

基于参数依赖动态输出反馈鲁棒MPC的混沌系统同步

姜伟^{1†}, 王宏力¹, 陆敬辉¹, 冯磊²

(1. 火箭军工程大学 控制工程系, 西安 710025; 2. 火箭军工程大学 发射工程系, 西安 710025)

摘要: 针对离散时间不确定混沌系统的同步控制问题, 提出一种基于参数依赖动态输出反馈鲁棒模型预测控制算法. 首先, 采用主动控制策略, 将具有噪声扰动的主从混沌系统同步问题转化为鲁棒稳定性问题; 然后, 采用参数依赖动态输出控制器和二次有界概念, 在保证闭环系统鲁棒稳定性的同时, 降低算法的保守性; 最后, 通过附加约束条件, 能够显式处理混沌系统同步中的输入约束. 仿真结果表明了所提出算法的有效性.

关键词: 动态输出反馈; 模型预测控制; 二次有界; 混沌同步

中图分类号: V249.1

文献标志码: A

Chaos synchronization via parameter-dependent dynamic output feedback robust MPC

JIANG Wei^{1†}, WANG Hong-li¹, LU Jing-hui¹, FENG Lei²

(1. Department of Control Engineering, Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025, China; 2. Department of Launch Engineering, Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025, China)

Abstract: A kind of parameter-dependent dynamic output feedback robust model predictive control algorithm is proposed to synchronize two identical discrete-time chaotic systems with parameteric uncertainties and energy-bounded disturbances. Firstly, the active control strategy is employed to reformulate the chaos synchronization with master-slave structure into the standard robust stabilization problem. Then, both concepts of quadratic boundedness and parameter-dependent dynamic output controller are introduced to stabilize the augmented closed-loop system for less conservativeness. By adding additional constraint conditions, the physical input constraints are handled explicitly. Simulation results show the effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords: dynamic output feedback; model predictive control; quadratic boundedness; chaos synchronization

0 引言

混沌是指在确定系统中出现的一种貌似无规则的、类似随机的现象^[1], 其基本特征是具有正的Lyapunov指数、对初值的极度敏感性及长期行为的不可预测性. 长期以来, 人们普遍认为混沌是不可控制的. 但自从物理学家Ott、Grebogi和Yorke^[2]于1990年提出了著名的OGY参量扰动方法并成功实现混沌系统控制后, 混沌控制的研究显示出蓬勃生机. 此外, 由于混沌同步控制在保密通信^[3-4]、光学^[5]、生物系统^[6]、电子电路^[7]、人工神经网络^[8]等领域具有巨大应用潜力和广阔发展前景, 已经涌现出许多混沌同步控制方法, 如主动控制方法^[9-10]、增益调度方法^[11-12]、滑模控制方法^[13]、反演法^[14]和预测控制方法^[15-16]等.

在最优控制基础上发展起来的具有处理系统硬约束和不确定性能力的预测控制(PC)在工业控制中获得了许多成功应用, 已经成为混沌同步控制领域的重要研究方向. 文献[17]结合离散滑模控制理论, 提出了一种带有终端滑模等式约束的广义预测控制快速算法, 并应用于Hénon混沌系统的控制. 文献[18]利用带有遗忘因子的递推最小二乘参数辨识法逼近混沌系统, 提出了一种带有约束矩阵的广义预测控制快速算法. 文献[19]充分利用预测信息的补偿作用, 提出了一种带有预测函数的广义预测控制快速算法. 文献[20]通过引入前馈增益矩阵和柔化矩阵, 并采用改进的时变遗忘因子递推最小二乘方法辨识系统, 提出了多变量广义预测控制快速算法. 文献[17-

收稿日期: 2016-10-19; 修回日期: 2016-12-21.

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金项目(61203007, 61304239, 61004128); 陕西省自然科学基金项目(2015JQ6213).

作者简介: 姜伟(1989—), 男, 博士生, 从事飞行器建模、鲁棒非线性控制、模型预测控制的研究; 王宏力(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 从事导航制导与控制、惯性/星光复合制导等研究.

[†]通讯作者. E-mail: yixiantian123456@126.com

20]使用递推最小二乘法在线辨识混沌系统,通过自校正机制实时对混沌模型进行线性化处理,其本质依然是非线性算法.文献[15]指出文献[17-20]中的算法虽然避免了矩阵求逆计算,在算法简化方面取得了进展,但由于针对的是一般的线性模型,还需求解丢番图方程,计算量仍较大.因此,文献[15]利用线性扩张状态观测器估计和补偿混沌系统的非线性动力学及存在的不确定性,将原始对象近似转化为积分器形式,随后针对单积分器设计广义预测控制,降低了预测控制计算量.然而,文献[15-20]中采用的都是基于定量分析理论的广义预测控制,通常只适用于单变量无约束可导出解析解的情况,而对于多变量有约束的实际工业过程,几乎不可能得到设计参数与系统性能的定量关系^[21].此外,文献[15-20]中均采用基于状态反馈的预测控制方法,对于混沌系统状态不可测或难以准确获取的情形难以适用,且以上方法受限于混沌系统的非线性特性,均不具有显式处理约束的能力.

本文通过引入二次有界(quadratic boundedness)概念,采用主动控制策略,基于线性矩阵不等式(LMI)技术和min-max鲁棒控制方法,提出一种离散混沌系统参数依赖动态输出反馈鲁棒模型预测同步控制算法.数值仿真表明,本文算法能够在满足输入约束的前提下,实现同构离散时间混沌系统状态同步的鲁棒控制,并且对外部干扰具有较好的抑制能力.

1 问题描述

首先给出符号标记.对于任意向量 x 和正定矩阵 M , $\|x\|_M^2 = x^T M x$; $x(k+i|k)$ 表示当前时刻 k 对未来 $k+i$ 时刻 x 的预测值; I 和 0 表示具有适当维数的单位矩阵和零矩阵; $\varepsilon_M := \{v : v^T M v \leq 1\}$ 表示关于正定矩阵 M 的椭圆; M^T 和 M^{-1} 分别表示矩阵 M 的转置和逆;矩阵中“*”表示对称矩阵中其对称项的转置; $\text{Co}\{\cdot\}$ 表示以 $\{\cdot\}$ 中元素为顶点的凸组合,组合权系数非负且加和为1.

考虑一类具有主从(master-slave)结构的同构离散时间混沌系统如下:

$$\mathcal{M}: \begin{cases} x_m(k+1|k) = A(k)x_m(k|k) + f(x_m(k|k), k), \\ y_m(k|k) = C(k)x_m(k|k); \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathcal{S}: \begin{cases} x_s(k+1|k) = A(k)x_s(k|k) + f(x_s(k|k), k) + \\ \quad H(k)\varpi(k) + u(k|k), \\ y_s(k|k) = C(k)x_s(k|k), \\ |u(k+i|k)| \leq u_{\max}, u_{\max j} \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $i \in \{0, 1, \dots, \infty\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$; $x_m(k|k) \in \mathbf{R}^n$, $x_s(k|k) \in \mathbf{R}^n$ 和 $y_m(k|k) \in \mathbf{R}^m$, $y_s(k|k) \in \mathbf{R}^m$ 分别为主系统 $\mathcal{M}$ 和从系统 $\mathcal{S}$ 的状态及输出,且假设二者状态均不可测; $f\{\cdot\} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 为非线性项; $\varpi(k) \in \varepsilon_{P_\omega}$ 为持续有界的系统噪声; $u_{\max}$ 为输入约束; $A(k) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $C(k) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 和 $H(k) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为相应的系数矩阵,且满足

$$[A(k), C(k), H(k)] \in \Theta = \text{Co}\{[A_1, C_1, H_1], \dots, [A_L, C_L, H_L]\}, \quad (3)$$

$[A_l, C_l, H_l]_{l=1,2,\dots,L}$ 为已知的顶点系统矩阵.根据多凸理论,存在 L 个非负权系数 $\lambda_l(k)$,使得

$$[A(k), C(k), H(k)] = \sum_{l=1}^L \lambda_l(k) [A_l, C_l, H_l], \quad \sum_{l=1}^L \lambda_l(k) = 1, \lambda_l(k) \in [0, 1]. \quad (4)$$

定义1 对于任意给定的有界噪声 $\varpi(k)$ 和初始状态 $x_m(0|0)$ 及 $x_s(0|0)$,定义混沌同步误差 $e(k+i|k) = x_s(k+i|k) - x_m(k+i|k)$.如果存在一个参数依赖动态输出反馈控制器 $\mathcal{K}_{\text{DOF}}$ 使得 $\lim_{i \rightarrow \infty} e(k+i|k) = 0$,则称混沌系统(1)和(2)达到混沌同步.

设计的参数依赖动态输出反馈控制器 $\mathcal{K}_{\text{DOF}}$ 如下:

$$\begin{cases} x_c(i+1|k) = A_c(i|k)x_c(i|k) + B_c(i|k)y(i|k), \\ \hat{u}(i|k) = C_c(i|k)x_c(i|k) + D_c(i|k)y(i|k). \end{cases} \quad (5)$$

其中: $x_c(i+1|k)$ 为控制器状态; $\hat{u}(i|k)$ 为主动控制输入^[22]; $y(i|k) = y_s(i|k) - y_m(i|k)$ 为输出观测误差; $\{A_c(i|k), B_c(i|k), C_c(i|k), D_c(i|k)\}$ 为控制器 $\mathcal{K}_{\text{DOF}}$ 的参数依赖增益矩阵,即

$$\begin{aligned} A_c(i|k) &= \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \lambda_l(k+i) \lambda_j(k+i) \bar{A}_c^{lj}, \\ B_c(i|k) &= \sum_{l=1}^L \lambda_l(k+i) \bar{B}_c^l, \\ C_c(i|k) &= \sum_{j=1}^L \lambda_j(k+i) \bar{C}_c^j, \quad D_c(i|k) = \bar{D}_c, \end{aligned} \quad (6)$$

$\{\bar{A}_c^{lj}, \bar{B}_c^l, \bar{C}_c^j, \bar{D}_c\}$ 为待定矩阵.

图1所示为混沌系统同步结构框图,可以得到如下混沌同步误差 $e(k+i|k)$ 的动态更新方程:

$$e(k+1|k) = A(k)e(k|k) + H(k)\varpi(k) + \hat{u}(k|k), \quad (7)$$

其中主动控制输入 $\hat{u}(i|k)$ 如图1所示.定义 $\tilde{x} = [e^T, x_c^T]^T$,结合式(5)~(7),可得闭环增广系统 $\mathcal{S}_{\text{DOF}}$ 如下:

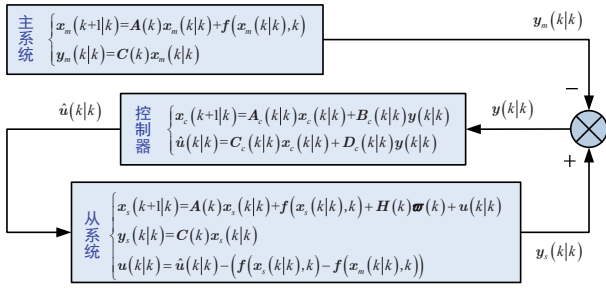


图1 混沌系统同步结构框图

$$\begin{cases} \tilde{x}(i+1|k) = \Phi(i, k)\tilde{x}(i|k) + \Gamma(i, k)\varpi(k+i), \\ \tilde{x}(0|k) = \tilde{x}(k), \forall i \geq 0. \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi(i, k) &= \begin{bmatrix} A(k) + D_c(i|k)C(k) & C_c(i|k) \\ B_c(i|k)C(k) & A_c(i|k) \end{bmatrix} = \\ &= \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \lambda_l(k+i)\lambda_j(k+i)\Phi_{lj}, \\ \Gamma(i, k) &= \begin{bmatrix} H(k) \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^L \lambda_l(k+i)\Gamma_l, \\ \Phi_{lj} &= \begin{bmatrix} A_l + \bar{D}_c C_j & \bar{C}_c^j \\ \bar{B}_c^l C_j & \bar{A}_c^{lj} \end{bmatrix}, \Gamma_l = \begin{bmatrix} H_l \\ 0 \end{bmatrix}, \\ &\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \lambda_l(k+i)\lambda_j(k+i) = 1, \\ &\sum_{l=1}^L \lambda_l(k+i) = 1. \end{aligned}$$

借鉴文献[23-26]中二次有界的概念及相关推论,对于闭环增广系统(8)直接应用二次有界理论可以得到如下定理.

定理1 对于闭环增广系统(8)和任意有界噪声 \$\varpi(k) \in \varepsilon_{P_\omega}\$, 下列条件是等价的:

1) 对于 \$k > 0, \varepsilon_{P_\omega}\$ 为闭环增广系统(8)的正不变集;

2) 对于闭环增广系统(8), 若存在对称正定矩阵 \$Q(k)^{-1}\$, 则不等式 \$\tilde{x}^T(k)Q(k)^{-1}\tilde{x}(k) \geq 1\$ 可以保证 \$\tilde{x}^T(k+1|k)Q(k)^{-1}\tilde{x}(k+1|k) \leq \tilde{x}^T(k|k)Q(k)^{-1}\tilde{x}(k|k)\$, 即系统(8)关于对称正定矩阵 \$Q(k)^{-1}\$ 是“严格”二次有界的;

3) 存在一个标量 \$\alpha \in (0, 1)\$ 使得下式中的线性矩阵不等式成立:

$$\Upsilon^{QB}(i, k) = \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \lambda_l(k+i)\lambda_j(k+i)\Upsilon_{lj}^{QB} \geq 0, \quad (9)$$

$$\Upsilon_{lj}^{QB} = \begin{bmatrix} (1-\alpha)Q(k)^{-1} & * & * \\ 0 & \alpha P_\omega & * \\ Q(k)^{-1}\Phi_{lj} & Q(k)^{-1}\Gamma_j & Q(k)^{-1} \end{bmatrix}.$$

证明过程可以参考文献[23-26], 此处限于篇幅不再赘述.

2 主要结果

根据定理1, 结合 min-max 鲁棒控制方法, 上述基于动态输出反馈鲁棒模型预测控制的混沌同步控制可以简化为存在参数不确定性和有界噪声干扰条件下的最小化问题, 即

$$\begin{aligned} &\min_{\gamma, Q(k+i|k), [A_c, B_c, C_c, D_c](i, k)} \gamma. \\ &\text{s.t. } \tilde{x}(k) \in \varepsilon_{Q(k)^{-1}}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &\|\tilde{x}(i|k)\|_{Q(k)^{-1}} \geq 1 \Rightarrow \\ &\|\tilde{x}(i|k)\|_{Q(k)^{-1}}^2 - \|\tilde{x}(i+1|k)\|_{Q(k)^{-1}}^2 \geq \\ &1/\gamma[\|y(i|k)\|_Q^2 + \|\hat{u}(i|k)\|_R^2], \forall i \geq 0; \\ &|u(i|k)| \leq u_{\max}, u_{\max j} \geq 0, \\ &\forall i \geq 0, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (11)$$

其中 \$Q\$ 和 \$R\$ 为已知的对称正定权系数矩阵. 约束(10)是为了保证在 \$k\$ 时刻增广状态 \$\tilde{x}(i+1|k)\$ 位于不变集 \$\varepsilon_{Q(k)^{-1}}\$ 内, 而约束(11)是为了保证在迭代过程中状态 \$\tilde{x}(i+1|k)\$ 逐渐收敛至嵌套渐近稳定的不变集内部或停留在其中以致最终收敛到原点. 约束(12)为系统的输入约束. 由于 \$\varpi(k+i) \in \varepsilon_{P_\omega}\$, 可以得到 \$\|\tilde{x}(i|k)\|_{Q(k)^{-1}} \geq 1\$ 等价于 \$\|\varpi(k+i)\|_{P_\omega}^2 \leq \|\tilde{x}(i|k)\|_{Q(k)^{-1}}^2\$ [25-26]. 进一步, 约束(11)等价于

$$\begin{aligned} &\|\varpi(k+i)\|_{P_\omega}^2 \leq \|\tilde{x}(i|k)\|_{Q(k)^{-1}}^2 \Rightarrow \\ &\|\tilde{x}(i|k)\|_{Q(k)^{-1}}^2 - \|\tilde{x}(i+1|k)\|_{Q(k)^{-1}}^2 \geq \\ &1/\gamma[\|y(i|k)\|_Q^2 + \|\hat{u}(i|k)\|_R^2], \forall i \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

结合式(1)、(2)、(5)~(7)和(8), 可知式(13)等价于

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \tilde{x}(i|k) \\ \varpi(k+i) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q(k)^{-1} & 0 \\ 0 & -P_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(i|k) \\ \varpi(k+i) \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \\ &\begin{bmatrix} \tilde{x}(i|k) \\ \varpi(k+i) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2^T \\ \Pi_2 & \Pi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(i|k) \\ \varpi(k+i) \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi_1(i, k) &= \\ &-\Phi(i, k)^T \gamma Q(k)^{-1} \Phi(i, k) + \gamma Q(k)^{-1} - \\ &\tilde{C}(i, k)^T Q \tilde{C}(i, k) - F(i, k)^T R F(i, k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi_2(i, k) &= -\Gamma(i, k)^T \gamma Q(k)^{-1} \Phi(i, k), \\ \Pi_3(i, k) &= -\Gamma(i, k)^T \gamma Q(k)^{-1} \Gamma(i, k), \\ \tilde{C}(i, k) &= [C(i, k) \ 0], \\ F(i, k) &= [D_c C(i, k) \ C_c].\end{aligned}$$

根据 S-Procedure 可知, 对于任意 $\hat{x}(i|k)$ 和 $\varpi(k+i)$ ($i \geq 0$), 不等式(13)成立的充要条件是: 当且仅当存在标量 $\alpha > 0$ 使得下式中线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Pi_1(i, k) & \Pi_2(i, k)^T \\ \Pi_2(i, k) & \Pi_3(i, k) \end{bmatrix} - \alpha \gamma \begin{bmatrix} Q(k)^{-1} & 0 \\ 0 & -P_\omega \end{bmatrix} \geq 0. \quad (15)$$

由 Schur 补和多凸理论可知, 式(15)等价于

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \lambda_l(k+i) \lambda_j(k+i) \hat{Y}_{lj}^{QB} \geq 0, \quad (16)$$

其中

$$\hat{Y}_{lj}^{QB} = \begin{bmatrix} (1-\alpha)Q(k)^{-1} & * & * & * & * \\ 0 & \alpha P_\omega & * & * & * \\ Q(k)^{-1} \Phi_{lj} & Q(k)^{-1} \Gamma_j & Q(k)^{-1} & * & * \\ Q^{1/2}[C_j \ 0] & 0 & 0 & \gamma I & * \\ \mathcal{R}^{1/2}[D_c C_j \ C_c] & 0 & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix}.$$

由定理1可知, 如果不等式(16)成立, 则闭环增广系统(8)关于对称正定 Lyapunov 矩阵 $Q(k)^{-1}$ 二次有界。

定理2 在 k 时刻, 不等式约束(11)成立的充要条件是: 存在矩阵 $\{\hat{A}_c^l, \hat{B}_c^l, \hat{C}_c^j, \hat{D}_c\}$ 、标量 $\{\alpha, \gamma\}$ 及对称矩阵 $\{M_1, Q_1\}$ 使得下式中线性矩阵不等式成立:

$$\Upsilon^a(i, k) = \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \lambda_l(k+i) \lambda_j(k+i) \Upsilon_{lj}^a \geq 0. \quad (17)$$

而且, 如果式(17)存在可行解, 则控制器 $\mathcal{K}_{\text{DOF}}$ 增益矩阵 $\{\bar{A}_c^l, \bar{B}_c^l, \bar{C}_c^j, \bar{D}_c\}$ 可由下式获得:

$$\begin{cases} \bar{D}_c = \hat{D}_c, \\ \bar{C}_c^j = (\hat{C}_c^j - \bar{D}_c C_j Q_1) Q_2^{-1}, \\ \bar{B}_c^l = M_2^{-T} (\hat{B}_c^l - M_1 \bar{D}_c), \\ \bar{A}_c^l = \\ M_2^{-T} (\hat{A}_c^l - M_1 A_l Q_1 - M_1 \bar{D}_c C_j Q_1 - \\ M_2^T \bar{B}_c^l C_j Q_1 - M_1 \bar{C}_c^j Q_2) Q_2^{-1}, \end{cases} \quad (18)$$

同时 $\{Q_2, M_2\}$ 可由满足 $Q_2^T M_2 = I - Q_1 M_1$ 的任意满秩分解得到。

式(17)中

$$\Upsilon_{lj}^a =$$

$$\begin{bmatrix} (1-\alpha)M_1 & * & * & * & * & * & * \\ (1-\alpha)I & (1-\alpha)Q_1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \alpha P_\omega & * & * & * & * \\ A_l + \hat{D}_c C_j & A_l Q_1 + \hat{C}_c^j & H_l & Q_1 & * & * & * \\ M_1 A_l + \hat{B}_c^l C_j & \hat{A}_c^{lj} & M_1 H_l & I & M_1 & * & * \\ Q^{1/2} C_j & Q^{1/2} C_j Q_1 & 0 & 0 & 0 & \gamma I & * \\ \mathcal{R}^{1/2} \hat{D}_c C_j & \mathcal{R}^{1/2} \hat{C}_c^j & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix}.$$

证明 令

$$Q(k)^{-1} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2^T \\ M_2 & M_3 \end{bmatrix}, \quad Q(k) = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2^T \\ Q_2 & Q_3 \end{bmatrix},$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} I & Q_1 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} I & M_1 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

根据矩阵乘积运算性质, 可以得到 $Q_1 M_2^T + Q_2^T M_3 = 0, M_1 Q_2^T + M_2^T Q_3 = 0$ 。

必要性: 假设 $\{M_2, Q_2\}$ 为满秩矩阵。结合式(18), 可得

$$\begin{cases} \hat{D}_c = \bar{D}_c, \\ \hat{C}_c^j = \bar{D}_c C_j Q_1 + \bar{C}_c^j Q_2, \\ \hat{B}_c^l = M_1 \bar{D}_c + M_2^T \bar{B}_c^l, \\ \hat{A}_c^l = \\ M_1 A_l Q_1 + M_1 \bar{D}_c C_j Q_1 + M_2^T \bar{B}_c^l C_j Q_1 + \\ M_1 \bar{C}_c^j Q_2 + M_2^T \bar{A}_c^l Q_2. \end{cases} \quad (20)$$

结合式(19)和(20), 对不等式(16)左右两边分别乘以 $\text{diag}\{T_1^T, I, T_2^T Q(k), I, I\}$ 和 $\text{diag}\{T_1, I, Q(k) T_2, I, I\}$, 即可得到式(17)。

充分性: 由不等式(17)可知 $Q_1 - M_1^{-1} > 0$ 成立。由 $Q_2^T M_2 = I - Q_1 M_1$ 可知 $\{M_2, Q_2\}$ 都为满秩矩阵, 否则, $Q_1 - M_1^{-1} = -Q_2^T M_2 M_1^{-1}$ 出现欠秩, 即与 $Q_1 - M_1^{-1} > 0$ 矛盾。此时, 对不等式(17)左右两边分别乘以 $\text{diag}\{T_1^{-T}, I, Q^{-1} T_2^{-T}, I, I\}$ 和 $\text{diag}\{T_1^{-1}, I, T_2^{-1} Q^{-1}, I, I\}$, 即可得到式(16)。□

引理1 在 k 时刻, 如果存在对称正定矩阵 $\{M_1, \bar{M}_3, M_4, Q_1\}$ 使得式(21)和(22)中 LMIs 成立, 则约束(10)成立, 即 $\tilde{x}(k) \in \varepsilon_{Q(k)^{-1}}^{[23-26]}$, 有

$$\begin{bmatrix} e(k+i|k) \\ \varpi(k+i) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 & * \\ -M_1 & \bar{M}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(k+i|k) \\ \varpi(k+i) \end{bmatrix} \leq 1, \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_3 & * \\ -M_1 & M_4 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} M_1 - M_4 & * \\ I & Q_1 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (22)$$

定理3 在 k 时刻, 对于闭环增广系统(8), 如果存在矩阵 $\{\hat{A}_c^l, \hat{B}_c^l, \hat{C}_c^j, \hat{D}_c\}$ 、标量 $\{\alpha, \gamma\}$ 及对称矩阵 $\{M_1, \bar{M}_3, M_4, Q_1, \mathcal{Z}\}$ 使得式(17)、(21)~(23)成立, 则

输入约束(12)可以实现. 其中: $\mathcal{Z}_{ss} \leq u_{\max}^2, s \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, L\}$,

$$\begin{bmatrix} M_1 & * & * & * \\ I & Q_1 & * & * \\ 0 & 0 & P_\omega & \\ \sqrt{2}\hat{D}_c C_j & \sqrt{2}\hat{C}_c^j & 0 & \mathcal{Z} - \mathcal{F}(k)\mathcal{F}(k)^T I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (23)$$

证明 由于式(17)、(21)、(22)成立,可以由定理2及引理1得到 $\tilde{x}(k) \in \varepsilon_{Q(k)-1}$. 定义 ζ_s 为 n 阶单位矩阵 I 的第 s 个单位行向量,则由式(5)可得(24)成立.

显然,如果存在对称矩阵 $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}_{ss} \leq u_{\max}^2, s \in \{1, 2, \dots, n\}$ 使得式(25)成立,则 $|u(i|k)| \leq u_{\max}$ 成立, $\forall i \geq 0$. 有

$$\begin{aligned} & \max_{i \geq 0} |\zeta_s u(i|k)|^2 = \\ & \max_{i \geq 0} \left| \zeta_s [F(k+i) \ 0] \begin{bmatrix} \tilde{x}(i|k) \\ \varpi(k+i) \end{bmatrix} - \zeta_s \mathcal{F}(k) \right|^2 \leq \\ & \max_{i \geq 0} \left| \zeta_s [F(k+i) \ 0] \begin{bmatrix} \tilde{x}(i|k) \\ \varpi(k+i) \end{bmatrix} \right|^2 + \\ & \max_{i \geq 0} |\zeta_s \mathcal{F}(k)|^2 \leq \\ & 2 \max_{i \geq 0} \left\| \zeta_s [F(k+i) \ 0] \begin{bmatrix} Q(k) & 0 \\ 0 & P_\omega^{-1} \end{bmatrix}^{1/2} \right\|^2 + \\ & \max_{i \geq 0} \|\zeta_s \mathcal{F}(k)\|^2, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\mathcal{Z} - \mathcal{F}(k)I\mathcal{F}(k)^T - 2[F(k+i) \ 0] \times \begin{bmatrix} Q(k) & 0 \\ 0 & P_\omega^{-1} \end{bmatrix} [F(k+i) \ 0]^T \geq 0, \quad (25)$$

其中 $\mathcal{F}(k) = f(x_s(k|k), k) - f(x_m(k|k), k)$.

进一步,利用Schur补和多凸理论,式(25)等价于下式:

$$\begin{bmatrix} Q^{-1} & * & * \\ 0 & P_\omega & * \\ \sqrt{2}[\hat{D}_c C_j \ \hat{C}_c^j] & 0 & \mathcal{Z} - \mathcal{F}(k)\mathcal{F}(k)^T I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (26)$$

其中 $j \in \{1, 2, \dots, L\}$.

结合式(19)和(20),对不等式(26)左右两边分别乘以 $\text{diag}\{T_1^T, I, I\}$ 和 $\text{diag}\{T_1, I, I\}$,即可得到式(23). $\square$

综上所述,离散混沌主系统 $\mathcal{M}$ 和从系统 $\mathcal{S}$ 的同步控制问题,即基于动态输出反馈鲁棒模型预测控制的混沌同步控制问题,可以归纳为存在持续有界噪声 $\varpi(k)$ 和系统不确定性的情况(max)下最小化(min)问题,如下式所示:

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha, \gamma, \hat{A}_c^{lj}, \hat{B}_c^l, \hat{C}_c^j, \hat{D}_c, Q_1, M_1, \bar{M}_3, M_4, \mathcal{Z}} \gamma; \\ & \text{s.t. 式(17), (21) ~ (23)}. \end{aligned} \quad (27)$$

定理4 在 $k = 0$ 时刻,对于闭环增广系统(8)和有界噪声 $\varpi(k)$,如果存在矩阵 $\{\hat{A}_c^{lj}, \hat{B}_c^l, \hat{C}_c^j, \hat{D}_c\}$ 、标量 $\{\alpha, \gamma\}$ 及对称矩阵 $\{M_1, \bar{M}_3, M_4, Q_1, \mathcal{Z}\}$ 使得优化问题(27)存在可行解,则优化问题(27)在 $k > 0$ 时刻仍然可行,即闭环增广系统(8)将逐步收敛.

定理4的证明过程类似于文献[23-26]中关于约束(准)LPV系统动态输出反馈鲁棒模型预测控制中的可行性证明过程,限于篇幅,此处不再赘述.

3 仿真实例和分析

为了验证基于参数依赖动态输出反馈鲁棒模型预测控制的混沌同步控制效果,将该算法分别应用于2维离散时间Tinkerbell混沌系统和3维Baier-Klein混沌系统的同步控制中.

首先,同步的主动离散时间Tinkerbell混沌系统模型为

$$\begin{cases} x_1(k+1|k) = \\ \omega(\sin(x_1(k|k))^2 - \cos(x_2(k|k))^2) + \\ ax_1(k|k) + bx_2(k|k), \\ x_2(k+1|k) = \\ p \sin(x_1(k|k)) \cos(x_2(k|k)) + \\ cx_1(k|k) + dx_2(k|k). \end{cases} \quad (28)$$

其中:参数 $a = 0.9, b = -0.6, c = 0.9, d = 0.5, \omega = 0.1, p = 0.2$ 时,离散时间Tinkerbell系统处于混沌状态^[27].

假设主从离散时间Tinkerbell混沌系统的状态观测矩阵 $C = [-1, 0; 0, 0.5]$,系统干扰 $\varpi = [-0.1, 0.1]$,干扰增益矩阵 $H = 0.2$. 主从Tinkerbell混沌系统的状态初始条件分别为 $x_m(0) = (-0.64, -0.72)^T, x_s(0) = (0.1, 0.1)^T$.

求解优化问题(27)的其他仿真参数分别设置为: $P_\omega = 100, Q = 1, \mathcal{R} = 0.1, u_{\max} = [1, 1]^T, a \in [0.3, 0.5], \alpha = 0.5$. 采用式(5)所示的动态输出反馈控制器 $\mathcal{K}_{\text{DOF}}$ 作为从系统输入,主从混沌系统仿真结果如图2和图3所示. 由图2可以得出,在参数不确定性及有界噪声干扰的情况下,Tinkerbell从系统的每个状态都可以很好地跟踪主系统状态变化. 由图3可以看出控制量满足输入约束条件.

另外,考虑具有3维结构的离散时间Baier-Klein混沌系统模型为

$$\begin{cases} x_1(k+1|k) = -ax_3(k|k) - x_2(k|k)^2 + b, \\ x_2(k+1|k) = x_1(k+1|k), \\ x_3(k+1|k) = x_2(k+1|k). \end{cases} \quad (29)$$

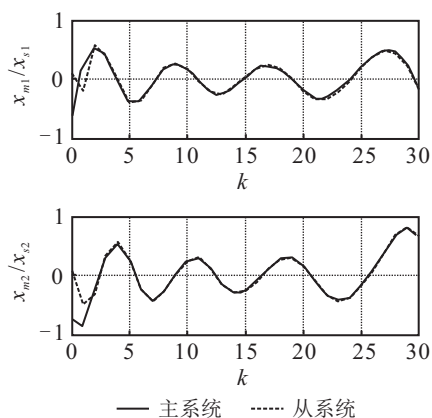


图2 Tinkerbell系统状态同步轨迹

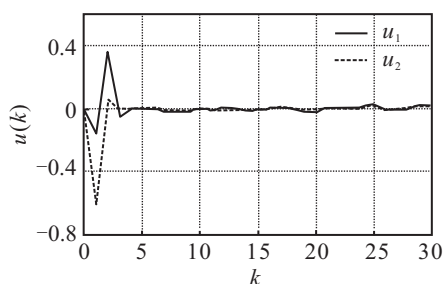


图3 Tinkerbell系统的控制量曲线

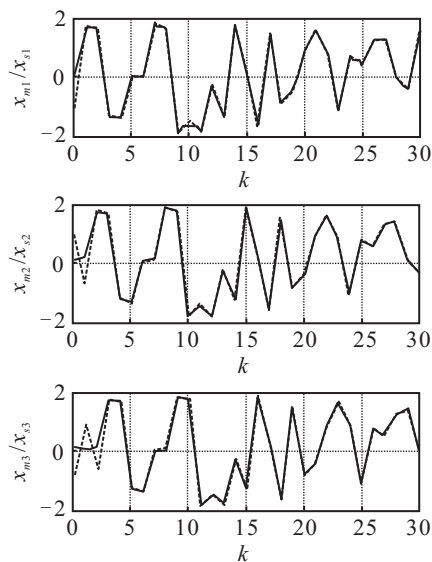


图4 Baier-Klein系统状态同步轨迹

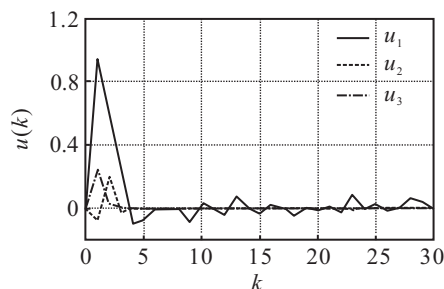


图5 Baier-Klein系统的控制量曲线

其中:参数 $a = 0.1, b = 1.76$ 时,离散时间Baier-Klein系统处于混沌状态^[28].

与Tinkerbell混沌系统同步类似,主从离散时间Baier-Klein混沌系统的仿真参数为:状态观测矩阵 $C = [0, -1, 0; 0, 0, 0.5; 0, 1, 0]$,系统干扰 $\varpi = [-0.1, 0.1]$,干扰增益矩阵 $H = 0.2$.主从Tinkerbell混沌系统的状态初始条件分别为 $x_m(0) = (0.2, 0.1, 0.2)^T, x_s(0) = (-1, 1, -0.8)^T$.求解优化问题(27)的其他仿真参数分别设置为: $P_\omega = 100, Q = 1, R = 0.1, u_{\max} = [1, 1]^T, a \in [0.05, 0.15], \alpha = 0.9$.采用式(5)所示的动态输出反馈控制器 K_{DOF} 作为从系统输入,主从混沌系统仿真结果如图4和图5所示.显然,仿真结果达到了预期效果,进一步表明了所设计同步控制器的鲁棒性和有效性.

4 结 论

本文针对一类离散时间不确定混沌系统的同步控制问题,基于主动控制和二次有界的概念,提出了一种基于参数依赖动态输出反馈鲁棒模型预测控制的混沌同步控制算法.利用主动控制策略,解决了在处理输入约束及动态输出控制器优化求解过程中难以预测混沌系统中的非线性项的问题.利用二次有界概念,基于min-max思想,解决了持续有界噪声及系统不确定性对混沌系统状态同步的扰动问题.最后,将控制器的求解问题转化为LMI描述的有限维凸优化问题,便于计算机求解.仿真结果表明,所设计的参数依赖动态输出反馈控制器对于系统不确定性及有界噪声干扰都具有较强的鲁棒性,因而具有良好的实践意义.

参考文献(References)

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems[J]. Physical Review Letters, 1990, 64(8): 821-824.
- [2] Ott E, Grebogi C, Yorke J. Controlling chaos[J]. Physical Review Letters, 1990, 64(11): 1196-1199.
- [3] Branislav J. Synchronization techniques for chaotic communication systems[M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
- [4] Halimi M, Millérioux G. An LPV framework for chaos synchronization in communication[J]. European Physical J Special Topics, 2014, 223(8): 1481-1493.
- [5] Jiang N, Pan W, Yan L S, et al. Chaos synchronization and communication in mutually coupled semiconductor lasers driven by a third laser[J]. IEEE/OSA J of Lightwave Technology, 2010, 28(13): 1978-1986.
- [6] Mosekilde E, Maistrenko Y, Postnov D. Chaotic synchronization applications to living systems[M]. World

- Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2002.
- [7] Cuomo K M, Oppenheim A V. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications[J]. *Physical Review Letters*, 1993, 71(1): 65-68.
- [8] Mao B X, Zhang Y X. Finite-time chaos synchronization of complex network systems with nonlinear coupling[J]. *J of Jilin University*, 2015, 52(4): 757-761.
- [9] Agiza H N, Yassen M T. Synchronization of Rossler and Chen chaotic dynamical systems using active control[J]. *Physics Letters A*, 2001, 278(4): 191-197.
- [10] Yu S H, Hyun C H, Park M. Control and synchronization of new hyperchaotic system using active backstepping design[J]. *Int J of Fuzzy Logic & Intelligent Systems*, 2011, 11(2): 143-148.
- [11] Liang Y, Marquez H J. Gain scheduling synchronization method for quadratic chaotic systems[J]. *IEEE Trans on Circuits & Systems I Regular Papers*, 2008, 55(4): 1097-1107.
- [12] Liang Y, Marquez H J. Robust gain scheduling synchronization method for quadratic chaotic systems with channel time delay[J]. *IEEE Trans on Circuits & Systems I Regular Papers*, 2009, 56(3): 604-615.
- [13] Yau H T, Yan J J. Design of sliding mode controller for Lorenz chaotic system with nonlinear input[J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2004, 19(4): 891-898.
- [14] Yu S H, Hyun C H, Park M. Backstepping control and synchronization for 4-D lorenz- stenflo chaotic system with single input[J]. *Int J of Fuzzy Logic & Intelligent Systems*, 2011, 11(3): 143-148.
- [15] 张园, 徐琦, 孙明伟, 等. 基于快速全线性预测控制的混沌系统控制与同步[J]. *物理学报*, 2015, 64(1): 47-53.
(Zhang Y, Xu Q, Sun M W, et al. Control and synchronization in chaotic systems based on fast linear predictive control[J]. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64(1): 47-53.)
- [16] 王树恩, 窦金梅, 刘福才, 等. Hénon 混沌系统的模糊广义预测控制与同步[J]. *模糊系统与数学*, 2014, 28(1): 138-151.
(Wang S E, Dou J M, Liu F C, et al. Fuzzy generalized predictive control and synchronization of Hénon chaotic system[J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*. 2014, 28(1): 138-151.)
- [17] 刘福才, 梁晓明. Hénon 混沌系统的广义预测控制与同步快速算法[J]. *物理学报*, 2005, 54(10): 4584-4589.
(Liu F C, Liang X M. A fast algorithm for generalized predictive control and synchronization of Hénon chaotic system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, 54(10): 4584-4589.)
- [18] 温淑焕, 王哲, 刘福才. Hénon 混沌系统的自适应广义预测控制快速算法[J]. *物理学报*, 2009, 58(6): 3573-3578.
(Wen S H, Wang Z, Liu F C. A fast algorithm for adaptive generalized predictive control of Hénon chaotic system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(6): 3573-3578.)
- [19] 温淑焕. Hénon 混沌系统的自适应预测函数控制快速算法[J]. *物理学报*, 2009, 58(8): 5209-5213.
(Wen S H. A fast algorithm for adaptive generalized predictive control of Hénon chaotic system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(8): 5209- 5213.)
- [20] 陈志旺, 刘文龙. Hénon 混沌系统广义预测控制无静差快速算法[J]. *物理学报*, 2011, 60(1): 120-124.
(Chen Z W, Liu W L. A fast algorithm without static error for generalized predictive control of Hénon chaotic system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, 60(1): 120-124.)
- [21] 席裕庚, 李德伟. 预测控制定性综合理论的基本思路和研究现状[J]. *自动化学报*, 2008, 34 (10): 1225-1234.
(Xi Y G, Li D W. Fundamental philosophy and status of qualitative synthesis of model predictive control[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(10): 1225-1234.)
- [22] Zhang L, Liu X. The synchronization between two discrete-time chaotic systems using active robust model predictive control[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 74(4): 905-910.
- [23] Ding B C. Constrained robust model predictive control via parameter-dependent dynamic output feedback[J]. *Automatica*, 2010, 46(9): 1517-1523.
- [24] Ding B C, Huang B, Xu F W. Dynamic output feedback robust model predictive control[J]. *Int J of Systems Science*, 2011, 42(10): 1669-1682.
- [25] Ping X B, Ding B C. An off-line approach to dynamic output feedback robust model predictive control[J]. *Systems & Control Letters*, 2013, 62(62): 1038-1048.
- [26] Ding B C, Gao C B, Ping X B. Dynamic output feedback robust MPC using general polyhedral state bounds for the polytopic uncertain system with bounded disturbance[J]. *Asian J of Control*, 2015, 18(2): 699-708.
- [27] Ding K, Xu X. Chaotic synchronization of modified discrete-time tinkerbell systems[J]. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2016, <http://dx.doi.org/10.1155/2016/5218080>.
- [28] Diao M, Yu Y G, Wang S. The hybrid function projective synchronization of discrete chaotic systems[C]. 2009 Int Workshop on Chaos- Fractals Theories and Applications. 2009.

(责任编辑: 李君玲)