下面结合矩阵范数的性质,进一步给出不包含任何不确定矩阵的判别条件以方便使用.

定理2 如果 $(\bar{A}_0 \ \bar{B}_0)$ 可镇定, $(\bar{Q}^{1/2} \ \bar{A}_0)$ 可检测,则采用预见控制器(21),可以使系统(18)的闭环系统鲁棒稳定,只要以下不等式满足:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\|C\|^2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{N-1}^2) + a_N^2} + \\ & \sqrt{\|C\|^2 m^2 + (b_0^2 + b_1^2 + \dots + b_{N-1}^2)} \|F\| < \\ & \sqrt{\frac{-\bar{\lambda}}{\|P\|}} + \|(\bar{A}_0 + \bar{B}_0 F)\|^2 - \|(\bar{A}_0 + \bar{B}_0 F)\|. \quad (29) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} a_i &= (\|\tilde{A}\| + \sqrt{\delta^2 + \delta_2^2})^i - \|\tilde{A}\|^i, \quad i = 1, 2, \dots, N; \\ b_j &= (\|\tilde{A}\| + \sqrt{\delta^2 + \delta_2^2})^j (\|\tilde{B}\| + \delta_1) - \|\tilde{A}\|^j \|\tilde{B}\|, \\ & \quad j = 0, 1, \dots, N-1; \\ m &= \sqrt{b_0^2 + b_1^2 + \dots + b_{N-2}^2} \\ & \quad \sqrt{b_0^2 + b_1^2 + \dots + b_{N-3}^2} + \dots + \sqrt{b_0^2}. \end{aligned}$$

证明 明显地,只需要证明,当不等式(29)成立时,定理1中的不等式(20)满足即可.为此,只需证明式(20)左边不超过(29)左边即可.

注意 $\Delta\bar{A}_0$ 和 $\Delta\bar{B}_0$ 的结构,由范数的定义和性质可知

$$\begin{aligned} & \|\Delta\bar{A}_0 + \Delta\bar{B}_0 F\| \leq \\ & \|\Delta\bar{A}_0\| + \|\Delta\bar{B}_0\| \|F\| = \\ & \left\| \begin{bmatrix} \Delta\bar{C} \\ \Delta\bar{A} \end{bmatrix} \right\| + \left\| \begin{bmatrix} \Delta\bar{D} \\ \Delta\bar{B} \end{bmatrix} \right\| \|F\| \leq \\ & \sqrt{\|\Delta\bar{C}^T \Delta\bar{C} + \Delta\bar{A}^T \Delta\bar{A}\|} + \\ & \sqrt{\|\Delta\bar{D}^T \Delta\bar{D} + \Delta\bar{B}^T \Delta\bar{B}\|} \|F\| \leq \\ & \sqrt{\|\Delta\bar{C}\|^2 + \|\Delta\bar{A}\|^2} + \\ & \sqrt{\|\Delta\bar{D}\|^2 + \|\Delta\bar{B}\|^2} \|F\|. \quad (30) \end{aligned}$$

下面分4步估计式(30)右边各项.

1) $\|\Delta\bar{A}\|$ 的估计. 因为

$$\Delta\bar{A} = (\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^N - \tilde{A}^N.$$

对其展开计算, $(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^N$ 中有一项为 \tilde{A}^N , 它与 $-\tilde{A}^N$ 正好抵消. 其他各项中分别包含 i 个 \tilde{A} 与 $N-i$ 个 $\Delta\tilde{A}$ 相乘 ($i = 0, 1, \dots, N-1$), 然后相加. 因为矩阵乘法一般不可交换, 所以如果完全写出这些结果, 则式子显得太复杂. 幸运的是它们有规律可循: 包含 i 个 \tilde{A} 与 $N-i$ 个 $\Delta\tilde{A}$ 相乘的项总共有 C_N^i 个. 这样, 利用范数性质可以得到

$$\begin{aligned} \|\Delta\bar{A}\| &\leq \sum_{i=0}^{N-1} C_N^i \|\tilde{A}\|^i \|\Delta\tilde{A}\|^{N-i} = \\ & \sum_{i=0}^N C_N^i \|\tilde{A}\|^i \|\Delta\tilde{A}\|^{N-i} - \|\tilde{A}\|^N = \\ & (\|\tilde{A}\| + \|\Delta\tilde{A}\|)^N - \|\tilde{A}\|^N. \end{aligned}$$

又由式(7)可知 $\Delta\tilde{A}$ 的结构, 有

$$\begin{aligned} \|\Delta\tilde{A}\| &= \|[\Delta A \quad \Delta B_2]\| \leq \\ & \sqrt{\|\Delta A\|^2 + \|\Delta B_2\|^2}, \quad (31) \end{aligned}$$

这样就得到

$$\|\Delta\bar{A}\| \leq (\|\tilde{A}\| + \sqrt{\|\Delta A\|^2 + \|\Delta B_2\|^2})^N - \|\tilde{A}\|^N. \quad (32)$$

再将 $\|\Delta A\| \leq \delta, \|\Delta B_2\| \leq \delta_2$ 代入式(32), 即得

$$\|\Delta\bar{A}\| \leq (\|\tilde{A}\| + \sqrt{\delta^2 + \delta_2^2})^N - \|\tilde{A}\|^N. \quad (33)$$

2) $\|\Delta\bar{B}\|$ 的估计.

首先, 由式(7)可知 $\Delta\tilde{B}$ 的结构, 得到

$$\|\Delta\tilde{B}\| = \|\Delta B_1\|, \quad (34)$$

又

$$\begin{aligned} \|\Delta\bar{B}\| &= \\ & \|[(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-1}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{A}^{N-1}\tilde{B} \rightarrow \\ & \leftarrow (\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-2}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{A}^{N-2}\tilde{B} \rightarrow \\ & \leftarrow \dots (\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{B}]\| \leq \\ & \sqrt{\sum_{i=1}^N \|(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-i}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{A}^{N-i}\tilde{B}\|^2}. \quad (35) \end{aligned}$$

同样, 按照上面估计 $\|\Delta\bar{A}\|$ 的方法, 对 $(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-1}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{A}^{N-1}\tilde{B}$ 展开计算, 利用范数性质可以得到

$$\begin{aligned} & \|(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-1}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{A}^{N-1}\tilde{B}\| \leq \\ & \left(\sum_{i=0}^{N-2} C_{N-1}^i \|\tilde{A}\|^i \|\Delta\tilde{A}\|^{N-1-i} \right) \|\tilde{B}\| + \\ & \left(\sum_{i=0}^{N-1} C_{N-1}^i \|\tilde{A}\|^i \|\Delta\tilde{A}\|^{N-1-i} \right) \|\Delta\tilde{B}\| \leq \\ & \left(\sum_{i=0}^{N-1} C_{N-1}^i \|\tilde{A}\|^i \|\Delta\tilde{A}\|^{N-1-i} - \|\tilde{A}\|^{N-1} \right) \|\tilde{B}\| + \\ & \left(\sum_{i=0}^{N-1} C_{N-1}^i \|\tilde{A}\|^i \|\Delta\tilde{A}\|^{N-1-i} \right) \|\Delta\tilde{B}\| = \\ & ((\|\tilde{A}\| + \|\Delta\tilde{A}\|)^{N-1} - \|\tilde{A}\|^{N-1}) \|\tilde{B}\| + \\ & (\|\tilde{A}\| + \|\Delta\tilde{A}\|)^{N-1} \|\Delta\tilde{B}\| = \\ & (\|\tilde{A}\| + \|\Delta\tilde{A}\|)^{N-1} (\|\tilde{B}\| + \|\Delta\tilde{B}\|) - \|\tilde{A}\|^{N-1} \|\tilde{B}\|. \end{aligned}$$

再将式(31)和(34)代入上式, 可得

$$\begin{aligned} & \|(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-1}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{A}^{N-1}\tilde{B}\| \leq \\ & (\|\tilde{A}\| + \sqrt{\|\Delta A\|^2 + \|\Delta B_2\|^2})^{N-1} (\|\tilde{B}\| + \|\Delta B_1\|) - \\ & \|\tilde{A}\|^{N-1} \|\tilde{B}\|. \end{aligned}$$

同理,可得

$$\begin{aligned} & \|(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-2}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{A}^{N-2}\tilde{B}\| \leq \\ & (\|\tilde{A}\| + \sqrt{\|\Delta A\|^2 + \|\Delta B_2\|^2})^{N-2}(\|\tilde{B}\| + \|\Delta B_1\|) - \\ & \|\tilde{A}\|^{N-2}\|\tilde{B}\|, \end{aligned}$$

⋮

$$\|(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{B}\| \leq (\|\tilde{B}\| + \|\Delta B_1\|) - \|\tilde{B}\|,$$

因此,有

$$\|\Delta\tilde{B}\| \leq \sqrt{N_0^2 + N_1^2 + \dots + N_{N-1}^2}. \quad (36)$$

其中

$$\begin{aligned} N_i = & (\|\tilde{A}\| + \sqrt{\|\Delta A\|^2 + \|\Delta B_2\|^2})^i(\|\tilde{B}\| + \|\Delta B_1\|) - \\ & \|\tilde{A}\|^i\|\tilde{B}\|, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

将 $\|\Delta A\| \leq \delta, \|\Delta B_1\| \leq \delta_1, \|\Delta B_2\| \leq \delta_2$ 代入上式,即得

$$\|\Delta\tilde{B}\| \leq \sqrt{b_0^2 + b_1^2 + \dots + b_{N-1}^2}. \quad (37)$$

其中

$$\begin{aligned} b_i = & (\|\tilde{A}\| + \sqrt{\delta^2 + \delta_2^2})^i(\|\tilde{B}\| + \delta_1) - \|\tilde{A}\|^i\|\tilde{B}\|, \\ & i = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

3) $\|\Delta\tilde{C}\|$ 的估计.

因为

$$\begin{aligned} \|\Delta\tilde{C}\| = & \left\| \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A}) \\ \vdots \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-2} \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{N-2} \\ \tilde{C}\tilde{A}^{N-1} \end{bmatrix} \right\| = \\ & \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A}) - \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}((\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-2} - \tilde{A}^{N-2}) \\ \tilde{C}((\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-1} - \tilde{A}^{N-1}) \end{bmatrix} \right\| \leq \\ & \|C\| \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} \|(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^i - \tilde{A}^i\|^2}, \quad (38) \end{aligned}$$

同样,利用范数的性质,由式(32)可得

$$\begin{aligned} & \|(\tilde{A} + \Delta\tilde{A}) - \tilde{A}\| \leq \\ & (\|\tilde{A}\| + \sqrt{\|\Delta A\|^2 + \|\Delta B_2\|^2}) - \|\tilde{A}\|, \\ & \vdots \\ & \|(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-2} - \tilde{A}^{N-2}\| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\|\tilde{A}\| + \sqrt{\|\Delta A\|^2 + \|\Delta B_2\|^2})^{N-2} - \|\tilde{A}\|^{N-2}, \\ & \|(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-1} - \tilde{A}^{N-1}\| \leq \end{aligned}$$

$$(\|\tilde{A}\| + \sqrt{\|\Delta A\|^2 + \|\Delta B_2\|^2})^{N-1} - \|\tilde{A}\|^{N-1},$$

则

$$\|\Delta\tilde{C}\| \leq \|C\| \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_{N-1}^2}. \quad (39)$$

其中

$$\begin{aligned} S_i = & (\|\tilde{A}\| + \sqrt{\|\Delta A\|^2 + \|\Delta B_2\|^2})^i - \|\tilde{A}\|^i, \\ & i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

将 $\|\Delta A\| \leq \delta, \|\Delta B_2\| \leq \delta_2$ 代入上式,即得

$$\|\Delta\tilde{C}\| \leq \|C\| \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{N-1}^2}. \quad (40)$$

其中

$$\begin{aligned} a_i = & (\|\tilde{A}\| + \sqrt{\delta^2 + \delta_2^2})^i - \|\tilde{A}\|^i, \\ & i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

4) $\|\Delta\tilde{D}\|$ 的估计.

$$\|\Delta\tilde{D}\| =$$

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{C}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{C}\tilde{B} \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} \\ \vdots \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-2}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{C}\tilde{A}^{N-2}\tilde{B} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{C}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{C}\tilde{B} \\ \vdots \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-3}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{C}\tilde{A}^{N-3}\tilde{B} \\ \dots & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 \\ \leftarrow \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \tilde{C}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{C}\tilde{B} & 0 \end{bmatrix} \right\| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{C}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{C}\tilde{B} \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} \\ \vdots \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-2}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{C}\tilde{A}^{N-2}\tilde{B} \end{bmatrix} \right\| \times \\ & [I \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{C}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{C}\tilde{B} \\ \vdots \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-3}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{C}\tilde{A}^{N-3}\tilde{B} \end{bmatrix} \times \\
 & [0 \ I \ 0 \ \dots \ 0] + \dots + \\
 & \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \tilde{C}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{C}\tilde{B} \end{bmatrix} [0 \ \dots \ 0 \ I \ 0] \right\| \leq \\
 & \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{C}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{C}\tilde{B} \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} \\ \vdots \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-2}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{C}\tilde{A}^{N-2}\tilde{B} \end{bmatrix} \right\| + \\
 & \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{C}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{C}\tilde{B} \\ \vdots \\ \tilde{C}(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^{N-3}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{C}\tilde{A}^{N-3}\tilde{B} \end{bmatrix} \right\| + \\
 & \dots + \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \tilde{C}(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{C}\tilde{B} \end{bmatrix} \right\| \leq \\
 & \|C\| \sqrt{\sum_{i=0}^{N-2} \|(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^i(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{A}^i\tilde{B}\|^2} + \\
 & \|C\| \sqrt{\sum_{i=0}^{N-3} \|(\tilde{A} + \Delta\tilde{A})^i(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{A}^i\tilde{B}\|^2} + \dots + \\
 & \|C\| \sqrt{\|(\tilde{B} + \Delta\tilde{B}) - \tilde{B}\|^2}.
 \end{aligned}$$

同样利用范数的性质, 可得

$$\begin{aligned}
 & \|\Delta\bar{D}\| \leq \\
 & \|C\| \sqrt{N_0^2 + N_1^2 + \dots + N_{N-2}^2} + \\
 & \|C\| \sqrt{N_0^2 + N_1^2 + \dots + N_{N-3}^2} + \dots + \\
 & \|C\| \sqrt{N_0^2}. \tag{41}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 N_j &= (\|\tilde{A}\| + \sqrt{\|\Delta A\|^2 + \|\Delta B_2\|^2})^j \times \\
 & (\|\tilde{B}\| + \|\Delta B_1\|) - \|\tilde{A}\|^j \|\tilde{B}\|, \\
 & j = 0, 1, \dots, N-2.
 \end{aligned}$$

注意式(31), 并将 $\|\Delta A\| \leq \delta, \|\Delta B_1\| \leq \delta_1, \|\Delta B_2\| \leq \delta_2$ 代入上式, 可得

$$\begin{aligned}
 & \|\Delta\bar{D}\| \leq \\
 & \|C\| \sqrt{b_0^2 + b_1^2 + \dots + b_{N-2}^2} + \\
 & \|C\| \sqrt{b_0^2 + b_1^2 + \dots + b_{N-3}^2} + \dots + \|C\| \sqrt{b_0^2}. \tag{42}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 b_j &= (\|\tilde{A}\| + \sqrt{\delta^2 + \delta_2^2})^j (\|\tilde{B}\| + \delta_1) - \|\tilde{A}\|^j \|\tilde{B}\|, \\
 & j = 0, 1, \dots, N-2.
 \end{aligned}$$

将式(33)、(37)、(40)和(42)代入(30), 有

$$\begin{aligned}
 & \|\Delta\bar{A}_0 + \Delta\bar{B}_0 F\| \leq \\
 & \sqrt{\|C\|^2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{N-1}^2) + a_N^2} + \\
 & \sqrt{\|C\|^2 m^2 + (b_0^2 + b_1^2 + \dots + b_{N-1}^2)} \|F\|. \tag{43}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 a_i &= (\|\tilde{A}\| + \sqrt{\delta^2 + \delta_2^2})^i - \|\tilde{A}\|^i, \quad i = 1, 2, \dots, N; \\
 b_j &= (\|\tilde{A}\| + \sqrt{\delta^2 + \delta_2^2})^j (\|\tilde{B}\| + \delta_1) - \|\tilde{A}\|^j \|\tilde{B}\|, \\
 & j = 0, 1, \dots, N-1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m &= \sqrt{b_0^2 + b_1^2 + \dots + b_{N-2}^2} \\
 & \sqrt{b_0^2 + b_1^2 + \dots + b_{N-3}^2} + \dots + \sqrt{b_0^2}.
 \end{aligned}$$

注意到, 当下面不等式成立时, 定理1中的不等式(20)也成立:

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\|C\|^2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{N-1}^2) + a_N^2} + \\
 & \sqrt{\|C\|^2 m^2 + (b_0^2 + b_1^2 + \dots + b_{N-1}^2)} \|F\| < \\
 & \sqrt{\frac{-\bar{\lambda}}{\|P\|}} + \|(\bar{A}_0 + \bar{B}_0 F)\|^2 - \|(\bar{A}_0 + \bar{B}_0 F)\|.
 \end{aligned}$$

由此定理2得证. \square

下面讨论控制器的存在条件, 即用原系统的相关参数给出 $(\bar{A}_0 \ \bar{B}_0)$ 可镇定、 $(\bar{Q}^{1/2} \ \bar{A}_0)$ 可检测的充要条件.

首先, 讨论 $(\bar{A}_0 \ \bar{B}_0)$ 的可镇定性.

引理1 $(\bar{A}_0 \ \bar{B}_0)$ 可镇定的充要条件是 $(\bar{A} \ \bar{B})$ 可镇定且矩阵 $\begin{bmatrix} \bar{A} - I & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix}$ 行满秩.

证明 利用PBH判别法, $(\bar{A}_0 \ \bar{B}_0)$ 可镇定的充要

条件是:对于任意满足 $|\lambda| \geq 1$ 的复数 λ , 矩阵 $[\bar{A}_0 - \lambda I \ \bar{B}_0]$ 行满秩.

注意构造扩大误差系统的过程, 将矩阵 \bar{A}_0 和 \bar{B}_0 的结构代入可得

$$[\bar{A}_0 - \lambda I \ \bar{B}_0] = \begin{bmatrix} A_0 - \lambda I & B_{PR} & B_0 \\ 0 & A_R - \lambda I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 - \lambda I & B_R & 0 & \cdots & \cdots & 0 & B_0 \\ 0 & -\lambda I & I & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & -\lambda I & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & I & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -\lambda I & 0 \end{bmatrix}.$$

对上式矩阵进行初等变换, 由于矩阵的初等变换不改变矩阵的秩, 由上式显然可知, 对于任意满足 $|\lambda| \geq 1$ 的复数 λ , 矩阵 $[\bar{A}_0 - \lambda I \ \bar{B}_0]$ 行满秩等价于矩阵 $[A_0 - \lambda I \ B_0]$ 行满秩. 因此, $(\bar{A}_0 \ \bar{B}_0)$ 可镇定的充要条件 $(A_0 \ B_0)$ 可镇定.

又注意到, $A_0 = \begin{bmatrix} I & -\bar{C} \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix}$, $B_0 = \begin{bmatrix} -\bar{D} \\ \bar{B} \end{bmatrix}$. 由PBH判别法显然可知, $(A_0 \ B_0)$ 可镇定的充要条件是 $(\bar{A} \ \bar{B})$ 可镇定且矩阵 $\begin{bmatrix} \bar{A} - I & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix}$ 行满秩. \square

引理2 $(\bar{A} \ \bar{B})$ 可镇定的充要条件是, 对于任意满足 $|\lambda| \geq 1$ 的复数 λ , 矩阵 $[A - \lambda I \ B_2 + \lambda^d B_1]$ 行满秩.

证明 由提升过程可知

$$\bar{A} = \tilde{A}^N, \bar{B} = [\tilde{A}^{N-1} \tilde{B} \ \cdots \ \tilde{A} \tilde{B} \ \tilde{B}].$$

由文献[25]中引理可知, $(\bar{A} \ \bar{B})$ 可镇定的充要条件是 $(\tilde{A} \ \tilde{B})$ 可镇定. 又由PBH判别法, $(\tilde{A} \ \tilde{B})$ 可镇定当且仅当对于任意满足 $|\lambda| \geq 1$ 的复数 λ , 矩阵 $[\tilde{A} - \lambda I \ \tilde{B}]$ 行满秩. 将矩阵 \tilde{A} 和 \tilde{B} 的结构代入, 有

$$[\tilde{A} - \lambda I \ \tilde{B}] = \begin{bmatrix} A - \lambda I & B_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_1 \\ 0 & -\lambda I & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & I & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda I & I \end{bmatrix}.$$

对上式右边的矩阵进行初等变换, 从最后一列开始将每一列的 λ 倍加到前一列, 直到将第3列的 λ 倍加到第2列时结束, 可得

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & B_2 + \lambda^d B_1 & \lambda^{d-1} B_1 & \lambda^{d-2} B_1 & \cdots & \lambda B_1 & B_1 \\ 0 & 0 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & I & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

由上式可以看出, 矩阵 $[\tilde{A} - \lambda I \ \tilde{B}]$ 行满秩等价于矩阵 $[A - \lambda I \ B_2 + \lambda^d B_1]$ 行满秩, 即 $(\tilde{A} \ \tilde{B})$ 可镇定的充要条件是, 对于任意满足 $|\lambda| \geq 1$ 的复数 λ , 矩阵 $[A - \lambda I \ B_2 + \lambda^d B_1]$ 行满秩. \square

综合引理1和引理2, 可得如下定理:

定理3 $(\bar{A}_0 \ \bar{B}_0)$ 可镇定的充要条件是, 对于任意满足 $|\lambda| \geq 1$ 的复数 λ , 矩阵 $[A - \lambda I \ B_2 + \lambda^d B_1]$ 行满秩且矩阵

$$\Phi = \begin{bmatrix} \tilde{A}^N - I & \tilde{A}^{N-1} \tilde{B} & \tilde{A}^{N-2} \tilde{B} & \cdots & \tilde{A} \tilde{B} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \tilde{C} \tilde{A} & \tilde{C} \tilde{B} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \tilde{C} \tilde{A}^2 & \tilde{C} \tilde{A} \tilde{B} & \tilde{C} \tilde{B} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{C} \tilde{A}^{N-1} & \tilde{C} \tilde{A}^{N-2} \tilde{B} & \tilde{C} \tilde{A}^{N-3} \tilde{B} & \cdots & \tilde{C} \tilde{B} & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

行满秩. 其中 $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ 在假设3中给出.

接下来, 讨论 $(\bar{Q}^{1/2} \ \bar{A}_0)$ 的可检测性.

引理3 $(\bar{Q}^{1/2} \ \bar{A}_0)$ 可检测的充分必要条件是 $(Q^{1/2} \ A_0)$ 可检测.

证明 由PBH判别法, $(\bar{Q}^{1/2} \ \bar{A}_0)$ 可检测当且仅当对于任意满足 $|\lambda| \geq 1$ 的复数 λ , 矩阵 $\begin{bmatrix} \bar{A}_0 - \lambda I \\ \bar{Q}^{1/2} \end{bmatrix}$ 列满秩.

注意 \bar{A}_0 和 \bar{Q} 的结构, 有

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_0 - \lambda I \\ \bar{Q}^{1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 - \lambda I & B_{PR} \\ 0 & A_R - \lambda I \\ Q^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 - \lambda I & B_R & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda I & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda I & I & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -\lambda I & I \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda I \\ Q^{1/2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

同样,对上式最后面的矩阵进行初等变换,显然,对于任意满足 $|\lambda| \geq 1$ 的复数 λ , 矩阵 $\begin{bmatrix} \bar{A}_0 - \lambda I \\ \bar{Q}^{1/2} \end{bmatrix}$ 列满秩等

价于矩阵 $\begin{bmatrix} A_0 - \lambda I \\ Q^{1/2} \end{bmatrix}$ 列满秩. \square

引理4 $(Q^{1/2} \ A_0)$ 可检测的充分必要条件是 $(\tilde{C} \ \tilde{A})$ 可检测.

证明 注意

$$A_0 = \begin{bmatrix} I & -\tilde{C} \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_E & \\ & 0_{(n+dr) \times (n+dr)} \end{bmatrix},$$

且 $Q_E > 0$. 由PBH判别法显然可知, $(Q^{1/2} \ A_0)$ 可检测当且仅当 $(\tilde{C} \ \tilde{A})$ 可检测. 又

$$\bar{A} = \tilde{A}^N, \bar{C} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{N-2} \\ \tilde{C}\tilde{A}^{N-1} \end{bmatrix},$$

应用文献[25]中的引理可知, $(\bar{C} \ \bar{A})$ 可检测的充要条件是 $(\tilde{C} \ \tilde{A})$ 可检测. \square

引理5 $(\tilde{C} \ \tilde{A})$ 可检测的充分必要条件是 $(C \ A)$ 可检测.

证明 由PBH判别法, $(\tilde{C} \ \tilde{A})$ 可检测的充分必要条件是,对于任意满足 $|\lambda| \geq 1$ 的复数 λ , 矩阵 $\begin{bmatrix} \tilde{A} - \lambda I \\ \tilde{C} \end{bmatrix}$ 列满秩.

注意 \tilde{A} 和 \tilde{C} 的结构,有

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} - \lambda I \\ \tilde{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - \lambda I & B_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda I & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda I & I & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda I & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & I \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda I \\ C & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

对上式右边矩阵进行初等变换,显然,对于任意满足 $|\lambda| \geq 1$ 的复数 λ , 矩阵 $\begin{bmatrix} \tilde{A} - \lambda I \\ \tilde{C} \end{bmatrix}$ 列满秩等价于矩阵

$\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$ 列满秩,即 $(\tilde{C} \ \tilde{A})$ 可检测的充分必要条件是 $(C \ A)$ 可检测. \square

结合引理3、引理4和引理5,可得如下定理:

定理4 $(\bar{Q}^{1/2} \ \bar{A}_0)$ 可检测的充分必要条件是 $(C \ A)$ 可检测.

综上,给出本文的关键性定理:

定理5 如果系统(1)满足假设1~假设5,且不等式(29)成立,则存在预见控制器

$$u((i+1)N+j) =$$

$$u(iN+j) + \sum_{s=0}^{N-1} F_{es}^{(j)} e(iN+s) +$$

$$F_{\Delta x}^{(j)} [x((i+1)N) - x(iN)] +$$

$$\sum_{l=0}^{d-1} F_{ul}^{(j)} [u((i+1)N-d+l) - u(iN-d+l)] +$$

$$\sum_{l=0}^{S_r-1} F_{Rl}^{(j)} \Delta R(i+l),$$

其中 $j = 0, 1, \dots, N-1$, 使得在性能指标函数(3)下, 系统(1)的闭环系统是鲁棒稳定的.

证明 根据定理1,对控制器的状态反馈矩阵 F 进行如下分解:

$$F = [F_0 \ F_R],$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} F_0^{(0)} \\ F_0^{(1)} \\ \vdots \\ F_0^{(N-1)} \end{bmatrix}, F_R = \begin{bmatrix} F_R^{(0)} \\ F_R^{(1)} \\ \vdots \\ F_R^{(N-1)} \end{bmatrix}, \quad (45)$$

又由

$$\Delta U(i) = \begin{bmatrix} \Delta u(iN) \\ \Delta u(iN+1) \\ \vdots \\ \Delta u(iN+N-1) \end{bmatrix},$$

则有

$$\Delta U(i) = F \bar{X}(i) = F_0 X_0(i) + F_R X_R(i),$$

即

$$\begin{bmatrix} \Delta u(iN) \\ \Delta u(iN+1) \\ \vdots \\ \Delta u(iN+N-1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_0^{(0)} \\ F_0^{(1)} \\ \vdots \\ F_0^{(N-1)} \end{bmatrix} X_0(i) + \begin{bmatrix} F_R^{(0)} \\ F_R^{(1)} \\ \vdots \\ F_R^{(N-1)} \end{bmatrix} X_R(i). \quad (46)$$

式(46)可以进一步写为

$$\Delta u(iN+j) = F_0^{(j)} X_0(i) + F_R^{(j)} X_R(i), \quad (47)$$

其中 $j = 0, 1, \dots, N-1$. 又

$$X_0(i) = \begin{bmatrix} E(i) \\ \Delta X(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(iN) \\ e(iN+1) \\ \vdots \\ \frac{e(iN+N-1)}{\Delta x(iN)} \\ \Delta u(iN-d) \\ \Delta u(iN-d+1) \\ \vdots \\ \Delta u(iN-1) \end{bmatrix},$$

$$X_R(i) = \begin{bmatrix} \Delta R(i) \\ \Delta R(i+1) \\ \vdots \\ \Delta R(i+S_r-1) \end{bmatrix},$$

将 $F_0^{(j)}$ 继续分解,有

$$F_0^{(j)} = [F_{e0}^{(j)} \ F_{e1}^{(j)} \ \dots \ F_{e,N-1}^{(j)} | F_{\Delta x1}^{(j)}; F_{u0}^{(j)} \ F_{u1}^{(j)} \ \dots \ F_{u,d-1}^{(j)}], \quad (48)$$

$F_R^{(j)}$ 继续分解为

$$F_R^{(j)} = [F_{R0}^{(j)} \ F_{R1}^{(j)} \ \dots \ F_{R,S_r-1}^{(j)}], \quad (49)$$

则式(46)可以表示为

$$\begin{aligned} \Delta u(iN+j) = & \sum_{s=0}^{N-1} F_{es}^{(j)} e(iN+s) + F_{\Delta x}^{(j)} \Delta x(iN) + \\ & \sum_{l=0}^{d-1} F_{ul}^{(j)} \Delta u(iN-d+l) + \sum_{l=0}^{S_r-1} F_{Rl}^{(j)} \Delta R(i+l). \end{aligned} \quad (50)$$

进一步,可以写为

$$\begin{aligned} u((i+1)N+j) = & u(iN+j) + \sum_{s=0}^{N-1} F_{es}^{(j)} e(iN+s) + \\ & F_{\Delta x}^{(j)} [x((i+1)N) - x(iN)] + \\ & \sum_{l=0}^{d-1} F_{ul}^{(j)} [u((i+1)N-d+l) - u(iN-d+l)] + \\ & \sum_{l=0}^{S_r-1} F_{Rl}^{(j)} \Delta R(i+l), \end{aligned} \quad (51)$$

其中 $j = 0, 1, \dots, N-1$. \square

注3 式(5)中 $\sum_{l=0}^{S_r-1} F_{Rl}^{(j)} \Delta R(i+l)$ 即为预见前馈补偿项.

4 数值仿真

本节通过一个数值算例来验证预见控制器的有效性.

考虑不确定离散时滞系统(1),取

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1.2 \\ 1 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad \Delta B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}, \quad \Delta B_2 = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 1],$$

输入时滞 $d = 3$. 为了体现不确定性,把不确定参数 a 、 b 、 c 取绝对值不超过 0.001 的随机数,则有 $\|\Delta A\| \leq 0.001$, $\|\Delta B_1\| \leq 0.001$, $\|\Delta B_2\| \leq 0.001$, 于是可取 $\delta = \delta_1 = \delta_2 = 0.001$.

假设 $N = 2$,即在输出量 $y(k)$ 的一个检测周期内,输入量 $u(k)$ 将改变两次. 在评价函数中,取权重矩阵为 $Q_e = 1, H = 100$.

容易验证,当 $|\lambda| \geq 1$ 时,对于任意满足 $|\lambda| \geq 1$ 的复数 λ ,矩阵 $[A - \lambda I \ B_2 + \lambda^3 B_1]$ 行满秩, $(C \ A)$ 可检测. 经计算,矩阵

$$\Phi = \begin{bmatrix} \tilde{A}^2 - I & \tilde{A}\tilde{B} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & 0 & 0 \\ \tilde{C}\tilde{A} & \tilde{C}\tilde{B} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.2 & 4.68 & 7.2 & 2 & 0 & 35.4 & 9 \\ 3.9 & 1.01 & 2.9 & 1 & 0 & 15.3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2.1 & 3 & 0 & 0 & 16 & 0 \end{bmatrix}$$

是行满秩的.

设预见步数为 $M_r = 12(S_r = 6)$,选择 $(\bar{A}_0 + \bar{B}_0 F)^T P (\bar{A}_0 + \bar{B}_0 F) - P = -I_{19}$,可知 $\bar{\lambda} = -1$,用 Matlab 中的 dlyap 函数得到正定矩阵 P . 经计算,有

$$\begin{aligned} & \sqrt{\|C\|^2 a_1^2 + a_2^2} + \\ & \sqrt{\|C\|^2 (\sqrt{b_0^2}^2 + (b_0^2 + b_1^2) \|F\|)} = 0.0193, \\ & \sqrt{\frac{-\bar{\lambda}}{\|P\|}} + \|(\bar{A}_0 + \bar{B}_0 F)\|^2 - \|(\bar{A}_0 + \bar{B}_0 F)\| = 0.0199. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= (\|\tilde{A}\| + \sqrt{\delta^2 + \delta_2^2}) - \|\tilde{A}\|, \\ a_2 &= (\|\tilde{A}\| + \sqrt{\delta^2 + \delta_2^2})^2 - \|\tilde{A}\|^2, \\ b_0 &= (\|\tilde{B}\| + \delta_1) - \|\tilde{B}\|, \\ b_1 &= (\|\tilde{A}\| + \sqrt{\delta^2 + \delta_2^2})(\|\tilde{B}\| + \delta_1) - \|\tilde{A}\| \|\tilde{B}\|. \end{aligned}$$

显然 $0.0193 < 0.0199$,因此

$$\sqrt{\|C\|^2 a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{\|C\|^2 (\sqrt{b_0^2}^2 + (b_0^2 + b_1^2) \|F\|} < \sqrt{\frac{-\bar{\lambda}}{\|P\|}} + \|(\bar{A}_0 + \bar{B}_0 F)\|^2 - \|(\bar{A}_0 + \bar{B}_0 F)\|,$$

即不等式(29)成立. 所以根据定理5,系统(1)存在形如式(51)的预见控制器,且该控制器使得系统(1)的闭环系统是鲁棒稳定的.

下面在预见步数为 $M_r = 12(S_r = 6)$ 和没有预见(即 $M_r = 0$)的情况下,针对两种不同的目标信号进行仿真.

1) 第1个目标信号取为

$$r(k) = \begin{cases} 0, & k < 20; \\ 3, & k \geq 20. \end{cases} \quad (52)$$

图1和图2分别是不确定闭环系统对目标信号(52)的输出响应与跟踪误差. 可以看到,与无预见补偿的控制器相比,带有预见补偿的控制器可以更快地跟踪目标信号,并且使得跟踪误差减小.

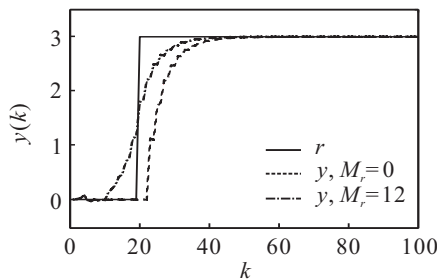


图1 系统对目标信号(52)的输出响应

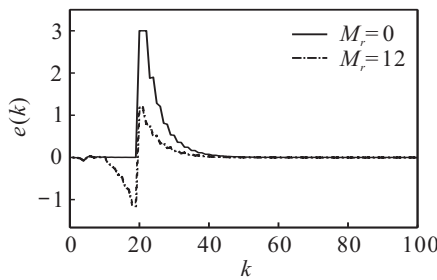


图2 系统对目标信号(52)的跟踪误差

2) 第2个目标信号取为

$$r(k) = \begin{cases} 0, & k < 20; \\ 0.05k - 1, & 20 \leq k < 80; \\ 3, & k \geq 80. \end{cases} \quad (53)$$

图3和图4分别是不确定闭环系统对目标信号(53)的输出响应与跟踪误差. 同样可以看出预见项的作用很明显,能使闭环系统的输出更快地跟踪目标信号. 另外,输出响应与跟踪误差曲线上的振动正是多采样率系统的特点.

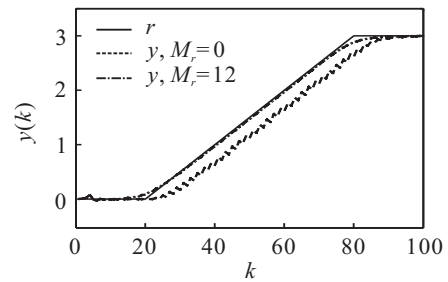


图3 系统对目标信号(53)的输出响应

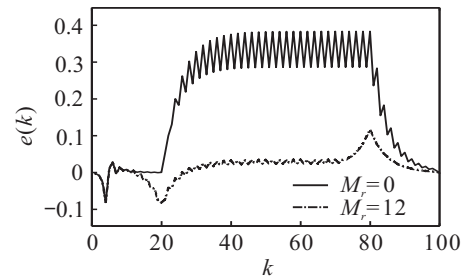


图4 系统对目标信号(53)的跟踪误差

5 结论

本文结合多采样率控制系统基本理论,研究了一类具有输入多采样特点和输入时滞的不确定离散时间系统的预见控制问题. 利用离散提升技术和预见控制的基本方法,构造出包含未来目标信号的扩大误差系统. 然后对扩大误差系统的标称系统设计预见控制器,并利用鲁棒控制理论和矩阵与向量范数的性质,给出了不确定闭环系统的鲁棒稳定性判据. 同时对相应的标称系统的可镇定性和可检测性进行了详细的讨论,并给出控制器存在的充要条件. 仿真结果充分验证了本文方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] Birla N, Swarup A. Optimal preview control: A review[J]. Optimal Control Application and Methods, 2015, 36(2): 241-268.
- [2] Tomizuka M. Optimal continuous finite preview problem[J]. IEEE Trans on Automatica Control, 1975, 20(3): 362-365.
- [3] Katayama T, Hirono T. Design of an optimal servomechanism with preview action and its dual problem[J]. Int J of Control, 1987, 45(2): 407-420.
- [4] Katayama T, Ohki T, Inour T, et al. Design of an optimal controller for a discrete-time system subject to previewable demand[J]. Int J of Control, 1985, 41(3): 677-699.
- [5] Gou N. Stochastic optimal tracking with preview for linear continuous-time Markovian jump systems[C]. SICE Annual Conf. Tokyo, 2008: 1833-1838.
- [6] Gershon E, Shaked U. H_∞ preview tracking control of retarded state-multiplicative stochastic systems[J]. Int J of Robust Nonlinear Control, 2014, 24(15): 2119-2135.

- [7] Liao F, Lu Y, Liu H. Cooperative optimal preview tracking control of continuous-time multi-agent systems[J]. *Int J Control*, 2016, 89(10): 2019-2028.
- [8] 王志胜. 非线性离散系统的信息融合最优预见控制[J]. *控制与决策*, 2008, 23(4): 397-402.
(Wang Z S. Information fusion optimal preview control for nonlinear discrete system[J]. *Control and Decision*, 2008, 23(4): 397-402.)
- [9] Zou Q, Devasia S. Precision preview-based stable-inversion for nonlinear nonminimum-phase systems: The VTOL example[J]. *Automatica*, 2007, 43(1): 117-127.
- [10] Thommyppillai M, Evangelou S, Sharp R S. Car driving at the limit by adaptive linear optimal preview control[J]. *Vehicle System Dynamics*, 2009, 47(12): 1535-1550.
- [11] Wang D, Liao F, Tomizuka M. Adaptive preview control for piecewise discrete-time systems using multiple models[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, 40(23/24): 9932-9946.
- [12] 甄子洋. 预见控制理论及应用研究进展[J]. *自动化学报*, 2016, 42(2): 172-188.
(Zhen Z Y. Research development in preview control theory and application[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2016, 42(2): 172-188.)
- [13] Ryu S, Kim Y, Park Y. Robust H_∞ preview control of an active suspension system with norm-bounded uncertainties[J]. *Int J of Automotive Technology*, 2008, 9(5): 585-592.
- [14] Kojima A, Ishijima S. Formulas on preview and delayed H_∞ control[J]. *IEEE Trans on Automatica Control*, 2006, 51(12): 1920-1937.
- [15] Kojiam A. Controller design for preview and delayed systems[J]. *IEEE Trans on Automatica Control*, 2015, 60(2): 404-419.
- [16] Wang D, Liao F. Robust preview control for uncertain discrete-time systems[C]. *Int Conf of Numerical Analysis and Applied Mathematics*. Kos, 2012: 2028-2031.
- [17] Xiao J. Multirate sampling digital control system[M]. Beijing: Science Press, 2003: 4-5.
- [18] Liu Y, Ding F, Shi Y. An efficient hierarchical identification method for general dual-rate sampled-data systems[J]. *Automatica*, 2014, 50(3): 962-970.
- [19] Mizumoto I, Chen T, Ohdaira S, et al. Adaptive output feedback control of general MIMO systems using multirate sampling and its application to a cart-crane system[J]. *Automatica*, 2007, 43(12): 2077-2085.
- [20] 徐鹏, 肖建, 周鹏, 等. 输入多采样率离散时间系统准滑膜控制器[J]. *控制与决策*, 2015, 30(3): 500-506.
(Xu P, Xiao J, Zhou P, et al. Design of quasi-sliding-mode controller for multirate-input discrete-time system[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(3): 500-506.)
- [21] 石千松, 廖福成. 具有多采样率及状态时滞的线性离散时间系统的预见控制[J]. *北京科技大学学报*, 2011, 33(3): 363-375.
(Shi Q S, Liao F C. Design of an optimal preview controller for linear discrete-time multirate systems with state-delay[J]. *J of University of Science and Technology Beijing*, 2011, 33(3): 363-375.)
- [22] Liao F, Tomizuka M, Cao M, et al. Optimal preview control for discrete-time descriptor causal systems in a multirate setting[J]. *Int J of Control*, 2013, 86(5): 844-854.
- [23] Liao F, Guo Y, Tang Y Y. Design of an optimal preview controller for linear time-varying discrete system in a multirate setting[J]. *Int J of Wavelets Multiresolution Inf Process*, 2015, 13(6): 1550050-1-1550050-19.
- [24] Zhou K, Doyle J C, Glover K. Robust and optimal control[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1996: 245-246.
- [25] Liao F, Takaba K, Katayama T, et al. Design of an optimal preview servomechanism for discrete-time systems in a multirate setting[J]. *Dynamic of Continuous Discrete Impulsive Systems Series B: Applications and Algorithms*, 2003, 10(5): 727-744.

(责任编辑: 李君玲)

《控制与决策》荣获中国精品科技期刊荣誉称号

本刊讯 2017年10月31日,由国家科学技术部中国科学技术信息研究所主办的“2017年中国科技论文统计结果发布会”在北京国际会议中心举行。会上发布了《2017中国科技论文统计结果》,《控制与决策》在信息科学与系统科学类期刊综合评价指标排名第三,在全国共2008种核心期刊中排名第177位,被评为“第4届中国精品科技期刊”,即“中国精品科技期刊顶尖学术论文(F5000)项目来源期刊”。这是本刊第4次获此殊荣,并连续被收录为“中国科技核心期刊”。

同时,会上公布了“2016年中国百篇最具影响国内学术论文”。本年度选取2012年~2016年中国科技论文与引文数

数据库收录的科技论文,统计全部论文的累积被引用次数,进入相应发表年度和所属学科领域的前千分之一的论文作为本年度的候选论文,参考多方面评价指标,从中择优选取“中国百篇最具影响国内学术论文”。本刊于2013年第2期发表的由哈尔滨工程大学孙枫等撰写的《Cubature 卡尔曼滤波与 Unscented 卡尔曼滤波估计精度比较》一文获此殊荣。

此外,中国科学技术信息研究所在中国精品科技期刊中遴选优秀学术论文,建设了“领跑者5000—中国精品科技期刊顶尖学术论文(F5000)”,集中对外展示和交流我国的优秀学术论文,我刊共有16篇文章入选2017年F5000。