

基于非二次Lyapunov函数的不确定模糊系统鲁棒 H_∞ 控制

陈 珺[†], 贺铁清, 刘 飞

(江南大学 轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122)

摘 要: 研究一类具有参数不确定的 T-S 模糊系统鲁棒镇定和鲁棒 H_∞ 控制问题. 基于一种非二次 Lyapunov 函数和非并行分布补偿 (non-PDC) 控制律, 给出以线性矩阵不等式 (LMI) 形式表示的闭环系统鲁棒镇定的充分条件及相应的鲁棒 H_∞ 控制器设计方法. 与采用多个二次 Lyapunov 函数的模糊混合方法不同, 在所提出的方法中, 隶属函数对时间导数无需附加额外的要求. 此外, 对具有输入约束的 H_∞ 控制器设计问题进行探讨, 并通过一个数值仿真实验验证所提出方法的有效性.

关键词: T-S 模糊系统; 非二次 Lyapunov 函数; 鲁棒 H_∞ 控制; 输入约束; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A

Robust H_∞ control for uncertain fuzzy systems based on non-quadratic Lyapunov function

CHEN Jun[†], HE Tie-qing, LIU Fei

(Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry of Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: The problems of robust stabilization and robust H_∞ control are discussed for a class of T-S fuzzy systems with parametric uncertainties. Based on a non-quadratic Lyapunov function and nonparallel distributed compensation (non-PDC) control laws, the sufficient condition of robust stabilization of a closed-loop system is derived in terms of linear matrix inequalities (LMIs), and a design procedure for the responding robust H_∞ controller is also provided. Unlike previous approaches using a fuzzy blending of multiple quadratic Lyapunov functions, the time-derivatives of the membership functions can be derived without imposing additional requirements in the proposed approach. Moreover, the problem of H_∞ controller design with input constraint is also discussed. Finally, a numerical example is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: T-S fuzzy systems; non-quadratic Lyapunov function; robust H_∞ control; input constraint; linear matrix inequality

0 引 言

自 1985 年 Takagi 等^[1] 提出 T-S 模糊模型以来, 基于该模型的方法便被广泛应用到研究非线性系统稳定性分析和控制综合中. 对于系统建模, T-S 模糊模型提供了一个有效的和系统的架构, 将非线性系统代替为一组线性子系统的平均加权总和. 一般来说, T-S 模糊系统的稳定和镇定分析常用的方法就是找到一个满足一组稳定充分条件的普通二次 Lyapunov 函数^[2], 这些条件通常以线性矩阵不等式 (LMI) 的形式给出, 因此可以简单地使用凸优化技术解决. 但普通的二次 Lyapunov 函数存在一定的保守性, 为了克服这个问题, Tanaka 等^[3] 提出了一种模糊

Lyapunov 方法, 此后, 模糊 Lyapunov 方法便引起了学者们的广泛研究. 文献 [4] 基于模糊 Lyapunov 函数提出了一种广义系统方法; 文献 [5] 基于模糊 Lyapunov 函数, 通过引入松弛矩阵, 获得了以 LMI 描述的稳定和镇定条件, 该方法减少了 LMI 的数量, 并确保了额外的自由度; 文献 [6] 采用非并行分布补偿 (non-PDC) 控制律方法获得了更松弛的镇定条件, 并对系统的 H_∞ 控制器设计问题进行了研究, 验证了 non-PDC 控制律的有效性; 文献 [7-9] 通过深入研究归一化权重函数对时间导数的特性, 获得了新的降低连续模糊系统稳定条件保守性方法. 然而, 文献 [3-9] 采用的模糊 Lyapunov 方法在进行稳定性分析和控制器设

收稿日期: 2016-09-28; 修回日期: 2017-01-13.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61403167).

作者简介: 陈珺 (1980—), 女, 副教授, 博士, 从事模糊控制理论及工业过程应用等研究; 贺铁清 (1993—), 男, 硕士生, 从事模糊控制理论及应用的研究.

[†]通讯作者. E-mail: chenjun1860@126.com

计时,都必须考虑隶属函数对时间导数的上界问题,而实际中很难去估计这个上界,因此也具有一定的保守性.近年来,Jaadari等^[10]使用 non-PDC 控制律和 Finsle's 引理,设计了一个局部 H_∞ 控制器,提出了一种处理隶属函数对时间导数的方法; Márquez 等^[11]构造了一种新的非二次 Lyapunov 函数,进一步研究了连续系统的镇定和 H_∞ 控制器设计问题,所提出的方法对隶属函数时间导数无需附加额外的要求.

上述系统都没有考虑参数不确定性,当 T-S 模糊系统考虑参数不确定性时,系统的鲁棒镇定和 H_∞ 控制问题在一些文献中都进行了探讨^[12-18].其中,文献[12-13]基于普通 Lyapunov 函数分别对连续模糊系统的镇定及鲁棒和非脆弱 H_∞ 控制问题进行了研究;文献[14-15]基于模糊 Lyapunov 方法获得了更宽松的鲁棒镇定条件,所提出的方法同样需要考虑隶属函数时间导数上界问题;文献[16-17]基于模糊 Lyapunov 函数研究了不确定离散模糊系统的鲁棒 H_∞ 控制问题.然而,对不确定连续模糊系统鲁棒 H_∞ 控制问题的研究相对较少^[18].

针对上述原因,本文基于文献[11]提出非二次 Lyapunov 函数方法,对具有参数不确定的连续 T-S 模糊系统进行研究.采用 non-PDC 控制律得到以 LMI 形式表示的鲁棒镇定条件及相应的 H_∞ 控制器设计方法;探讨具有输入约束的 H_∞ 控制器设计问题,并通过一个数值仿真实验验证所提出方法的有效性.

1 问题描述及准备工作

考虑一类由 T-S 模糊模型描述的不确定连续非线性系统

Plant Rule i : If $z_1(t)$ is M_{i1} and \dots and $z_p(t)$ is M_{ip} ;
Then

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t) + \\ &\quad (E_i + \Delta E_i)w(t), \\ y(t) &= (C_i + \Delta C_i)x(t) + (D_i + \Delta D_i)u(t) + \\ &\quad (G_i + \Delta G_i)w(t). \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in R^n$ 为系统的状态向量; $u(t) \in R^m$ 为系统的控制输入; $w(t) \in R^s$ 为外界干扰输入; $y(t) \in R^l$ 为系统的输出; $z(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_p(t)]^T$ 为模糊前件变量; M_{ij} 为模糊集合, $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, r 为模糊推理规则数; $A_i, B_i, E_i, C_i, D_i, G_i$ 为具有适当维数的已知常数矩阵; $\Delta A_i, \Delta B_i, \Delta E_i, \Delta C_i, \Delta D_i, \Delta G_i$ 为具有适当维数的不确定时变矩阵,反映了系统模型中的参数不确定性.假定所考虑的参数不确定性是范数有界的,且具有以下形式^[13]:

$$\begin{bmatrix} \Delta A_i & \Delta B_i & \Delta E_i \\ \Delta C_i & \Delta D_i & \Delta G_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1i} \\ H_{2i} \end{bmatrix} \Delta [E_{1i} \ E_{2i} \ E_{3i}]. \quad (2)$$

其中

$$\Delta = [I - FJ]^{-1}F, \quad I - JJ^T > 0; \quad (3)$$

$H_{1i}, H_{2i}, E_{1i}, E_{2i}, E_{3i}$ 和 J 为合适维数的已知实常数矩阵; F 为不确定矩阵,满足 $FF^T < I$.

给定输入对 $(x(t), u(t))$, 采用单点模糊化,乘积推理以及平均加权反模糊化,可得如下全局不确定模糊系统的状态方程:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))((A_i + \Delta A_i)x(t) + \\ &\quad (B_i + \Delta B_i)u(t) + (E_i + \Delta E_i)w(t)) = \\ &\quad (A_h + \Delta A_h)x(t) + (B_h + \Delta B_h)u(t) + \\ &\quad (E_h + \Delta E_h)w(t), \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))((C_i + \Delta C_i)x(t) + \\ &\quad (D_i + \Delta D_i)u(t) + (G_i + \Delta G_i)w(t)) = \\ &\quad (C_h + \Delta C_h)x(t) + (D_h + \Delta D_h)u(t) + \\ &\quad (G_h + \Delta G_h)w(t). \end{aligned} \quad (4)$$

其中: $h_i(z(t))$ 为第 i 条模糊规则的隶属度函数,满足

$$h_i(z(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \quad \sum_{i=1}^r \dot{h}_i(z(t)) = 0. \quad (5)$$

为了简化叙述,单层和双层嵌套和分别记为 \mathcal{Y}_h
 $= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\mathcal{Y}_i, \mathcal{Y}_{hh} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\mathcal{Y}_{ij}$,

凸和的逆记为 $\mathcal{Y}_h^{-1} = \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t))\mathcal{Y}_i \right)^{-1}$, 凸和时间

导数记为 $\dot{\mathcal{Y}}_h = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t))\mathcal{Y}_i \right)$, 带时滞 α 的单层

和记为 $\mathcal{Y}_{h-} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t-\alpha))\mathcal{Y}_i$.

本文研究的目标为:在 $w(t) = 0$ 的情况下,设计一个控制律,使得不确定模糊系统(4)对所有容许的参数不确定性(2)鲁棒渐近稳定;另外,在零初始条件下,对于任意非零向量 $w(t) \in L_2[0, \infty)$, 不确定模糊系统(4)满足如下 H_∞ 性能指标:

$$\sup_{\|w(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|y(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \leq \gamma. \quad (6)$$

其中: $\|\cdot\|_2$ 为 L_2 范数, $\gamma > 0$.

在给出主要结果之前,先介绍以下特性和引理. 其中,星号(*)在内联表达式中表示其左边部分的转置项,在对称矩阵中表示对应块的转置矩阵.

特性 1^[11] 对于适当维数矩阵 A, R, L, P 和 Q , 以下不等式等价:

$$A^T P + PA + Q < 0, \tag{7}$$

$$\exists R, L : \begin{bmatrix} A^T L^T + LA + Q & P - L + A^T R \\ P - L^T + R^T A & -R - R^T \end{bmatrix} < 0. \tag{8}$$

引理 1^[11] 对于 $h_i^- = h_i(z(t - \alpha))$ 以及适当维数矩阵 Υ_{ij}^{kl} , 如果对于 $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, r\}$, 有

$$\Upsilon_{ii}^{kl} < 0, \frac{2}{r-1} \Upsilon_{ii}^{kl} + \Upsilon_{ij}^{kl} + \Upsilon_{ji}^{kl} < 0, i \neq j \tag{9}$$

成立, 则 $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r h_i h_j h_k^- v_i \Upsilon_{ij}^{kl} < 0$.

引理 2^[13] 给定合适维数矩阵 $Q = Q^T, H$ 和 E , 如果存在一个正参数 ε , 使得

$$\begin{bmatrix} Q & (*) & (*) \\ \varepsilon H^T & -\varepsilon I & (*) \\ E & \varepsilon J & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0, \tag{10}$$

则 $Q + H \Delta E + E^T \Delta^T H^T < 0$ 对于任意 Δ 满足 $\Delta = [I - FJ]^{-1} F, I - JJ^T > 0$ 成立. 其中: J 为一个已知实数矩阵; F 为一个不确定矩阵, 满足 $FF^T < I$.

2 主要结果

考虑如下候选非二次 Lyapunov 函数^[11]:

$$V(x) = x^T P_v^{-1} x = x^T \left(\sum_{i=1}^r v_i(z(t)) P_i \right)^{-1} x. \tag{11}$$

其中: $P_i = P_i^T > 0$, 且有

$$v_i(z(t)) = \frac{1}{\alpha} \int_{t-\alpha}^t h_i(z(\tau)) d\tau \geq 0, \alpha > 0. \tag{12}$$

隶属函数 $v_i(\cdot)$ (即 $i \in \{1, 2, \dots, r\}$) 满足模型隶属函数 $h_i(\cdot)$ 的凸和特性, 即

$$\sum_{i=1}^r v_i(z(t)) = \frac{1}{\alpha} \int_{t-\alpha}^t \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(\tau)) \right) d\tau = 1. \tag{13}$$

对 $v_i(\cdot)$ 求时间的导数, 可得

$$\dot{v}_i(z(t)) = \frac{1}{\alpha} (h_i(z(t)) - h_i(z(t - \alpha))). \tag{14}$$

因此

$$\dot{P}_v = \frac{1}{\alpha} (P_h - P_{h^-}), h_i^- = h_i(z(t - \alpha)). \tag{15}$$

引入 Lyapunov 函数 α -时滞的 non-PDC 控制律, 可得

$$u(t) = F_{hh^-v} P_v^{-1} x(t). \tag{16}$$

其中: $F_{hh^-v} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_k h_i h_j^- v_k F_{ijk}, F_{ijk} \in R^{m \times n}$,

$P_v = \sum_{k=1}^r v_k P_k, P_k \in R^{n \times n}, i, j, k \in \{1, 2, \dots, r\}$, 为与控制器增益相关的合适维数矩阵.

忽略扰动, 即 $w(t) = 0$, 将控制律 (16) 代入式 (4), 可得闭环系统的 T-S 模型

$$\dot{x} = ((A_h + \Delta A_h) + (B_h + \Delta B_h) F_{hh^-v} P_v^{-1}) x. \tag{17}$$

定理 1 如果存在一个标量 $\alpha > 0$, 矩阵 $P_i = P_i^T > 0, F_{jkl}, H_{jkl}, R_{jkl}, i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, r\}$, 及正参数 ε 满足线性矩阵不等式约束 (9), 则 T-S 模型 (17) 在控制律 (16) 下鲁棒渐近稳定, 其中

$$\Upsilon_{ij}^{kl} = \begin{bmatrix} \theta_{ij}^{kl} & (*) & (*) & (*) \\ \vartheta_{ij}^{kl} & -R_{jkl} - R_{jkl}^T & (*) & (*) \\ \varepsilon H_{1i}^T & 0 & -\varepsilon I & (*) \\ \delta_{ij}^{kl} & 0 & \varepsilon J & -\varepsilon I \end{bmatrix}, \tag{18}$$

$$\theta_{ij}^{kl} = A_i H_{jkl} + B_i F_{jkl} + (*) - \frac{1}{\alpha} (P_j - P_k),$$

$$\vartheta_{ij}^{kl} = P_l - H_{jkl} + R_{jkl}^T A_i^T,$$

$$\delta_{ij}^{kl} = E_{1i} P_l + E_{2i} F_{jkl}.$$

证明 对候选非二次 Lyapunov 函数 (11) 求时间的导数, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P_v^{-1} x + x^T P_v^{-1} \dot{x} + x^T \dot{P}_v^{-1} x = \\ & x^T [P_v^{-1} (A_h + B_h F_{hh^-v} P_v^{-1} + \\ & \Delta A_h + \Delta B_h F_{hh^-v} P_v^{-1}) + (*) + \dot{P}_v^{-1}] x. \end{aligned}$$

如果满足

$$\begin{aligned} & P_v^{-1} (A_h + B_h F_{hh^-v} P_v^{-1} + \\ & \Delta A_h + \Delta B_h F_{hh^-v} P_v^{-1}) + (*) + \dot{P}_v^{-1} < 0, \tag{19} \end{aligned}$$

则 $\dot{V}(x) < 0$ 成立. 对式 (19) 两边同乘 P_v , 并考虑 $-\dot{P}_v = \frac{d}{dt} (P_v P_v^{-1}) P_v - \dot{P}_v^{-1} = P_v \dot{P}_v^{-1} P_v$, 可得

$$\begin{aligned} & A_h P_v + B_h F_{hh^-v} + (*) - \dot{P}_v + (\Delta A_h P_v + \\ & \Delta B_h F_{hh^-v}) + (\Delta A_h P_v + \Delta B_h F_{hh^-v})^T < 0. \tag{20} \end{aligned}$$

根据假设 (2), 可将式 (20) 转化为

$$\begin{aligned} & A_h P_v + B_h F_{hh^-v} + (*) - \dot{P}_v + H_{1i} \Delta [E_{1i} P_v + \\ & E_{2i} F_{hh^-v}] + [E_{1i} P_v + E_{2i} F_{hh^-v}]^T \Delta^T H_{1i}^T < 0. \end{aligned}$$

由引理 2 易知, 存在一个正参数 ε , 使得

$$\begin{bmatrix} A_h P_v + B_h F_{hh^-v} + (*) - \dot{P}_v & (*) & (*) \\ \varepsilon H_{1i}^T & -\varepsilon I & (*) \\ E_{1i} P_v + E_{2i} F_{hh^-v} & \varepsilon J & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0. \tag{21}$$

对式 (21) 分块 (1,1) 利用特性 1 且令 $A = A_h^T, L = H_{hh^-v}^T, R = R_{hh^-v}, Q = B_h F_{hh^-v} + (*) - \dot{P}_v$ 及 \dot{P}_v

$= \frac{1}{\alpha}(P_h - P_{h-})$ 可得

$$\begin{bmatrix} \theta_h & (*) & (*) & (*) \\ \vartheta_h & -R_{hh-v} - R_{hh-v}^T & (*) & (*) \\ \varepsilon H_{1i}^T & 0 & -\varepsilon I & (*) \\ \delta_h & 0 & \varepsilon J & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0. \quad (22)$$

其中

$$\theta_h = A_h H_{hh-v} + B_h F_{hh-v} + (*) - \frac{1}{\alpha}(P_h - P_{h-}),$$

$$\vartheta_h = P_v - H_{hh-v} + R_{hh-v}^T A_h^T,$$

$$\delta_h = E_{1i} P_v + E_{2i} F_{hh-v}.$$

条件(9)与式(18)中定义的 Υ_{ij}^{kl} 可确保式(22)成立. \square

注1 定理1中 $F_{hh-v} = F_h$ 将会导致决策变量明显减少,但依然保留了所提出方法的优点.

下面将考虑 $w(t) \neq 0$ 的情况,在 non-PDC 控制律(16)下找到一组 LMIs 条件,确保不确定模糊系统(4)鲁棒渐近稳定并满足 H_∞ 性能指标(6),如文献[11]所示,如果存在一个候选 Lyapunov 函数 $V(x(t))$,满足

$$\dot{V}(x(t)) + \gamma^{-1} y^T(t)y(t) - \gamma w^T(t)w(t) \leq 0, \quad (23)$$

则条件(6)成立.

定理2 给定常数 $\gamma > 0$,如果存在一个标量 $\alpha > 0$,矩阵 $P_i = P_i^T > 0, F_{jkl}, H_{jkl}, R_{jkl}, i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, r\}$,及正参数 ε 满足线性矩阵不等式约束(9),则不确定模糊系统(4)在控制律(16)下鲁棒渐近稳定并满足 H_∞ 性能指标(6),其中

$$\Upsilon_{ij}^{kl} = \begin{bmatrix} \theta_{ij}^{kl} & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ \vartheta_{ij}^{kl} & -R_{jkl} - R_{jkl}^T & (*) & (*) & (*) & (*) \\ E_i^T & 0 & -\gamma I & (*) & (*) & (*) \\ \varphi_{ij}^{kl} & 0 & G_i & -\gamma I & (*) & (*) \\ \varepsilon H_{1i}^T & 0 & \varepsilon H_{2i}^T & 0 & -\varepsilon I & 0 \\ \delta_{ij}^{kl} & 0 & E_{3i} & 0 & \varepsilon J & -\varepsilon I \end{bmatrix}, \quad (24)$$

其中: $\varphi_{ij}^{kl} = C_i P_l + D_i F_{jkl}; \theta_{ij}^{kl}, \vartheta_{ij}^{kl}, \delta_{ij}^{kl}$ 见定理1.

证明 考虑非二次 Lyapunov 函数(11)和闭环模糊系统(4),条件(23)可写为

$$\begin{aligned} & \dot{V} + \gamma^{-1} y^T y - \gamma w^T w = \\ & x^T P_v^{-1} ((A_h + B_h F_{hh-v} P_v^{-1} + \\ & \Delta A_h + \Delta B_h F_{hh-v} P_v^{-1})x + (E_h + \Delta E_h)w) + \\ & (*) + x^T \dot{P}_v^{-1} x - \gamma w^T w + \\ & \gamma^{-1} (((C_h + \Delta C_h) + (D_h + \Delta D_h)F_{hh-v} P_v^{-1})x + \\ & (G_h + \Delta G_h)w)^T (((C_h + \Delta C_h) + \\ & (D_h + \Delta D_h)F_{hh-v} P_v^{-1})x + (G_h + \Delta G_h)w) = \end{aligned}$$

$$\xi^T \Xi \xi \leq 0.$$

其中

$$\Xi = \Phi + \gamma^{-1} \begin{bmatrix} \nu^T \\ (G_h + \Delta G_h)^T \end{bmatrix} [\nu \ G_h + \Delta G_h],$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi & (*) \\ (E_h + \Delta E_h)^T P_v^{-1} & -\gamma I \end{bmatrix}, \quad \xi^T = [x^T \ w^T]^T,$$

$$\nu = (C_h + \Delta C_h) + (D_h + \Delta D_h)F_{hh-v} P_v^{-1},$$

$$\phi = P_v^{-1} (A_h + B_h F_{hh-v} P_v^{-1} +$$

$$\Delta A_h + \Delta B_h F_{hh-v} P_v^{-1}) + (*) + \dot{P}_v^{-1}.$$

由此可知, Ξ 小于零,应用矩阵的 Schur 补性质可得

$$\begin{bmatrix} \phi & (*) & (*) \\ (E_h + \Delta E_h)^T P_v^{-1} & -\gamma I & (*) \\ \nu & G_h + \Delta G_h & -\gamma I \end{bmatrix} < 0.$$

对上式左右两边同乘 $\text{diag}(P_v, I, I)$,并考虑假设(2)和 $P_v \dot{P}_v^{-1} P_v = -\dot{P}_v$,有

$$\begin{bmatrix} (A_h P_v + B_h F_{hh-v}) + (*) - \dot{P}_v & (*) & (*) \\ E_h^T & -\gamma I & (*) \\ C_h P_v + D_h F_{hh-v} & G_h & -\gamma I \end{bmatrix} +$$

$$H \Delta E + E^T \Delta^T H^T < 0.$$

其中

$$H = [H_{1i}^T \ 0 \ H_{2i}^T]^T,$$

$$E = [E_{1i} P_v + E_{2i} F_{hh-v} \ E_{3i} \ 0].$$

由引理2易知,存在一个正参数 ε ,使得

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta}_h & (*) & (*) & (*) & (*) \\ E_h^T & -\gamma I & (*) & (*) & (*) \\ \varphi_h & G_h & -\gamma I & (*) & (*) \\ \varepsilon H_{1i}^T & 0 & \varepsilon H_{2i}^T & -\varepsilon I & (*) \\ \delta_h & E_{3i} & 0 & \varepsilon J & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0,$$

$$\tilde{\theta}_h = (A_h P_v + B_h F_{hh-v}) + (*) - \dot{P}_v,$$

$$\varphi_h = C_h P_v + D_h F_{hh-v}.$$

对上式分块(1,1)利用式(21)分块(1,1)作相同处理,可得

$$\begin{bmatrix} \theta_h & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ \vartheta_h & -R_{hh-v} - R_{hh-v}^T & (*) & (*) & (*) & (*) \\ E_h^T & 0 & -\gamma I & (*) & (*) & (*) \\ \varphi_h & 0 & G_h & -\gamma I & (*) & (*) \\ \varepsilon H_{1i}^T & 0 & \varepsilon H_{2i}^T & 0 & -\varepsilon I & (*) \\ \delta_h & 0 & E_{3i} & 0 & \varepsilon J & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0,$$

其中 $\theta_h, \vartheta_h, \delta_h$ 见式(22).

条件(9)和式(24)中定义的 Υ_{ij}^{kl} 可确保上式成

立. \square

推论 1 对于不确定模糊系统 (4) 和性能指标 (6), 如果以下优化问题:

$$\begin{cases} \min & \gamma, \\ \text{s.t.} & \text{LMIs(9)\&(24)}, \end{cases}$$

有解 $\alpha, \varepsilon, P_i, F_{jkl}, H_{jkl}$ 和 $R_{jkl}, i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, r\}$, 则可得到系统 (4) 在控制律 (16) 下最小能达到的干扰抑制水平 γ_{\min} .

由于在实际控制系统中, 对控制输入的幅值大小都会有一定的限制要求, 引入控制输入约束条件, 即

$$\max\{\|u(t)\|\} \leq u_{\max}, \quad (25)$$

其中 u_{\max} 为给定的控制输入幅值的最大上限. 根据式 (11) 中构造的非二次 Lyapunov 函数, 定义一个椭圆集合

$$\Omega = \{x(t) | x^T(t)P_v^{-1}x(t) \leq 1\}. \quad (26)$$

以下基于定理 2 采用线性矩阵不等式技术, 给出输入受限 H_∞ 控制器的设计方法.

定理 3 假定系统初始状态 x_0 已知, 对于给定的控制输入幅值上限 u_{\max} 和 H_∞ 性能指标 γ , 若存在一个标量 $\alpha > 0$, 矩阵 $P_i = P_i^T > 0, F_{jkl}, H_{jkl}, R_{jkl}, i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, r\}$, 及正参数 ε 满足线性矩阵不等式约束 (9) 和式 (24) 中定义的 Υ_{ij}^{kl} , 以及矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0^T \\ x_0 & P_l \end{bmatrix} \geq 0, \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} P_l & F_{ijk}^T \\ F_{ijk} & u_{\max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (28)$$

则不确定模糊系统 (4) 鲁棒渐近稳定且存在输入受限 H_∞ 控制器.

证明 因为候选非二次 Lyapunov 函数 (11) 已经被证明是单调减小的正函数, 故有

$$V(x(t)) < V(x(0)) = x_0^T P_v^{-1} x_0 \leq 1. \quad (29)$$

对式 (29) 进行移项处理, 然后利用矩阵的 Schur 补性质可以得到式 (27) 成立.

由式 (16) 可将条件 $\max\{\|u(t)\|\} \leq u_{\max}$ 写成如下形式:

$$u^T(t)u(t) = x^T(t)P_v^{-T}F_{hh-v}^T F_{hh-v}P_v^{-1}x(t) \leq$$

$$u_{\max}^2 \Leftrightarrow \frac{1}{u_{\max}^2}x^T(t)P_v^{-T}F_{hh-v}^T F_{hh-v}P_v^{-1}x(t) \leq 1.$$

由式 (26) 可知, 该不等式成立, 如果

$$\frac{1}{u_{\max}^2}x^T(t)P_v^{-T}F_{hh-v}^T F_{hh-v}P_v^{-1}x(t) \leq$$

$$x^T(t)P_v^{-1}x(t) = V(x(t)),$$

则该条件等价于

$$x^T(t) \left[\frac{1}{u_{\max}^2} P_v^{-T} F_{hh-v}^T F_{hh-v} P_v^{-1} - P_v^{-1} \right] x(t) \leq 0. \quad (30)$$

对式 (30) 左边乘以 P_v^T , 右边乘以 P_v , 可得

$$P_v - \frac{1}{u_{\max}^2} F_{hh-v}^T F_{hh-v} \geq 0.$$

再次利用矩阵的 Schur 补性质可得式 (28). \square

3 仿真示例

考虑如下混沌 Lorenz 系统的不确定模糊 T-S 模型^[13]:

模糊系统规则 1: 如果 $x_1(t)$ 大约是 M_1 , 则

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (A_1 + H_{11}\Delta E_{11})x(t) + (B_1 + \\ & H_{11}\Delta E_{21})u(t) + (E_1 + H_{11}\Delta E_{31})w(t), \\ y(t) = & (C_1 + H_{21}\Delta E_{11})x(t) + (D_1 + \\ & H_{21}\Delta E_{21})u(t) + (G_1 + H_{21}\Delta E_{31})w(t); \end{aligned}$$

模糊系统规则 2: 如果 $x_1(t)$ 大约是 M_2 , 则

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (A_2 + H_{12}\Delta E_{12})x(t) + (B_2 + \\ & H_{12}\Delta E_{22})u(t) + (E_2 + H_{12}\Delta E_{32})w(t), \\ y(t) = & (C_2 + H_{22}\Delta E_{12})x(t) + (D_2 + \\ & H_{22}\Delta E_{22})u(t) + (G_2 + H_{22}\Delta E_{32})w(t). \end{aligned}$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \eta & -1 & -M_1 \\ 0 & M_1 & -b \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \eta & -1 & -M_2 \\ 0 & M_2 & -b \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [-0.1 \quad -0.1 \quad 0.3], \quad D_1 = D_2 = 0.5,$$

$$C_2 = [-0.09 \quad -0.05 \quad -0.03], \quad G_1 = 0.5, \quad G_2 = -0.5,$$

$$H_{11} = H_{12} = \begin{bmatrix} -0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$H_{21} = H_{22} = [0 \quad 0 \quad 0], \quad E_{11} = E_{12} = \begin{bmatrix} \sigma & -\sigma & 0 \\ \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix},$$

$$E_{21} = E_{22} = E_{31} = E_{32} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

模糊隶属函数为

$$h_1 = \frac{-x_1(t) + M_2}{M_2 - M_1}, h_2 = \frac{x_1(t) - M_1}{M_2 - M_1}.$$

如文献[13]中所示,选择 $[M_1 \ M_2] = [-20 \ 30]$, (σ, η, b) 表示混沌的标称值,并取为 $(10, 28, 8/3)$. 假设系统的初始状态 $x(0) = [0.1 \ -0.1 \ 0.1]^T$, 开环系统的状态轨迹如图1所示,其描绘了该系统在未加控制输入作用时出现的混沌现象.

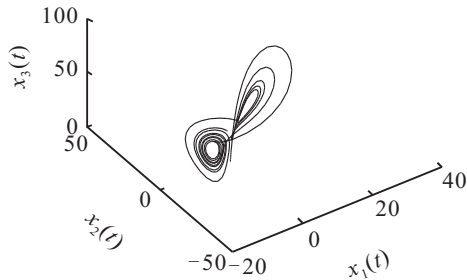


图1 开环系统的状态轨迹

在上述参数下,考虑 $F_{hh-v} = F_h$, 取 $\alpha = 0.5 \text{ s}$, 利用推论1对其进行仿真,得到的最小干扰抑制水平与文献[13]对比结果如表1所示.

表1 两种方法比较

方法	最小干扰抑制水平 γ_{\min}
普通 Lyapunov 函数 ^[13]	0.56285
本文推论1	0.53520

从表1可以看出,本文所提出的方法提高了系统的 H_∞ 性能.

同样考虑 $F_{hh-v} = F_h$, 取 $\alpha = 0.5 \text{ s}$, 选择性能水平 $\gamma = 0.65$, 利用定理2,通过 Matlab 线性矩阵不等式工具箱解 LMIs(9), 可得无控制条件约束下的一组可行解,即

$$F_1 = [-1.4572 \ -0.1484 \ -0.1635],$$

$$F_2 = [-0.9524 \ -0.1759 \ 0.1349],$$

$$\varepsilon = 1.8456,$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0054 & -0.0160 & 0.0026 \\ -0.0160 & 0.0563 & -0.0010 \\ 0.0026 & -0.0010 & 0.0519 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.0056 & -0.0166 & 0.0026 \\ -0.0166 & 0.0589 & -0.0011 \\ 0.0026 & -0.0011 & 0.0536 \end{bmatrix}.$$

现考虑加入控制约束(30)的情形. 假定系统初始 $x(0) = [0.1 \ -0.1 \ 0.1]^T$, 控制输入幅值上限 $u_{\max} = 5000$, 利用定理3可得存在系统输入约束时的一组可行解,即

$$F_1 = [-1.3875 \ -0.1767 \ -0.1586],$$

$$F_2 = [-0.9648 \ -0.1748 \ 0.1268],$$

$$\varepsilon = 1.6679,$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0127 & -0.0178 & 0.0032 \\ -0.0178 & 0.0557 & -0.0011 \\ 0.0032 & -0.0011 & 0.0500 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.0129 & -0.0184 & 0.0032 \\ -0.0184 & 0.0578 & -0.0012 \\ 0.0032 & -0.0012 & 0.0514 \end{bmatrix}.$$

为了说明控制动作的行为,令 $F = 0.5$, 选择干扰输入 $w(t) = \frac{1}{1+50t}, t > 0$. 闭环系统在时刻 $t = 5 \text{ s}$ 时加入控制作用 $u(t)$, 图2和图3分别为系统没有和加入控制输入约束的状态响应及控制输入曲线.

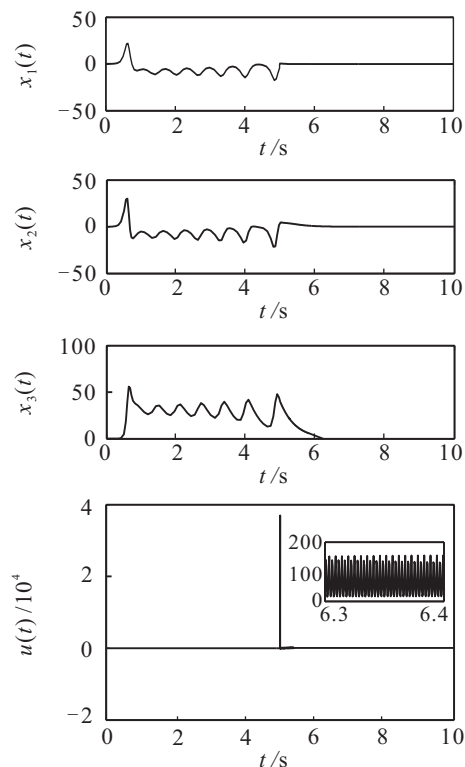


图2 没有控制约束的系统状态响应及控制输入曲线

从图2和图3中可以看出,5s以前没有控制作用时,系统呈现不规则的变化,即系统是不稳定的;当 $t = 5 \text{ s}$ 加入控制作用后,系统的状态响应很快地收敛于零点.

由控制输入曲线图可看出,考虑输入约束的 H_∞ 控制器与不考虑输入约束 H_∞ 控制器相比,控制幅值能很好地限制在所要求的范围之内,而且能很快地趋近于零点,并且没有出现小幅震荡的情况. 但总体而言,在满足指定的性能指标要求下,两者都具有很好的鲁棒性.

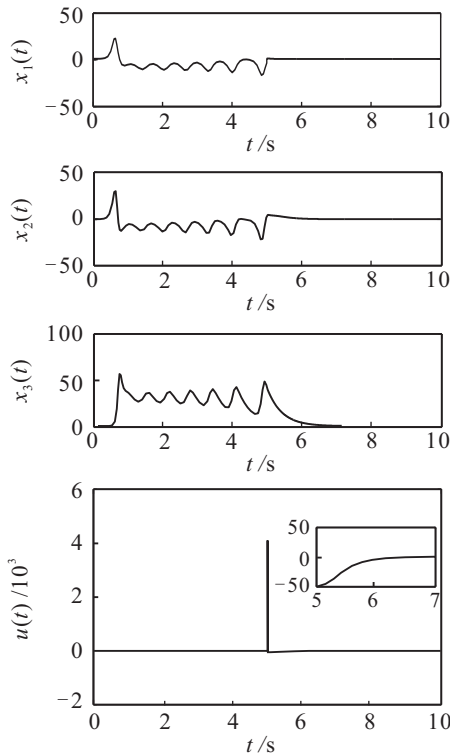


图3 加入控制约束的系统状态响应及控制输入曲线

4 结论

本文对一类具有参数不确定的连续T-S模糊系统进行了研究. 基于一种非二次Lyapunov函数方法和non-PDC控制结构对其进行了分析, 得到了以LMI描述的鲁棒渐近稳定条件及相应的 H_∞ 控制器设计方法. 该方法克服了隶属函数对时间求导数的困难, 具有很好的鲁棒性, 而且获得了较小的干扰抑制水平, 提高了系统的 H_∞ 性能. 此外, 对具有输入约束的 H_∞ 控制器设计问题进行了探讨, 给出了输入受限 H_∞ 控制器的设计方法. 数值仿真结果验证了所提出方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and Control[J]. IEEE Trans on Systems, Man & Cybernetics, 1985, 15(1): 387-403.
- [2] Fang C H, Liu Y S, Kau S W, et al. A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of T-S fuzzy control systems[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2006, 14(3): 386-397.
- [3] Tanaka K, Hori T, Wang H O. A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2003, 11(4): 582-589.
- [4] Tanaka K, Ohtake H, Wang H O. A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2007, 15(3): 333-341.
- [5] Mozelli L A, Palhares R M, Avellar G S C. A systematic

- approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems[J]. Information Sciences, 2009, 179(8): 1149-1162.
- [6] Chang X H, Yang G H. Relaxed stabilization conditions for continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy control systems[J]. Information Sciences, 2010, 180(17): 3273-3287.
- [7] Flávio A Faria, Geraldo N Silva, Vilma A Oliveira. Reducing the conservatism of LMI-based stabilisation conditions for T-S fuzzy systems using fuzzy Lyapunov functions[J]. Int J of Systems Science, 2013, 44(10): 1956-1969.
- [8] Xie X P, Liu Z W, Zhu X L. An efficient approach for reducing the conservatism of LMI-based stability conditions for continuous-time T-S fuzzy systems[J]. Fuzzy Sets & Systems, 2015, 263(15): 71-81.
- [9] Xie X P, Xie J, Hu S. Reducing the conservatism of stability conditions for continuous-time T-S fuzzy systems based on an extended approach[J]. Neurocomputing, 2016, 173(3): 1655-1659.
- [10] Jaadari A, Guerra T M, Sala A, et al. Finsler's relaxation for local H-infinity controller design of continuous-time Takagi-Sugeno models via non-quadratic Lyapunov functions[C]. Proc of the American Control Conf. Washington: IEEE Press, 2013: 5648-5653.
- [11] Márquez R, Guerra T M, Bernal M, et al. A non-quadratic Lyapunov functional for H_∞ control of nonlinear systems via takagi-sugeno models[J]. J of the Franklin Institute, 2016, 353(4): 781-796.
- [12] Chen Z, Liu B, Jing Y. Robust stabilization for T-S Fuzzy control systems with parametric uncertainties via LMI approach[C]. Chinese Control and Decision Conf. Yantai: IEEE, 2008: 3398-3402.
- [13] Zhang B, Zhou S, Li T. A new approach to robust and non-fragile H_∞ control for uncertain fuzzy systems[J]. Information Sciences, 2007, 177(22): 5118-5133.
- [14] Gong C Z, Zeng X W. A descriptor system approach to uncertain fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions[C]. Int Conf on Machine Learning and Cybernetics. Baoding: IEEE, 2009: 498-503.
- [15] Manai Y, Benrejeb M. New condition of stabilization of uncertain continuous takagi-sugeno fuzzy system based on fuzzy Lyapunov function[J]. Int J of Intelligent Systems Technologies & Applications, 2012, 4(4): 19-25.
- [16] Wang L K, Liu X D. Robust H_∞ fuzzy control for discrete-time nonlinear systems[J]. Int J of Control Automation & Systems, 2010, 8(1): 118-126.
- [17] Horng W R, Wang C C, Chen C Y, et al. Robust H_∞ fuzzy control for nonlinear discrete-time systems by nonquadratic Lyapunov function approach[C]. Int Control and Automation. Beijing: IEEE Press, 2012: 1710-1715.
- [18] Kchaou M, Hajjaji A E, Toumi A. Non-fragile H_∞ output feedback control design for continuous-time fuzzy systems[J]. Isa Transactions, 2015, 54: 3-14.