文章编号: 1001-0920(2017)12-2285-06　　DOI: 10.13195/j.kzyjc.2016.1270

离散随机Markov跳跃系统有限时间有界控制

周绍伟[1,2†]，陈　兵[1]

(1. 青岛大学 复杂性科学研究所，山东 青岛 266071；2. 山东科技大学 数学与系统科学学院，山东 青岛 266590)

摘　要: 研究一类带乘性噪声的离散时间随机Markov跳跃系统的有限时间控制问题. 首先,定义系统的有限时间稳定和有限时间有界,通过逐次迭代和条件期望给出系统有限时间稳定的充分必要条件;其次,针对含干扰的系统,利用Lyapunov方法和线性矩阵不等式技术得到系统有限时间有界的充分条件并设计状态反馈镇定控制器;然后,进一步考虑转移概率信息不完全下的有限时间有界问题;最后,通过数值例子验证了所提出方法的有效性.

关键词: Markov跳跃系统；有限时间控制；稳定性；转移概率

中图分类号: TP13　　**文献标志码:** A

Finite-time boundedness control of discrete stochastic Markov jumping systems

ZHOU Shao-wei[1,2†]，*CHEN Bing*[1]

(1. Institute of Complexity Science，Qingdao University，Qingdao 266071，China；2. College of Mathematics and Systems Science，Shandong University of Science and Technology，Qingdao 266590，China)

Abstract: The finite-time control of discrete-time stochastic Markov jumping systems with multiplicative noise is studied. Firstly, the definitions of finite-time stability and finite-time boundedness are given. The necessary and sufficient condition of finite-time stability is obtained by successive iteration and conditional expectation. Then, the sufficient condition and the state feedback controller design of the system with disturb are realized by using the Lyapunov method and linear matrix inequality technology. Furthermore, the finite-time boundedness is considered under the incomplete information of transition probability. Finally, the effectiveness of the introduced method is verified by a numerical example.

Keywords: Markov jumping systems；finite-time control；stability；transition probabilities

0　引　言

稳定性分析是各种控制系统设计和综合的基础. 关于稳定性有多种形式的定义:二阶矩稳定、δ阶矩稳定、几乎处处稳定、鲁棒稳定等等,这些关注的都是系统在无限时域内的渐近行为,刻画了系统的稳态性能,却无法反映其暂态性能. 事实上,稳定的暂态性能对某些实际系统更加重要,如汽车悬架系统[1]、存储式系统[1]、航天器姿态跟踪系统[2]等. 因此,有限时间稳定(FTS)的概念应运而生. FTS最早出现在20世纪50年代的俄文文献中[3],60年代西方杂志也发表了一些相关结果[4],这里人们关注的是系统的暂态稳定性,即在有限时间内系统状态满足给定要求. 近年来,以Amato为代表的一批学者对FTS的概念进行了发展. 例如,考虑到系统总是不可避免地受到外部干扰的影响,Amato等提出了有限时间有界(FTB)的概念[5]. 随后,又相继提出了输入-输出有限时间稳定[6]、鲁棒有限时间稳定[7]等. 另外,时变系统[8-9]、非线性系统[10-11]、Markov跳跃系统[12-17]、切换系统[18]、奇异系统[19-20]、随机Itô系统[21-23]、大系统[24]的有限时间稳定性问题也受到了人们的关注.

以上研究主要是关于连续时间系统的,针对离散时间系统,也得到了许多相关结果. Amato等在文献[25]中提出并研究了确定性离散时间线性系统的FTB问题,得到了FTB的充分条件,随后扩展到了离

收稿日期: 2016-10-10；**修回日期:** 2017-01-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61473160, 61503224)；山东省优秀中青年科学家科研奖励基金项目(BS2014SF005)；山东省博士后创新项目专项资金项目(201403009)；青岛市博士后应用研究项目；山东省高等学校优秀中青年骨干教师国际合作培养计划项目；山东科技大学科研创新团队支持计划项目(2015TDJH105).

作者简介: 周绍伟(1979−), 女, 副教授, 博士, 从事随机系统控制理论的研究；陈兵(1958−), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统、非线性系统等研究.

†通讯作者. E-mail: zsw9675@163.com

散时变系统[26],利用状态转移矩阵和差分Lyapunov不等式得到了FTS的充分必要条件;文献[27]考虑了离散时间时滞系统,通过建立一类新的Lyapunov泛函给出了系统FTS的充分条件.

另一方面,Markov跳跃系统在描述工业生产中的突变现象时有着无可比拟的优势,被广泛应用于许多实际系统[12-17,28]. 本文将考虑带乘性噪声的离散时间随机Markov跳跃系统,这类系统不仅存在跳变参数,而且含有与状态、控制、干扰相乘的噪声,更利于描述真实系统中的随机性和复杂性. 针对这类系统,研究其FTB和FTS问题. 对于跳跃系统而言,状态转移概率在很大程度上影响和决定着系统运行,通常假设它是完全已知的. 然而,在实际中要获得精确的转移概率是非常困难的. 基于此,将分为转移概率信息完全以及信息不完全两种情况进行研究.

1 系统描述

考虑如下的带乘性噪声的离散时间随机Markov跳跃系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = A(r_k)x(k) + C(r_k)x(k)w(k),\ k \in N_T; \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

它所对应的受控系统为

$$\begin{cases} x(k+1) = \\ A(r_k)x(k) + B(r_k)u(k) + \\ [C(r_k)x(k) + D(r_k)u(k)]w(k),\ k \in N_T; \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2}$$

如果考虑干扰,则系统变为

$$\begin{cases} x(k+1) = \\ A(r_k)x(k) + G(r_k)v(k) + \\ [C(r_k)x(k) + H(r_k)v(k)]w(k),\ k \in N_T; \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3}$$

对应的受控系统为

$$\begin{cases} x(k+1) = \\ A(r_k)x(k) + B(r_k)u(k) + G(r_k)v(k) + \\ [C(r_k)x(k) + D(r_k)u(k) + H(r_k)v(k)]w(k), \\ \qquad k \in N_T; \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{4}$$

其中: $x(k) \in \boldsymbol{R}^n$ 为系统状态, $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$ 为系统初始状态; $u(k) \in \boldsymbol{R}^m$ 为控制输入; $v(k) \in \boldsymbol{R}^p$ 为外部干扰; $A(r_k)$, $B(r_k)$, $C(r_k)$, $D(r_k)$, $G(r_k)$, $H(r_k)$ 为适当维数的实矩阵; $N_T = \{0, 1, \cdots, T\}$ 为时间集; $w(k)(k \in N_T)$ 为定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的实随机变量序列,满足 $\mathrm{E}[w(k)] = 0, \mathrm{E}[w(k)w(s)] = \delta_{(k-s)}, \delta_{(\cdot)}$ 为Kronecker函数;跳跃过程 $r_k(k \in N_T)$ 为离散时间齐次Markov链,其状态空间为 $S = \{1, 2, \cdots, l\}$. 转移概率为 $P(r_{k+1} = j | r_k = i) = \pi_{ij}$,表示由 k 时刻模态 i 转移到 $k+1$ 时刻模态 j 的概率, $\pi_{ij} \geqslant 0$ 且有 $\sum_{j=1}^{l} \pi_{ij} = 1$. 转移概率矩阵为 Γ, $w(k)(k \in N_T)$ 与 $r_k(k \in N_T)$ 相互独立.

转移概率矩阵的信息可以是完全的也可以是不完全的. 假设转移概率矩阵的信息是不完全的,即 Γ 中的某些元素是未知的,以四阶为例,则可能为以下形式:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} \\ \pi_{21} & \Delta & \Delta & \Delta \\ \Delta & \pi_{32} & \Delta & \pi_{34} \\ \pi_{41} & \Delta & \pi_{43} & \Delta \end{bmatrix}. \tag{5}$$

其中: Δ 为未知元素,其余为已知元素.

注1 由于 $\sum_{j=1}^{l} \pi_{ij} = 1$, Γ 中至少有两个未知元素,且某行中若有未知元素,则至少有两个.

当转移概率矩阵的信息不完全时,为了方便,采用以下记号:任意 $i \in S$, $S = S^i + S_u^i$,其中有

$$S^i = \{j | \pi_{ij}\text{已知}\}, S_u^i = \{j | \pi_{ij}\text{未知}\}. \tag{6}$$

由假设可知,集合 $S^1, S^2, \cdots, S^l$ 至少有一个非空,集合 $S_u^1, S_u^2, \cdots, S_u^l$ 至少有一个非空. 另外,若 $S^i \neq \varnothing$,则可记为 $S^i = \{k_1^i, k_2^i, \cdots, k_{m_i}^i\}, 1 \leqslant m_i \leqslant l$.

为了简单起见, $r_k = i$ 时的系统矩阵 $A(i), B(i), C(i), D(i), G(i), H(i)$ 可分别简记为 $A_i, B_i, C_i, D_i, G_i, H_i$.

定义1 如果有

$$\mathrm{E}(x_0^{\mathrm{T}} R x_0) \leqslant c_1 \Rightarrow \mathrm{E}[x^{\mathrm{T}}(k) R x(k)] < c_2,\ \forall k \in N_T, \tag{7}$$

则系统(1)为关于 (c_1, c_2, T, R) 有限时间稳定的. 其中: $c_2 > c_1 > 0, T > 0$ 为给定常数; $R > 0$ 为给定矩阵.

定义2 如果有

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(x_0^{\mathrm{T}} R x_0) \leqslant c_1 \Rightarrow \mathrm{E}[x^{\mathrm{T}}(k) R x(k)] < c_2, \\ &v(k) : \sum_{k=0}^{T} v^{\mathrm{T}}(k) v(k) \leqslant d,\ \forall k \in N_T, \end{aligned} \tag{8}$$

则系统(3)为关于 (c_1, c_2, T, R, d) 有限时间有界的. 其中: $c_2 > c_1 > 0, T > 0, d \geqslant 0$ 为给定常数; $R > 0$ 为给

定矩阵.

注2　FTS要求系统状态在有限的时间区间内不超过某个界; 而FTB是针对含干扰的系统而言的. 若干扰 $v(k)=0$, 则FTB退化为FTS.

2　主要结果

首先, 给出系统(1)FTS的充要条件.

定理1　系统(1)关于 (c_1,c_2,T,R) 有限时间稳定的充分必要条件是

$$\mathrm{E}(x_0^{\mathrm T}Rx_0)\leqslant c_1 \Rightarrow \mathrm{Tr}[RQ_i(k)]<c_2,\ \forall k\in N_T, \tag{9}$$

其中: $Q_i(k)(i\in S)$ 为差分方程

$$\begin{cases} Q_i(k+1)=\sum_{j=1}^{l}\pi_{ji}[A_jQ_j(k)A_j^{\mathrm T}+C_jQ_j(k)C_j^{\mathrm T}],\\ Q_i(0)=\mathrm{E}(x_0x_0^{\mathrm T}I_{\{r_0=i\}}) \end{cases} \tag{10}$$

的解; $\mathrm{Tr}(\cdot)$ 为矩阵的迹; $I_{\{\cdot\}}$ 为示性函数.

证明　令

$$Q_i(k)=\mathrm{E}[x(k)x^{\mathrm T}(k)I_{\{r_k=i\}}], \tag{11}$$

则

$$\mathrm{E}[x^{\mathrm T}(k)Rx(k)]=\mathrm{E}\mathrm{Tr}[Rx(k)x^{\mathrm T}(k)]=\mathrm{Tr}[RQ_i(k)]. \tag{12}$$

另外, 通过逐次迭代和条件期望公式可得 $Q_i(k)$ 为式(10)的解(文献[28]中的定理2.1), 结合定义1即可得证. □

下面给出含干扰的系统(3)的FTB的充分条件.

定理2　如果对于某个 $\alpha\geqslant 1$, 存在矩阵 $Q_i>0$, $P_i>0, \forall i\in S$, 使得

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{l}\pi_{ij}(A_i^{\mathrm T}Q_jA_i+C_i^{\mathrm T}Q_jC_i)-\alpha Q_i & \sum_{j=1}^{l}\pi_{ij}(A_i^{\mathrm T}Q_jG_i+C_i^{\mathrm T}Q_jH_i)\\ * & \sum_{j=1}^{l}\pi_{ij}(H_i^{\mathrm T}Q_jH_i+G_i^{\mathrm T}Q_jG_i)-P_i \end{bmatrix}<0, \tag{13}$$

$$\frac{\alpha^T[c_1\lambda_{\max}(\overline{Q}_i)+d\lambda_{\max}(P_i)]}{\lambda_{\min}(\overline{Q}_i)}<c_2, \tag{14}$$

则系统(3)关于 (c_1,c_2,T,R,d) 有限时间有界. 其中: “$*$”为对称矩阵的对称部分, $\lambda_{\max}(\cdot)$、$\lambda_{\min}(\cdot)$ 为矩阵的最大、最小特征值, $\overline{Q}_i=R^{-\frac12}Q_iR^{-\frac12}$.

证明　取Lyapunov算子

$$V(x(k),r_k=i)=x^{\mathrm T}(k)Q_ix(k), \tag{15}$$

$$\mathrm{E}[V(x(k+1),r_{k+1}=j)]=$$

$$\mathrm{E}\Big[x^{\mathrm T}(k+1)Q_jx(k+1)\sum_{j=1}^{l}P(r_{k+1}=j|r_k=i)\Big]=$$

$$\sum_{j=1}^{l}\pi_{ij}\mathrm{E}[(A_ix+G_iv)^{\mathrm T}+(C_ix+H_iv)^{\mathrm T}w]\times$$

$$Q_j[(A_ix+G_iv)+(C_ix+H_iv)w]. \tag{16}$$

为了方便, $x(k),w(k),v(k)$ 中的 k 均省略了. 又由于 $\mathrm{E}[w(k)]=0, \mathrm{E}[w^2(k)]=1$, 有

$$\mathrm{E}V[x(k+1)]=$$

$$[x^{\mathrm T},v^{\mathrm T}]\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{l}\pi_{ij}(A_i^{\mathrm T}Q_jA_i+C_i^{\mathrm T}Q_jC_i) & \sum_{j=1}^{l}\pi_{ij}(A_i^{\mathrm T}Q_jG_i+C_i^{\mathrm T}Q_jH_i)\\ * & \sum_{j=1}^{l}\pi_{ij}(H_i^{\mathrm T}Q_jH_i+G_i^{\mathrm T}Q_jG_i) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ v\end{bmatrix}. \tag{17}$$

式(13)等价于

$$\mathrm{E}V[x(k+1)]<\alpha\mathrm{E}V[x(k)]+v^{\mathrm T}(k)P_iv(k), \tag{18}$$

进而有

$$\mathrm{E}V[x(k+1)]<\alpha\mathrm{E}V[x(k)]+\lambda_{\max}(P_i)v^{\mathrm T}(k)v(k). \tag{19}$$

因此

$$\mathrm{E}V[x(k)]<$$

$$\alpha\mathrm{E}V[x(k-1)]+\lambda_{\max}(P_i)v^{\mathrm T}(k-1)v(k-1)<\cdots<$$

$$\alpha^k\mathrm{E}V(x_0)+\lambda_{\max}(P_i)\sum_{s=0}^{k-1}\alpha^{k-1-s}v^{\mathrm T}(s)v(s)<$$

$$\alpha^k\mathrm{E}V(x_0)+\lambda_{\max}(P_i)\alpha^Td, \tag{20}$$

因为 $\alpha\geqslant 1$ 以及 $\sum_{k=0}^{T}v^{\mathrm T}(k)v(k)\leqslant d$, 故最后一个不等式成立.

令 $\overline{Q}_i=R^{-\frac12}Q_iR^{-\frac12}$, 则有

$$\mathrm{E}V(x_0)=$$

$$\mathrm{E}(x_0^{\mathrm T}Q_ix_0)=\mathrm{E}(x_0^{\mathrm T}R^{\frac12}\overline{Q}_iR^{\frac12}x_0)\leqslant\lambda_{\max}(\overline{Q}_i)c_1, \tag{21}$$

$$\mathrm{E}V[x(k)]=\mathrm{E}[x^{\mathrm T}(k)Q_ix(k)]=$$

$$\mathrm{E}[x^{\mathrm T}(k)R^{\frac12}\overline{Q}_iR^{\frac12}x(k)]\geqslant$$

$$\lambda_{\min}(\overline{Q}_i)\mathrm{E}[x^{\mathrm T}(k)Rx(k)], \tag{22}$$

综上所述

$$\mathrm{E}[x^{\mathrm T}(k)Rx(k)]\leqslant\frac{\alpha^T[c_1\lambda_{\max}(\overline{Q}_i)+d\lambda_{\max}(P_i)]}{\lambda_{\min}(\overline{Q}_i)}. \tag{23}$$

因此,当式(14)成立时,$\mathrm{E}[x^{\mathrm{T}}(k)Rx(k)] \leqslant c_2$. □

下面考虑系统(4)的FTB问题,即通过状态反馈使闭环系统(FTB). 由定理2不难得到如下定理.

定理3 如果对于某个$\alpha \geqslant 1$存在矩阵$\tilde{Q}_i > 0$, $P_i > 0, Y_i, \forall i \in S$,以及正数$\lambda_1, \lambda_2$,使得

$$\begin{bmatrix} -\alpha\tilde{Q}_i & 0 & \varPhi_i \\ * & -P_i & \varPsi_i \\ * & * & -\varTheta_i \end{bmatrix} < 0, \tag{24}$$

$$\lambda_1 I < \underline{Q}_i < I, \tag{25}$$

$$P_i < \lambda_2 I, \tag{26}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 d - \dfrac{c_2}{\alpha^T} & 1 \\ * & -\dfrac{\lambda_1}{c_1} \end{bmatrix} < 0, \tag{27}$$

则系统(4)的FTB问题可解,反馈增益为$K_i = Y_i\tilde{Q}_i^{-1}$. 其中$I$为单位矩阵,且有

$$\varPhi_i =$$
$$[\sqrt{\pi_{i1}}(A_i\tilde{Q}_i + B_iY_i)^{\mathrm{T}}, \cdots, \sqrt{\pi_{il}}(A_i\tilde{Q}_i + B_iY_i)^{\mathrm{T}},$$
$$\sqrt{\pi_{i1}}(C_i\tilde{Q}_i + D_iY_i)^{\mathrm{T}}, \cdots, \sqrt{\pi_{il}}(C_i\tilde{Q}_i + D_iY_i)^{\mathrm{T}}],$$
$$\varPsi_i = [\sqrt{\pi_{i1}}G_i^{\mathrm{T}}, \cdots, \sqrt{\pi_{il}}G_i^{\mathrm{T}}, \sqrt{\pi_{i1}}H_i^{\mathrm{T}}, \cdots, \sqrt{\pi_{il}}H_i^{\mathrm{T}}],$$
$$\varTheta_i = \mathrm{Diag}(\tilde{Q}_1, \cdots, \tilde{Q}_l, \tilde{Q}_1, \cdots, \tilde{Q}_l), \underline{Q}_i = R^{\frac{1}{2}}\tilde{Q}_iR^{\frac{1}{2}},$$

其中Diag(·)为分块对角矩阵.

证明 将式(13)中的A_i换成$A_i + B_iK_i$, C_i换成$C_i + D_iK_i$,并令$Q_i = \tilde{Q}_i^{-1}$, $Y_i = K_i\tilde{Q}_i$,左乘、右乘$\mathrm{Diag}(\tilde{Q}_i, I)$,再由Schur补可得式(13)等价于式(24). 作恒等变形,式(14)变为

$$\lambda_{\max}(\underline{Q}_i)\alpha^T\Big[c_1\frac{1}{\lambda_{\min}(\underline{Q}_i)} + d\lambda_{\max}(P_i)\Big] < c_2. \tag{28}$$

不难验证,当式(25) ~ (27)成立时,式(28)成立. □

由于$v(k) = 0$时,FTB退化为FTS,因此,由定理2和定理3可得下面的推论,即系统FTS的判据.

推论1 1) 如果对于某个$\alpha \geqslant 1$,存在矩阵$Q_i > 0, \forall i \in S$,使得

$$\sum_{j=1}^{l}\pi_{ij}(A_i^{\mathrm{T}}Q_jA_i + C_i^{\mathrm{T}}Q_jC_i) - \alpha Q_i < 0, \tag{29}$$

$$\alpha^T\mathrm{Cond}(\overline{Q}_i) < \frac{c_2}{c_1}, \tag{30}$$

则系统(1)关于(c_1, c_2, T, R)有限时间稳定,其中$\overline{Q}_i = R^{-\frac{1}{2}}Q_iR^{-\frac{1}{2}}$, Cond(·)为矩阵的条件数.

2) 如果对于某个$\alpha \geqslant 1$,存在矩阵$\tilde{Q}_i > 0, Y_i > 0, \forall i \in S$,使得

$$\begin{bmatrix} -\alpha\tilde{Q}_i & \varPhi_i \\ * & -\varTheta_i \end{bmatrix} < 0, \tag{31}$$

$$\frac{\mathrm{Cond}(\underline{Q}_i)}{\alpha^T} < \frac{c_1}{c_2}, \tag{32}$$

则系统(2)关于(c_1, c_2, T, R)有限时间镇定,反馈增益为$K_i = Y_i\tilde{Q}_i^{-1}$. 其中$\varPhi_i, \varTheta_i, \underline{Q}_i$同定理3.

最后,考虑系统(3)、(4)在转移概率信息不完全下的FTB问题.

定理4 1) 如果对于某个$\alpha \geqslant 1$,存在矩阵$Q_i > 0, P_i > 0, \forall i \in S$,使得

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{j\in S^i}[\pi_{ij}(A_i^{\mathrm{T}}Q_jA_i + C_i^{\mathrm{T}}Q_jC_i) - \alpha Q_i] & \sum\limits_{j\in S^i}\pi_{ij}(A_i^{\mathrm{T}}Q_jG_i + C_i^{\mathrm{T}}Q_jH_i) \\ * & \sum\limits_{j\in S^i}\pi_{ij}[(H_i^{\mathrm{T}}Q_jH_i + G_i^{\mathrm{T}}Q_jG_i) - P_i] \end{bmatrix} < 0, \tag{33}$$

$$\begin{bmatrix} A_i^{\mathrm{T}}Q_jA_i + C_i^{\mathrm{T}}Q_jC_i - \alpha Q_i & A_i^{\mathrm{T}}Q_jG_i + C_i^{\mathrm{T}}Q_jH_i \\ * & H_i^{\mathrm{T}}Q_jH_i + G_i^{\mathrm{T}}Q_jG_i - P_i \end{bmatrix} < 0,\ j \in S_u^i, \tag{34}$$

以及式(14)成立,则具有转移概率(6)的系统(3)有限时间有界.

2) 如果对于某个$\alpha \geqslant 1$,存在矩阵$\tilde{Q}_i > 0, P_i > 0, Y_i, \forall i \in S$,以及正数$\lambda_1, \lambda_2$,使得

$$\begin{bmatrix} -\alpha\sum\limits_{j\in S^i}\pi_{ij}\tilde{Q}_i & 0 & \varPhi_i \\ * & -\sum\limits_{j\in S^i}\pi_{ij}P_i & \varPsi_i \\ * & * & -\varTheta_i \end{bmatrix} < 0, \tag{35}$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha\tilde{Q}_i & 0 & (A_i\tilde{Q}_i + B_iY_i)^{\mathrm{T}} & (C_i\tilde{Q}_i + D_iY_i)^{\mathrm{T}} \\ * & -P_i & G_i^{\mathrm{T}} & H_i^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\tilde{Q}_j & 0 \\ * & * & * & -\tilde{Q}_j \end{bmatrix} < 0,$$
$$j \in S_u^i, \tag{36}$$

以及式(25) ~ (27)成立,则具有转移概率(6)的系统(4)的FTB问题可解,反馈增益为$K_i = Y_i\tilde{Q}_i^{-1}$. 这里

$$\varPhi_i =$$
$$[\sqrt{\pi_{ik_1^i}}(A_i\tilde{Q}_i + B_iY_i)^{\mathrm{T}}, \cdots,$$
$$\sqrt{\pi_{ik_{m_i}^i}}(A_i\tilde{Q}_i + B_iY_i)^{\mathrm{T}}, \sqrt{\pi_{ik_1^i}}(C_i\tilde{Q}_i + D_iY_i)^{\mathrm{T}},$$
$$\cdots, \sqrt{\pi_{ik_{m_i}^i}}(C_i\tilde{Q}_i + D_iY_i)^{\mathrm{T}}],$$

$$\Psi_i=[\sqrt{\pi_{ik_1^i}}G_i^{\mathrm{T}},\cdots,\sqrt{\pi_{ik_{m_i}^i}}G_i^{\mathrm{T}},\sqrt{\pi_{ik_1^i}}H_i^{\mathrm{T}},\cdots,\sqrt{\pi_{ik_{m_i}^i}}H_i^{\mathrm{T}}],$$

$$\Theta_i=\mathrm{Diag}(\tilde{Q}_{k_1^i},\cdots,\tilde{Q}_{k_{m_i}^i},\tilde{Q}_{k_1^i},\cdots,\tilde{Q}_{k_{m_i}^i}).$$

证明 1) 由于$\sum_{j=1}^{l}\pi_{ij}=1$,式(13)左边可整理为不等式(33)的左边与不等式(34)的左边乘以$\sum_{j\in S_u^i}\pi_{ij}$的和,显然式(33)、(34)成立时式(13)成立,由定理2可知1)成立.

2) 分别对式(33)、(34)采用定理3的证明方法,可得式(35)、(36),由定理3可知,2)成立. □

3 数值例子

假设系统(4)的系统矩阵为

$$A_1=\begin{bmatrix}0.23&0.68\\-1.10&0.06\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}0.02&-0.64\\0.13&1.45\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}2.02&1.18\\0.37&0.46\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0.47&0.11\\-0.14&1.30\end{bmatrix},$$

$$C_1=\begin{bmatrix}1.10&-0.46\\1.86&1.23\end{bmatrix},\ C_2=\begin{bmatrix}1.45&-0.10\\-0.49&0.17\end{bmatrix},$$

$$D_1=\begin{bmatrix}-0.73&-1.13\\-0.47&-2.37\end{bmatrix},\ D_2=\begin{bmatrix}1.05&1.11\\-0.55&1.41\end{bmatrix},$$

$$G_1=\begin{bmatrix}-0.35&-2.09\\-0.87&0.34\end{bmatrix},\ G_2=\begin{bmatrix}-1.01&-0.22\\0.94&-1.20\end{bmatrix},$$

$$H_1=\begin{bmatrix}-0.51&0.25\\-0.23&0.21\end{bmatrix},\ H_2=\begin{bmatrix}-1.05&0.24\\-0.89&1.01\end{bmatrix}.$$

给定$c_1=10,c_2=100,\alpha=1.001,R=I,T=20,d=0.01$,分别考虑系统在转移概率的两种信息状态下的FTB问题.

1) 转移概率矩阵完全已知,为

$$\Gamma=\begin{bmatrix}0.3&0.7\\0.1&0.9\end{bmatrix},$$

由定理3及解LMIs(24) ~ (27)可得

$$P_1=\begin{bmatrix}1\,626.7&-17.2\\-17.2&1\,634.2\end{bmatrix},\ P_2=\begin{bmatrix}1\,914.3&-320.5\\-320.5&1\,951.5\end{bmatrix},$$

$$Y_1=\begin{bmatrix}-0.196&-0.778\\0.314&0.692\end{bmatrix},\ Y_2=\begin{bmatrix}-1.080&0.154\\-0.073&-0.055\end{bmatrix},$$

$$\tilde{Q}_1=\begin{bmatrix}0.254&0.127\\0.127&0.925\end{bmatrix},\ \tilde{Q}_2=\begin{bmatrix}0.969&-0.127\\-0.127&0.159\end{bmatrix},$$

$\lambda_1=0.137\,8,\ \lambda_2=2\,417.1.$

因此,系统(4)关于$(10,100,20,I,0.01)$的FTB问题可解,反馈增益为

$$K_1=\begin{bmatrix}-0.374&-0.790\\0.925&0.621\end{bmatrix},$$

$$K_2=\begin{bmatrix}-1.103&0.085\\-0.134&-0.449\end{bmatrix}.$$

2) 转移概率矩阵不完全已知,为

$$\Gamma=\begin{bmatrix}0.3&0.7\\\Delta&\Delta\end{bmatrix},$$

由定理4,解LMIs(35)、解LMIs(36)以及(25) ~ (27)可得

$$P_1=\begin{bmatrix}1\,868.8&-101.3\\-101.3&1\,888.7\end{bmatrix},$$

$$P_2=\begin{bmatrix}2\,289.8&-270.7\\-270.7&2\,325.1\end{bmatrix},$$

$$Y_1=\begin{bmatrix}-0.212&-0.809\\0.328&0.734\end{bmatrix},$$

$$Y_2=\begin{bmatrix}-0.899&0.106\\-0.182&-0.044\end{bmatrix},$$

$$\tilde{Q}_1=\begin{bmatrix}0.254&0.153\\0.153&0.952\end{bmatrix},$$

$$\tilde{Q}_2=\begin{bmatrix}0.956&-0.127\\-0.127&0.144\end{bmatrix},$$

$\lambda_1=0.125\,5,\ \lambda_2=2\,663.0.$

因此,系统(4)关于$(10,100,20,I,0.01)$的FTB问题可解,反馈增益为

$$K_1=\begin{bmatrix}-0.358&-0.793\\0.920&0.623\end{bmatrix},$$

$$K_2=\begin{bmatrix}-0.954&-0.102\\-0.260&-0.529\end{bmatrix}.$$

4 结 论

本文考虑了一类更具应用前景的(x,u,v)依赖噪声的离散时间随机Markov跳跃系统的有限时间控制问题,得到了转移概率信息完全与不完全下系统有限时间有界的判据. 利用线性矩阵不等式可以方便地设计状态反馈控制器. 作为推论,给出了系统有限时间稳定和镇定的条件.

参考文献(References)

[1] Amato F, Ambrosino R, Ariola M, et al. Finite-time stability and control[M]. London: Springer-Verlag, 2014: 15-18.

[2] 宋申民, 郭永, 李学辉. 航天器姿态跟踪有限时间饱和

控制[J]. 控制与决策, 2015, 30(11): 2004-2008.
(Song S M, Guo Y, Li X H. Finite-time attitude tracking control for spacecraft with input saturation[J]. Control and Decision, 2015, 30(11): 2004-2008.)

[3] Kamenkov G. On stability of motion over a finite interval of time[J]. J of Applied Mathematics and Mechanics, 1953, 17(5): 529-540.

[4] Doroto P. Short time stability in linear time-varying systems[C]. Proc of the IRE Int Convention Record. New York: Institute of Radio Engineers, 1961: 83-87.

[5] Amato F, Ariola M, Dorato P. Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances[J]. Automatica, 2001, 37(9): 1459-1463.

[6] Amato F, Carannante G, Tommasi G, et al. Input-output finite-time stability of linear systems: Necessary and sufficient conditions[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2012, 57(12): 3051-3063.

[7] Amato F, Ariola M, Cosentino C. Robust finite-time stabilisation of uncertain linear systems[J]. Int J of Control, 2011, 84(12): 2117-2127.

[8] Garcia G, Tarbouriech S, Bernussou J. Finite-time stabilization of linear time-varying continuous systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(2): 364-369.

[9] Tan F, Zhou B, Duan G R. Finite-time stabilization of linear time-varying systems by piecewise constant feedback[J]. Automatica, 2016, 68: 277-285.

[10] Chen W S, Jiao L C. Finite-time stability theorem of stochastic nonlinear systems[J]. Automatica, 2010, 46(12): 2105-2108.

[11] Wu J, Chen W S, Li J. Global finite-time adaptive stabilization for nonlinear systems with multiple unknown control directions[J]. Automatica, 2016, 69: 298-307.

[12] Luan X L, Liu F, Shi P. Observer-based finite-time stabilization for extended Markov jump systems[J]. Asian J of Control, 2011, 13(6): 925-935.

[13] Wei Y L, Zheng W X. Finite-time stochastic stabilisation of Markovian jump non-linear quadratic systems with partially known transition probabilities[J]. IET Control Theory and Applications, 2014, 8(5): 311-318.

[14] Yan Z G, Zhang W H, Zhang G S. Finite-time stability and stabilization of Itô stochastic systems with Markovian switching: Mode-dependent parameter approach[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2015, 60(9): 2428-2433.

[15] Liu X H, Yu X H, Zhou X J, et al. Finite-time H_∞ control for linear systems with semi-Markovian switching[J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 85(4): 2297-2308.

[16] Liu X H, Yu X H, Ma G Q, et al. On sliding mode control for networked control systems with semi-Markovian switching and random sensor delays[J]. Information Sciences, 2016, 337/338: 44-58.

[17] Yang Y, Li J M, Chen G P. Finite-time stability and stabilization of Markovian switching stochastic systems with impulsive effects[J]. J of Systems Engineering and Electronics, 2010, 21(2): 254-260.

[18] Xiang Z R, Qiao C H, Mahmoud M S. Finite-time analysis and control for switched stochastic systems[J]. J of the Franklin Institute, 2012, 349(3): 915-927.

[19] Zhao S W, Sun J T, Liu L. Finite-time stability of linear time-varying singular systems with impulsive effects[J]. Int J of Control, 2008, 81(11): 1824-1829.

[20] Yang Y, Li J M, Chen G P. Finite-time stability and stabilization of nonlinear stochastic hybrid systems[J]. J of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 356(1): 338-345.

[21] Zhang W H, An X Y. Finite-time control of linear stochastic systems[J]. Int J of Innovative Computing, Information and Control, 2008, 4(3): 689-696.

[22] Yan Z G, Zhang G S, Zhang W H. Finite-time stability and stabilization of linear Itô stochastic systems with state and control-dependent noise[J]. Asian J of Control, 2013, 15(1): 270-281.

[23] Yan Z G, Zhang G S, Wang J K, et al. State and output feedback finite-time guaranteed cost control of linear Itô stochastic systems[J]. J of Systems Science and Complexity, 2015, 28(4): 813-829.

[24] 李小华, 刘洋, 刘晓平. 一类扩展结构大系统的分散有限时间鲁棒关联镇定[J]. 控制与决策, 2015, 30(11): 1967-1973.
(Li X H, Liu Y, Liu X P. Decentralized finite-time robust connective stabilization for a class of large-scale systems with expanding construction[J]. Control and Decision, 2015, 30(11): 1967-1973.)

[25] Amato F, Ariola M. Finite-time control of discrete-time linear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(5): 724-729.

[26] Amato F, Ariola M, Cosentino C. Finite-time control of discrete-time linear systems: Analysis and design conditions[J]. Automatica, 2010, 46(5): 919-924.

[27] Zuo Z Q, Li H C, Wang Y J. New criterion for finite-time stability of linear discrete-time systems with time-varying delay[J]. J of the Franklin Institute, 2013, 350(9): 2745-2756.

[28] 侯婷. 离散时间Markov跳变系统的稳定性与鲁棒控制[D]. 青岛: 山东科技大学信息与电气工程学院, 2010.
(Hou T. Stability and robust control for discrete-time Markov jump systems[D]. Qingdao: College of Information and Electrical Engineering, Shandong University of Science and Technology, 2010.)

（责任编辑：闫 妍）