文章编号: 1001-0920(2017)12-2190-05 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2016.1477

白化权函数已知的区间灰数的核与灰度

束 慧[1,2†], 王文平[3], 熊萍萍[2,4]

(1. 南京邮电大学 理学院，南京 210032；2. 南京信息工程大学 中国制造业发展研究院，南京 210044；
3. 东南大学 经济管理学院，南京 210096；4. 南京信息工程大学 数学与统计学院，南京 210044)

摘 要: 针对在白化权函数已知的情形下,区间灰数的核与灰度的构造问题进行研究. 给出该情形下区间灰数的核与灰度的重构定义,提出区间灰数间并的核与灰度,并对它们的相关性质进行分析. 探讨当区间灰数具有典型白化权函数时相应的核与灰度,特别地,当白化权函数退化成在区间灰数内取值为1,即缺乏区间灰数的取值分布信息时,核、灰度的结果与原有定义一致. 所提出的核与灰度是对已有研究的一种拓广.

关键词: 白化权函数；区间灰数；核；灰度

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Kernel and greyness of interval grey number under known whitening weight function

SHU Hui[1,2†], *WANG Wen-ping*[3], *XIONG Ping-ping*[2,4]

(1. College of Science，Nanjing University of Posts & Telecommunications，Nanjing 210023，China；2. China Institute of Manufacturing Development，Nanjing University of Information Science and Technology，Nanjing 210044, China；3. School of Economy and Management，Southeast University，Nanjing 210096，China；4. College of Mathematics and Statistics，Nanjing University of Information Science and Technology，Nanjing 210044，China)

Abstract: This paper studies the structural problems of kernel and grayness of interval gray numbers under the known whitening weight function. Firstly, the definition of kernel and gray scale reconstruction of the interval grey number is given. The kernel and grayness of the union of grey numbers are proposed, and their correlation properties are analyzed. Then, the kernel and gray scale are discussed when the interval grey number is a typical function of the white power. Particularly, when the whitening weight function is reduced to being one within the interval grey number, namely the grey number is lack of the distribution information, the results of the kernel and the grayness are consistent with the original definition. The proposed kernel and gray level are extended to the existing research.

Keywords: whitenization weight function；interval grey number；kernel；greyness

0 引 言

灰代数系统是灰色系统理论的基础,关于灰代数系统的研究一直备受学者们的关注和重视. 邓聚龙[1] 以认知模式为前提,提出了灰朦胧集,构建了灰数学的基本框架,为灰色系统奠定了理论基础. 部分学者对灰朦胧集的差异信息理论、灰生成空间的结构、灰生成的矩阵表示以及广义累加生成空间进行了研究[2-3].

区间灰数的表示方法和运算法则是灰代数系统中较重要的一部分内容,一些学者先后提出了3种区间灰数的表示方法及其运算法则: 第1种是区间灰数的普通表示方法(如$\otimes \in [a, b]$)[4],第2种是标准区间灰数表示方法[5],这两种区间灰数之间可以相互转换,但没有考虑灰数所产生的背景或论域;第3种表示方法建立在论域的基础上,称为基于论域的核与灰度的表示方法,该方法提出了灰度不减公理和运算法则[6]. Liu 等[7] 对基于核和灰度的灰数加和减的灰度合成进行了深入探讨. 针对第3种区间灰数之间

收稿日期: 2016-11-20；**修回日期:** 2017-02-15.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71503103, 71701105, 71301060, 71271226, 71171116)；教育部人文社科青年基金项目(17YJC630123, 17YJC630182)；江苏省高校自然科学研究面上项目(15KJB120008)；中国博士后基金面上项目(2016M601849)；中国制造业发展研究院2014年度开放课题(SK20140090-13)；南京邮电大学校级科研项目(NY215180)；2015年度大学生实践创新训练计划项目(201510300009).

作者简介: 束慧(1981−), 男, 讲师, 博士, 从事灰色系统理论及其应用、产业生态化的研究；王文平(1966−), 女, 教授, 博士生导师, 从事产业生态经济系统分析、复杂系统分析、灰色系统理论及应用等研究.

†通讯作者. E-mail: shuh@njupt.edu.cn

的运算结果可能不在论域中的问题,提出了合成灰数及其灰度的定义[8]. 有学者认为灰度不减公理存在一定的局限性,并对基于核和灰度的灰数加、减和数乘运算法则进行了修正,但该修正还存在一定的缺陷[9]. 也有学者对基于灰色白化权函数的灰数的灰度进行了探讨[10]. 少数学者对灰集合定义了交和并两种运算,并验证了交运算能减少灰集合的不确定性[11]. Wang[12] 给出了区间灰数序列的白化均值、白化方差、白化协方差和白化相关系数等概念,是对经典统计的一种尝试性拓广.

目前,关于灰数的核与灰度的定义,主要是针对在缺乏灰数取值分布信息的情形下进行的研究. 本文主要针对在灰数取值分布信息已知,即灰数的白化权函数已知的情形下,定义灰数的核与灰度,并给出灰数间并与交的核与灰度. 灰数有很多种类,本文主要讨论区间灰数的核与灰度.

1 白化权函数已知的区间灰数的核与灰度

当灰数某些分布信息已知时,白化权函数可以用来描述该灰数对其取值范围内不同数值的偏爱程度,能够利用白化权函数描述的灰数,是一类所掌握的取值分布信息不完全的灰数. 人们对灰色系统认识的不确定程度可以由灰数的灰度来反映,因此,灰数的灰度与该灰数产生的论域有着紧密的联系[4]. 由于灰数产生的背景或论域Ω一般为人们所共识,不含任何有用的信息[4],此时默认论域对其取值范围内不同数值的取值可能性相等,可以将它当作白化权函数为1的特殊灰数加以处理. 设$\Omega \in [a,b]$,认为论域Ω的白化权函数[10]为

$$f_\Omega(x) = \begin{cases} 1,\ x \in [a,b]; \\ 0,\ x \notin [a,b]. \end{cases}$$

定义1 设论域$\Omega \in [a,b]$, $\otimes \in [a_1,b_1] \subset \Omega$, $f_\otimes(x)$为灰数$\otimes$的白化权函数,其中$0 \leqslant f_\otimes(x) \leqslant 1$,如图1所示,则区间灰数$\otimes$的核为

$$\hat{\otimes} = \frac{\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} f_\otimes(x) x \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} f_\otimes(x)\mathrm{d}x}; \qquad (1)$$

区间灰数$\otimes$的灰度为

$$g^o(\otimes) = \frac{\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} f_\otimes(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b f_\Omega(x)\mathrm{d}x} = \frac{\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} f_\otimes(x)\mathrm{d}x}{b-a} \triangleq \frac{\mu(\otimes)}{\mu(\Omega)}. \qquad (2)$$

当论域Ω中任意区间灰数$\otimes$的白化权函数未知时,默认区间灰数对其取值范围内不同数值的取值可能性相等,即认为区间灰数$\otimes$的白化权函数为

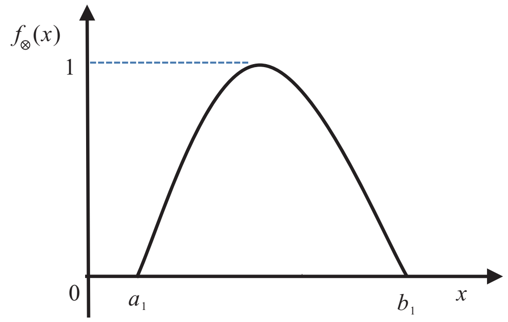

图1 区间灰数$\otimes$的白化权函数

$$f_\otimes(x) = \begin{cases} 1,\ x \in [a_1,b_1]; \\ 0,\ x \notin [a_1,b_1]. \end{cases}$$

此时$\otimes$的核与灰度分别为

$$\hat{\otimes} = \frac{\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} x\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x} = \frac{a_1+b_1}{2},$$

$$g^0(\otimes) = \frac{\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x} = \frac{b_1-a_1}{b-a}.$$

可得Ω的核与灰度分别为

$$\hat{\Omega} = \frac{\displaystyle\int_a^b x\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x} = \frac{a+b}{2},$$

$$g^o(\Omega) = \frac{\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x} = 1.$$

上述结果与文献[6]完全一致.

定理1 若区间灰数$\otimes$定义其灰度为

$$g^o(\otimes) = \frac{\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} f_\otimes(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b f_\Omega(x)\mathrm{d}x} = \frac{\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} f_\otimes(x)\mathrm{d}x}{b-a} \triangleq \frac{\mu(\otimes)}{\mu(\Omega)},$$

则其满足灰度定义的4个公理.

证明 1) 因为

$$\otimes \subset \Omega,\ 0 \leqslant f_\otimes(x) \leqslant 1,$$

由定积分的几何意义可知

$$0 \leqslant \int_{a_1}^{b_1} f_\otimes(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f_\Omega(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$0 \leqslant \mu(\otimes) \leqslant \mu(\Omega).$$

从而得到

$$0 \leqslant g^o(\otimes) \leqslant 1.$$

2) 当$\otimes \in [a_1,b_1]$时,$a_1 \leqslant b_1$,当$a_1 = b_1$时,$g^o(\otimes) = 0$.

3) 公理3和公理4显然成立. □

定义2[6] 设论域$\Omega \in [a,b], \otimes_1 \in [a_1,b_1] \subset \Omega$, $a_1 < b_1$, $\hat{\otimes}_1$为$\otimes_1$的核, $g^o(\otimes_1)$为$\otimes_1$的灰度, 则称$\hat{\otimes}_{1(g^o(\otimes_1))}$为区间灰数$\otimes_1$的简化形式.

定义3[4] 设论域$\Omega \in [a,b], \otimes_1 \in [a_1,b_1] \subset \Omega$, $a_1 < b_1, \otimes_2 \in [a_2,b_2] \subset \Omega, a_2 < b_2$,则称$\otimes_1 \bigcup \otimes_2 = \{\xi | \xi \in [a_1,b_1]$或$\xi \in [a_2,b_2]\}$为灰数$\otimes_1, \otimes_2$的并.

对于两个区间灰数并的核与灰度的定义,借助文献[7]的方法,可得如下定义.

定义4 设论域$\Omega \in [a,b], \otimes_1 \in [a_1,b_1] \subset \Omega$, $a_1 < b_1, \otimes_2 \in [a_2,b_2] \subset \Omega, a_2 < b_2, 0 \leqslant f_{\otimes_1}(x) \leqslant 1, 0 \leqslant f_{\otimes_2}(x) \leqslant 1$分别为灰数$\otimes_1, \otimes_2$的白化权函数, $\hat{\otimes}_1, \hat{\otimes}_2$分别为$\otimes_1, \otimes_2$的核, $g^o(\otimes_1), g^o(\otimes_2)$分别为$\otimes_1, \otimes_2$的灰度,则$\otimes_1 \bigcup \otimes_2$的核为

$$(\widehat{\otimes_1 \bigcup \otimes_2}) = \frac{1}{2}(\hat{\otimes}_1 + \hat{\otimes}_2) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\int_{a_1}^{b_1} x f_{\otimes_1}(x)\mathrm{d}x}{\int_{a_1}^{b_1} f_{\otimes_1}(x)\mathrm{d}x} + \frac{\int_{a_2}^{b_2} x f_{\otimes_2}(x)\mathrm{d}x}{\int_{a_2}^{b_2} f_{\otimes_2}(x)\mathrm{d}x}\Big); \tag{3}$$

$\otimes_1 \bigcup \otimes_2$的灰度为

$$g^o(\otimes_1 \bigcup \otimes_2) = \frac{1}{(\widehat{\otimes_1 \bigcup \otimes_2})}[\hat{\otimes}_1 g^o(\otimes_1) + \hat{\otimes}_2 g^o(\otimes_2)]. \tag{4}$$

定理2 $g^o(\otimes_1 \bigcup \otimes_2)$至少不小于$g^o(\otimes_1)$、$g^o(\otimes_2)$中的一个.

证明 不妨设$\hat{\otimes}_1 \leqslant \hat{\otimes}_2$,则有

$$\begin{aligned} & g^o(\otimes_1 \bigcup \otimes_2) = \\ & \frac{1}{(\widehat{\otimes_1 \bigcup \otimes_2})}[\hat{\otimes}_1 g^o(\otimes_1) + \hat{\otimes}_2 g^o(\otimes_2)] = \\ & \frac{1}{\frac{1}{2}(\hat{\otimes}_1 + \hat{\otimes}_2)}[\hat{\otimes}_1 g^o(\otimes_1) + \hat{\otimes}_2 g^o(\otimes_2)] \geqslant \\ & \frac{1}{\frac{1}{2}(\hat{\otimes}_2 + \hat{\otimes}_2)}[\hat{\otimes}_1 g^o(\otimes_1) + \hat{\otimes}_2 g^o(\otimes_2)] = \\ & \frac{\hat{\otimes}_1 g^o(\otimes_1)}{\hat{\otimes}_2} + g^o(\otimes_2) \geqslant g^o(\otimes_2). \end{aligned}$$

当$\hat{\otimes}_1 \geqslant \hat{\otimes}_2$时,同理可证

$$g^o(\otimes_1 \bigcup \otimes_2) \geqslant g^o(\otimes_1). \qquad \square$$

2 白化权函数已知的区间灰数的运算法则

设论域$\Omega \in [a,b], \otimes_1 \in [a_1,b_1] \subset \Omega, a_1 < b_1, \otimes_2 \in [a_2,b_2] \subset \Omega, a_2 < b_2, \hat{\otimes}_1, \hat{\otimes}_2$分别为$\otimes_1, \otimes_2$的核, $g^o(\otimes_1) \triangleq g_1^o, g^o(\otimes_2) \triangleq g_2^o$分别为$\otimes_1, \otimes_2$的灰度. 利用文献[7]的结果,给出白化权函数已知的区间灰数的运算法则.

法则1 $\hat{\otimes}_{1(\mathrm{g}_1^o)} + \hat{\otimes}_{2(\mathrm{g}_2^o)} = (\hat{\otimes}_1 + \hat{\otimes}_2)_{(\omega_1 \mathrm{g}_1^o + \omega_2 \mathrm{g}_2^o)}$, $\omega_i = \dfrac{\hat{\otimes}_i}{\hat{\otimes}_1 + \hat{\otimes}_2}, i = 1,2$.

法则2 $-\hat{\otimes}_{1(g_1^o)} = (-\hat{\otimes}_1)_{(g_1^o)}$.

法则3 $\hat{\otimes}_{1(g_1^o)} - \hat{\otimes}_{2(g_2^o)} = (\hat{\otimes}_1 - \hat{\otimes}_2)_{(\omega_1 g_1^o + \omega_2 g_2^o)}, \omega_i$同上.

法则4 $\hat{\otimes}_{1(g_1^o)} \times \hat{\otimes}_{2(g_2^o)} = (\hat{\otimes}_1 \times \hat{\otimes}_2)_{(g_1^o \vee g_2^o)}$.

法则5 若$\hat{\otimes}_1 \neq 0$, 则$1/\hat{\otimes}_{1(g_1^o)} = (1/\hat{\otimes}_1)_{(g_1^o)}$.

法则6 若$\hat{\otimes}_2 \neq 0$, 则$\hat{\otimes}_{1(g_1^o)} \div \hat{\otimes}_{2(g_2^o)} = (\hat{\otimes}_1 \div \hat{\otimes}_2)_{(g_1^o \vee g_2^o)}$.

法则7 若k为实数, 则$k\hat{\otimes}_{1(g_1^o)} = (k\hat{\otimes}_1)_{(g_1^o)}$.

3 典型白化权函数已知情形下的区间灰数的核与灰度

常见的白化权函数有典型白化权函数、上限测度白化权函数、下限测度白化权函数和适中测度白化权函数[4],本文主要讨论典型白化权函数已知情形下的区间灰数的核与灰度,当区间灰数具有其他情形的白化权函数时,对应的核与灰度可用类似方法讨论.

设论域为$\Omega \in [a,b], \otimes \in [a_1,b_1], a_1 < b_1$,论域的白化权函数为

$$f_\Omega(x) = \begin{cases} 1, \ x \in [a,b]; \\ 0, \ x \notin [a,b]. \end{cases}$$

区间灰数$\otimes$的白化权函数如图2所示.

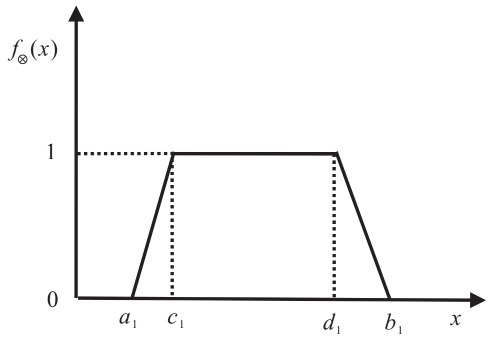

图2 $\otimes$的白化权函数

区间灰数$\otimes$白化权函数具体表达式为

$$f_\otimes(x) = \begin{cases} 0, \ x \notin [a_1,b_1]; \\ \dfrac{x-a_1}{c_1-a_1}, \ x \in [a_1,c_1]; \\ 1, \ x \in [c_1,d_1]; \\ \dfrac{b_1-x}{b_1-d_1}, \ x \in [d_1,b_1]. \end{cases}$$

可求出区间灰数$\otimes$的核及灰度为

$$\hat{\otimes} = \frac{\int_{a_1}^{b_1} x f_\otimes(x)\mathrm{d}x}{\int_{a_1}^{b_1} f_\otimes(x)\mathrm{d}x} = \frac{\int_{a_1}^{c_1} \frac{x(x-a_1)}{c_1-a_1}\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{d_1} x\mathrm{d}x + \int_{d_1}^{b_1} \frac{x(b_1-x)}{b_1-d_1}\mathrm{d}x}{\frac{1}{2}(b_1-a_1+d_1-c_1)} =$$

$$\frac{\frac{1}{6}(b_1^2+b_1d_1+d_1^2-a_1^2-a_1c_1-c_1^2)}{\frac{1}{2}(b_1-a_1+d_1-c_1)}=$$
$$\frac{b_1^2+b_1d_1+d_1^2-a_1^2-a_1c_1-c_1^2}{3(b_1-a_1+d_1-c_1)},\tag{5}$$

$$g^o(\otimes)=$$
$$\frac{\int_{a_1}^{b_1}f_\otimes(x)\mathrm{d}x}{b-a}=\frac{\frac{1}{2}(b_1-a_1+d_1-c_1)}{b-a}=$$
$$\frac{b_1-a_1+d_1-c_1}{2(b-a)}.\tag{6}$$

4　算例分析

设某论域$\varOmega\in[-6,30]$, $\otimes_1\in[-2,20]$, $\otimes_2\in[16,25]$, $\otimes_1,\otimes_2$的白化权函数如图3和图4所示, 具体表达式分别为

$$f_{\otimes_1}(x)=\begin{cases}0,\ x\notin[-2,20];\\ \dfrac{x+2}{3},\ x\in[-2,1];\\ 1,\ x\in[1,18];\\ \dfrac{20-x}{2},\ x\in[18,20].\end{cases}$$

$$f_{\otimes_2}(x)=\begin{cases}0,\ x\notin[16,25];\\ \dfrac{x-16}{3},\ x\in[16,19];\\ 1,\ x\in[19,22];\\ \dfrac{25-x}{3},\ x\in[22,25].\end{cases}$$

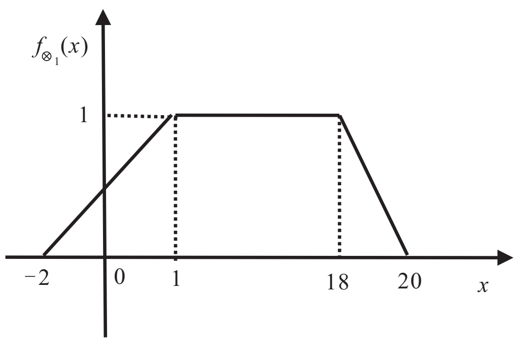

图3　区间灰数$\otimes_1$的白化权函数

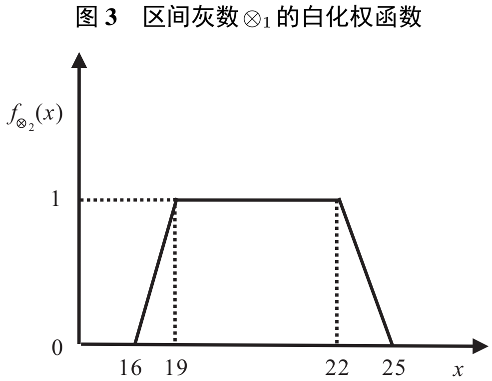

图4　区间灰数$\otimes_2$的白化权函数

1) 试求出区间灰数$\otimes_1,\otimes_2$的核与灰度;

2) 试求出$\otimes_1\bigcup\otimes_2$的核与灰度;

3) 试用核与灰度的形式表示$\otimes_1+\otimes_2$, $-\otimes_1$, $\otimes_1\times\otimes_2$.

解　1) 由式(5)可求出$\otimes_1,\otimes_2$的核分别为

$$\hat{\otimes}_1=\frac{b_1^2+b_1d_1+d_1^2-a_1^2-a_1c_1-c_1^2}{3(b_1-a_1+d_1-c_1)}=9.2.$$

其中: $a_1=-2, b_1=20, c_1=1, d_1=1$.

$$\hat{\otimes}_2=\frac{b_1^2+b_1d_1+d_1^2-a_1^2-a_1c_1-c_1^2}{3(b_1-a_1+d_1-c_1)}=20.5.$$

其中: $a_1=16, b_1=25, c_1=19, d_1=22$.

由式(6)可求出$\otimes_1$、$\otimes_2$的灰度分别为

$$g^o(\otimes_1)=\frac{b_1-a_1+d_1-c_1}{2(b-a)}=\frac{13}{24},$$
$$g^o(\otimes_2)=\frac{b_1-a_1+d_1-c_1}{2(b-a)}=\frac{1}{6}.$$

2) 由式(3)、(4)分别求出$\otimes_1\bigcup\otimes_2$的核与灰度为

$$(\widehat{\otimes_1\bigcup\otimes_2})=\frac{1}{2}(\hat{\otimes}_1+\hat{\otimes}_2)=$$
$$\frac{1}{2}(9.2+20.5)=14.85,$$
$$g^o(\otimes_1\bigcup\otimes_2)=$$
$$\frac{1}{(\widehat{\otimes_1\bigcup\otimes_2})}[\hat{\otimes}_1g^o(\otimes_1)+\hat{\otimes}_2g^o(\otimes_2)]=0.57.$$

3) 因为

$$\hat{\otimes}_1+\hat{\otimes}_2=9.2+20.5=29.7,$$
$$\omega_1g^o(\otimes_1)+\omega_2g^o(\otimes_2)=0.28.$$

由法则1可得

$$\otimes_1+\otimes_2=\hat{\otimes}_{1(g_1^o)}+\hat{\otimes}_{2(g_2^o)}=(29.7)_{(0.28)}.$$

因为

$$(\widehat{-\otimes_1})=-\hat{\otimes}_1=-9.2.$$

由法则2可得

$$-\otimes_1=(-9.2)_{(\frac{13}{24})}.$$

因为

$$\hat{\otimes}_1\times\hat{\otimes}_2=9.2\times20.5=188.6,$$
$$g^o(\otimes_1)\bigvee g^o(\otimes_2)=\frac{13}{24}.$$

由法则4可得

$$\otimes_1\times\otimes_2=\hat{\otimes}_{1(g_1^o)}\times\hat{\otimes}_{2(g_2^o)}=(188.6)_{(\frac{13}{24})}.$$

5　结　论

本文对取值分布信息已知情形下的区间灰数的核与灰度进行了初步探讨,给出了区间灰数的核与灰度的构造定义. 在此基础上,提出了区间灰数间并的核与灰度,对其相关性质进行了分析,并给出了区间灰数的运算法则. 最后,讨论了当区间灰数具有典型白化权函数时的核与灰度,并进行了实例验证,表明

了所提出方法的有效性和可行性. 目前已有的核与灰度只适用于区间灰数取值分布信息未知的情形,即白化权函数未知;当白化权函数已知时,已有的研究不再适用,本文方法正是为了解决这一类问题而提出的. 下一步的工作将着重解决白化权函数已知情形下的区间灰数与其核、灰度之间的相互转化问题,这将是建立基于白化权函数已知的区间灰数的核与灰度的灰色预测模型的重点和难点.

参考文献(References)

[1] 邓聚龙. 灰数学基础——灰色朦胧集[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 1992: 10-30.
(Deng J L. Mathematical foundation: Grey hazy set[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1992: 10-30.)

[2] 张歧山. 灰朦胧集的差异信息理论[M]. 北京: 石油工业出版社, 2004: 126-152.
(Zhang Q S. Differential information theory of grey hazy set[M]. Beijing: Petroleum Industry Press, 2004: 126-152.)

[3] 肖新平, 宋中民, 李峰. 灰技术基础及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 13-67.
(Xiao X P, Song Z M, Li F. The basis and application of grey technology[M]. Beijing: Science Press, 2004: 13-67.)

[4] 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统及其应用[M]. 第6版. 北京: 科学出版社, 2010: 1-28.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G, et al. Grey system and its application[M]. 6th ed. Beijing: Science Press, 2010: 1-28.)

[5] 方志耕, 刘思峰, 陆芳. 区间灰数表征与算法改进及其GM(1, 1)模型应用研究[J]. 中国工程科学, 2005, 7(2): 57-61.
(Fang Z G, Liu S F, Lu F. Study on improvement of taken and arithmetic of interval grey numbers and its GM(1, 1) model[J]. Engineering Science, 2005, 7(2): 57-61.)

[6] 刘思峰, 方志耕, 谢乃明. 基于核和灰度的区间灰数运算法则[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(2): 313-316.
(Liu S F, Fang Z G, Xie N M. Algorithm rules of interval grey numbers based on the “Kernel” and the degree of greyness of grey numbers[J]. System Engineering and Electronics, 2010, 32(2): 313-316.)

[7] Liu S F, Fang Z G, Yang Y J, et al. General grey numbers and their operations[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2012, 2(3): 341-349.

[8] 王大鹏, 汪秉文, 李睿凡. 考虑合成灰数灰度性质的改进区间灰数预测模型[J]. 系统工程与电子技术, 2013, 35(5): 1013-1017.
(Wang D P, Wang B W, Li R F. Improved prediction model of interval grey number based on the characteristics of grey degree of compound grey number[J]. System Engineering and Electronics, 2013, 35(5): 1013-1017.)

[9] 曾梅兰, 高明美. 基于核与灰度的区间灰数运算法则的修正[J]. 计算机工程与应用, 2015, 51(23): 28-30.
(Zeng M L, Gao M M. Modification of algorithm rules of grey numbers based on kernel and degree of greyness of grey numbers[J]. Computer Engineering and Applications, 2015, 51(23): 28-30.)

[10] 袁潮清, 刘思峰. 一种基于灰色白化权函数的灰数灰度[J]. 江南大学学报: 自然科学版, 2007, 6(4): 494-496.
(Yuan C Q, Liu S F. A grey degree based on grey whitening weight function[J]. J of Jiangnan University: Natural Science Edition, 2007, 6(4): 494-496.)

[11] Yang Y, John R, Liu S F. Some extended operations of grey sets[J]. Kybernetes-Uncertain Systems: Models, Methods and Applications, 2012, 41(7/8): 860-873.

[12] Wang Z X. Correlation analysis of sequences with interval grey numbers based on the kernel and greyness degree[J]. Kybernetes, 2013, 42(2): 309-317.

（责任编辑：郑晓蕾）