

# 基于Huber的鲁棒广义高阶容积卡尔曼滤波算法

秦 康, 董新民, 陈 勇<sup>†</sup>, 刘棕成, 李洪波

(空军工程大学 航空航天工程学院, 西安 710038)

**摘 要:** 为提高随机变量非高斯分布时广义高阶容积卡尔曼滤波(GHCKF)的鲁棒性, 提出一种基于 Huber 的鲁棒 GHCKF 算法. 从近似贝叶斯估计角度, 解释 Huber 方法作用于卡尔曼滤波的本质是对新息进行截断平均. 采用 Huber 方法处理观测量, 进行标准的 GHCKF 量测更新, 从而实现算法的鲁棒化. 所提出算法充分利用容积变换的优势, 无需通过统计线性回归模型对系统的非线性量测模型进行近似. 仿真结果表明, 所提出算法具有鲁棒性强和估计精度高的特点.

**关键词:** 卡尔曼滤波; Huber 方法; 容积准则; 鲁棒性

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Huber-based robust generalized high-degree cubature Kalman filter

QIN Kang, DONG Xin-min, CHEN Yong<sup>†</sup>, LIU Zong-cheng, LI Hong-bo

(College of Aeronautics and Astronautics Engineering, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

**Abstract:** To further improve the filtering accuracy and robustness of generalized high-degree cubature Kalman filter when the random variable is with non-Gaussian distribution, a filtering algorithm named Huber-based robust generalized high-degree cubature Kalman filter algorithm is proposed. It is interpreted that the basic idea of the Huber method acting on the Kalman filter can be described as truncating the average from the perspective of recursive Bayesian approximation estimation. The observation vector is preprocessed by using the Huber method, and the normal measurement update is implemented, so that the robustness of the GHCKF algorithm is realized. The proposed method doesn't need approximating nonlinear measurements model by using the statistical linear regression model. The simulation results show that the proposed method has superior performance in robustness and estimation precision.

**Keywords:** Kalman filter; Huber method; cubature rule; robustness

## 0 引 言

非线性滤波的核心任务是对状态的后验概率密度函数(PDF)进行计算<sup>[1]</sup>, 基于“对概率分布进行近似要比对非线性函数进行近似要容易”的认识, 发展出包括无迹卡尔曼滤波(UKF)<sup>[2]</sup>、差分滤波(DDF)<sup>[3]</sup>、高斯-埃尔米特卡尔曼滤波(GHKF)<sup>[1]</sup>、容积卡尔曼滤波<sup>[4]</sup>、高阶CKF(HCKF)<sup>[5]</sup>、广义高阶CKF(GHCKF)<sup>[6]</sup>等在内的多种次优非线性滤波方法. 其中, 文献[6]提出的GHCKF在获得更高滤波精度的同时, 进一步克服了HCKF结构复杂、高阶扩展性差的问题.

统计学意义下, 随机变量服从非高斯分布时, 包括GHCKF在内的基于 $l_2$ 范数最小的估计方法的估计效果会变差. 为解决随机变量的非高斯分布问题, 结合Huber方法<sup>[7]</sup>, Karlgaard等<sup>[8]</sup>从DDF的

统计线性回归观点<sup>[9]</sup>提出了基于Huber方法的鲁棒DDF. Wang等<sup>[10]</sup>研究了基于Huber估计的UKF(HUKF)在视频相对导航中的应用. 黄玉等<sup>[11]</sup>基于Huber估计原理推导了线性化近似回归估计和直接非线性回归的鲁棒CKF滤波算法. 张文杰等<sup>[12]</sup>通过统计线性回归模型来近似系统的非线性量测模型, 提出了基于Huber的HCKF目标跟踪算法. Lefebvre等<sup>[9]</sup>指出, 无迹变换(UT)是在方差传递时考虑了线性化误差补偿的统计线性回归, 如果用回归得到的线性模型进行方差的传递, 而不是如UT或者容积变换(CT)一样考虑线性化误差补偿, 则会低估传递方差, 影响滤波精度.

针对上述问题, 本文从近似贝叶斯估计角度解释Huber方法作用于卡尔曼滤波的机理, 利用Huber方

收稿日期: 2016-11-15; 修回日期: 2017-01-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61304120, 61473307, 61603411); 航空科学基金项目(20155896026).

作者简介: 秦康(1992—), 男, 博士生, 从事多导航、制导与控制的研究; 董新民(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事飞行器控制理论及运用等研究.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: chen\_y\_043@163.com

法对观测量进行预处理,通过标准GHCKF的量测更新算法对非线性观测方程进行滤波,无需对非线性观测方程进行线性化近似,在GHCKF框架内实现算法的鲁棒化.所提出算法与基于统计线性化认识的鲁棒GHCKF相比,滤波精度和鲁棒性都得到有效改善.单变量非平稳增长模型和再入飞行器目标跟踪问题的应用,验证了所提出算法的良好估计性能.

## 1 广义高阶容积卡尔曼滤波算法

考虑如下形式的离散非线性系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \boldsymbol{\omega}_{k-1}, \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$  和  $\mathbf{z}_k \in \mathbf{R}^m$  分别为系统状态向量和量测向量;  $\boldsymbol{\omega}_{k-1}$  和  $\mathbf{v}_k$  分别为独立的零均值系统状态高斯白噪声和量测高斯白噪声,且分别满足  $E[\boldsymbol{\omega}_k \boldsymbol{\omega}_l^T] = \mathbf{Q}_k \delta_{kl}$  和  $E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_l^T] = \mathbf{R}_k \delta_{kl}$ ,  $\delta_{kl}$  是 Kronecker- $\delta$  函数; 初始状态  $\mathbf{x}_0$  与  $\boldsymbol{\omega}_k$  和  $\mathbf{v}_k$  无关.

非线性滤波难点在于求解形如

$$I(\mathbf{g}) = \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{g}(\mathbf{x}) N(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{P}) d\mathbf{x} \quad (2)$$

的积分问题,  $\hat{\mathbf{x}}$  和  $\mathbf{P}$  为状态变量  $\mathbf{x}$  的估计值和方差.

传统CKF中正的容积点权值会导致估计点越界或者产生形式复杂的估计点,而且当  $n$  足够大时,容积点可能超出积分区域<sup>[13]</sup>. HCKF将球面-径向积分进行高阶拓展需同时提升容积准则和高斯-拉盖尔准则的阶数,并计算  $n$  维超球体的面积分,计算过程复杂,导致CKF算法的高阶扩展性较差.为克服上述问题,Zhang<sup>[6]</sup>从数值积分的角度出发,提出了形式简洁、计算高效、扩展性更好的GHCKF.

考虑实数域  $\mathbf{R}^n$  上积分

$$I(\mathbf{g}) = \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \exp(-\mathbf{x}^T \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3)$$

对式(3)进行计算,选取第一、第二及第三  $\mathbf{G}$ -轨迹<sup>[13]</sup>,构成广义五阶容积积分公式<sup>[14]</sup>,即

$$I(\mathbf{g}) = \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \exp(-\mathbf{x}^T \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \hat{W}_0 \mathbf{g}([0]) + \hat{W}_1 \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{g}([u_1]_i) + \hat{W}_{1,1} \sum_{i=1}^{2n(n-1)} \mathbf{g}([u_1, u_1]_i). \quad (4)$$

其中:  $\hat{W}_0$ 、 $\hat{W}_1$  和  $\hat{W}_{1,1}$  是相对于  $\mathbf{G}$ -轨迹  $[0]$ 、 $[u_1]$  和  $[u_1, u_1]$  的权值,  $n$  为系统状态维数. 利用式(4)计算  $\{1, x_i^2, x_i^4, x_i^2 x_j^2 | i \neq j\}$  的积分,有

$$\begin{bmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 2u_1^2 & 4(n-1)u_1^2 \\ 0 & 2u_1^4 & 4(n-1)u_1^4 \\ 0 & 0 & 4u_1^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{W}_0 \\ \hat{W}_1 \\ \hat{W}_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \\ I_2 \\ I_4 \\ I_{2,2} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{\mathbf{R}^n} \exp(-\mathbf{x}^T \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sqrt{\pi^n}, \\ I_2 &= \int_{\mathbf{R}^n} x_1^2 \exp(-\mathbf{x}^T \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sqrt{\pi^n}/2, \\ I_4 &= \int_{\mathbf{R}^n} x_i^4 \exp(-\mathbf{x}^T \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 3\sqrt{\pi^n}/4, \\ I_{2,2} &= \int_{\mathbf{R}^n} x_i^2 x_j^2 \exp(-\mathbf{x}^T \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sqrt{\pi^n}/4. \end{aligned}$$

方程组(5)中,仅有  $u_1$ 、 $\hat{W}_0$ 、 $\hat{W}_1$  和  $\hat{W}_{1,1}$  四个未知,求解可得唯一解

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{3/2}, \\ \hat{W}_0 = \sqrt{\pi^n}(1 - (7-n)n/18), \\ \hat{W}_1 = \sqrt{\pi^n}[(4-n)/18], \\ \hat{W}_{1,1} = \sqrt{\pi^n}/36. \end{cases} \quad (6)$$

将式(4)变换至标准高斯分布,可得

$$\begin{aligned} I(\mathbf{g}) &= \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{g}(\mathbf{x}) N(\mathbf{x}; 0, \mathbf{I}) d\mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{g}(\sqrt{2}\mathbf{x}) \exp(-\mathbf{x}^T \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\ &= \left(1 - \frac{(7-n)n}{18}\right) \mathbf{g}([0]) + \frac{4-n}{18} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{g}([\sqrt{3}]_i) + \\ &= \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{2n(n-1)} \mathbf{g}([\sqrt{3}, \sqrt{3}]_i) = \sum_{i=1}^{2n^2+1} \omega_i \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}_i). \quad (7) \end{aligned}$$

其中: 容积点  $\boldsymbol{\xi}_i$  和权值  $\omega_i$  分别为

$$\boldsymbol{\xi}_i = \begin{cases} [0]_i, & i = 1; \\ [\sqrt{3}]_i, & i = 2, \dots, 2n+1; \\ [\sqrt{3}, \sqrt{3}]_i, & i = 2n+2, \dots, 2n^2+1. \end{cases} \quad (8)$$

$$\omega_i = \begin{cases} (1 - (7-n)n/18), & i = 1; \\ (4-n)/18, & i = 2, \dots, 2n+1; \\ 1/36, & i = 2n+2, \dots, 2n^2+1. \end{cases} \quad (9)$$

将式(7)和(8)置于高斯滤波框架下,即可得到标准GHCKF算法.通过选取更高阶的  $\mathbf{G}$ -轨迹,可构造出任意阶的CKF算法.与其他高斯滤波方法相似,GHCKF由时间更新和量测更新两部分组成,区别在于采样点以及采样点权值不同.对比文献[5]和文献[6]可以发现, HCKF 和 GHCKF 的采样点相同,但 HCKF 采样点的系数为  $\sqrt{n+2}$ ,在高维问题中易产生非局部采样问题,而GHCKF采样点的系数为常值  $\sqrt{3}$ ,避免了上述问题.

## 2 基于Huber方法的鲁棒GHCKF

### 2.1 卡尔曼滤波的近似贝叶斯估计解释

考虑线性统计状态空间模型

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \end{cases} \quad (10)$$

其中:  $\mathbf{F}_{k-1}$  和  $\mathbf{H}_k$  为状态转移矩阵和观测矩阵,  $\mathbf{w}_{k-1} \sim N(\mathbf{w}; 0, \mathbf{Q}_{k-1})$  和  $\mathbf{v}_k \sim N(\mathbf{v}; 0, \mathbf{R}_k)$  为状态噪声和观测噪声,  $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$  和  $\mathbf{y}_k \in \mathbf{R}^m$  为  $k$  时刻的状态和观测. 令  $\hat{\mathbf{x}}_{k|l}$  ( $l = k-1, k$ ) 表示  $\{\mathbf{y}_j, j < l\}$  观测信息下  $\mathbf{x}_k$  的估计,  $\mathbf{P}_{k|l}$  是对应的方差. 初始状态  $\mathbf{x}_0$  与  $\mathbf{w}_k$  和  $\mathbf{v}_k$  无关.

由贝叶斯准则及状态概率分布模型的Markov特性可知

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \int \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_k, \quad (11)$$

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})}. \quad (12)$$

其中:  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$  为  $k$  时刻状态的后验概率密度,  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})$  由状态的先验概率密度  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})$ 、似然概率密度  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$  以及归一化常数  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})$  组成. 令  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = p(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$ .

将式(12)代入(11),得

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \frac{1}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})} \mathbf{P}_{k|k-1} \int p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) \times (\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})) p(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k. \quad (13)$$

由于卡尔曼滤波中状态预测符合高斯分布,即

$$p(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) = N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}), \quad (14)$$

对式(14)两边求导,可得

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} p(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) = -\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) p(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}). \quad (15)$$

将式(15)代入(13),可得

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \frac{1}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})} \mathbf{P}_{k|k-1} \times \int p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_k} p(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k. \quad (16)$$

似然概率密度为观测值与其预测值之差的函数,即

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) = p(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k). \quad (17)$$

将式(17)代入(16),可得

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \frac{1}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})} \mathbf{P}_{k|k-1} \times \int p(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \cdot \mathbf{H}_k^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_k} p(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k. \quad (18)$$

因观测是独立同分布的,故

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_k} p(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_k} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = 0. \quad (19)$$

综合式(18)和(19),可得

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \frac{1}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})} \mathbf{P}_{k|k-1} \times \mathbf{H}_k^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_k} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}). \quad (20)$$

式(20)可写为如下形式:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{P}_{k|k-1} \times \mathbf{H}_k^T \left( -\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_k} \ln p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) \right). \quad (21)$$

定义新息  $\mathbf{s}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$  及其方差  $\mathbf{S}_k$ , 定义变换新息  $\boldsymbol{\eta}_k = \mathbf{S}_k^{-1/2} \mathbf{s}_k$ , 得到

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{S}_k^{1/2} \boldsymbol{\eta}_k + \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}. \quad (22)$$

综合式(21)和(22),可得

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{P}_{k|k-1} \times \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1/2} \left( -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}_k} \ln p(\boldsymbol{\eta}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) \right). \quad (23)$$

令

$$\psi(\boldsymbol{\eta}_k) = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}_k} \ln p(\boldsymbol{\eta}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}), \quad (24)$$

将式(24)代入(23),可得

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1/2} \psi(\boldsymbol{\eta}_k). \quad (25)$$

由于观测和新息独立同分布,有

$$p(\boldsymbol{\eta}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = \prod_{i=1}^m p(\boldsymbol{\eta}_{k,i}), \quad (26)$$

其中  $\boldsymbol{\eta}_{k,i}$  为  $\boldsymbol{\eta}_k$  的第  $i$  项. 将式(26)代入(24),可得

$$\psi(\boldsymbol{\eta}_k) = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}_k} \sum_{i=1}^m \ln p(\boldsymbol{\eta}_{k,i}). \quad (27)$$

定义如下函数:

$$\phi(\boldsymbol{\eta}_{k,i}) = -p'(\boldsymbol{\eta}_{k,i})/p(\boldsymbol{\eta}_{k,i}), \quad (28)$$

$$\varphi(\boldsymbol{\eta}_{k,i}) = \phi(\boldsymbol{\eta}_{k,i})/\boldsymbol{\eta}_{k,i}. \quad (29)$$

令  $\boldsymbol{\Theta}_k = \text{diag}[(\varphi(\boldsymbol{\eta}_{k,i}))]$ , 则有

$$\psi(\boldsymbol{\eta}_k) = \mathbf{S}_k^{-1/2} \boldsymbol{\Theta}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}). \quad (30)$$

假设变换新息符合高斯分布,则式(30)可简化为

$$\psi(\boldsymbol{\eta}_k) = \mathbf{S}_k^{-1/2} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}). \quad (31)$$

在高斯分布假设下

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k, \quad (32)$$

将式(32)代入(25),得

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \times (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}). \quad (33)$$

可以发现,式(33)是卡尔曼滤波中的状态更新方程. 在上述推导过程中假设新息符合高斯分布,则当观测信息含有干扰噪声或野值时,新息符合高斯分布的假

设不再满足,从而导致滤波效果降低.

## 2.2 基于近似贝叶斯估计的卡尔曼滤波鲁棒化

Huber提出了一种代价函数

$$\rho(\tau) = \begin{cases} 0.5\tau^2, & |\tau| \leq \gamma; \\ \gamma|\tau| - 0.5\gamma^2, & |\tau| > \gamma. \end{cases} \quad (34)$$

其中 $\gamma$ 为调节因子.

Aravkin等指出,存在变量 $\varsigma \in \mathbf{R}^m$ 和 $\zeta \in \mathbf{R}^m$ 使得 $\exp[-\rho(\zeta_i t)]$ 是一概率密度. 变量 $\zeta$ 可由下式计算:

$$\zeta_i^2 = \frac{\sqrt{2\pi} \operatorname{erf}(\gamma/\sqrt{2}) + 4 \exp(-\gamma^2/2)(\gamma^{-1} + \gamma^{-3})}{\sqrt{2\pi} \operatorname{erf}(\gamma/\sqrt{2}) + 2 \exp(-\gamma^2/2)\gamma^{-1}}. \quad (35)$$

其中:  $\operatorname{erf}$ 表示误差函数,其公式为

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt; \quad (36)$$

变量 $\varsigma$ 不影响后续讨论.

基于Huber代价函数的变换新息概率密度为

$$p(\boldsymbol{\eta}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = \prod_{i=1}^m \frac{1}{\varsigma_i} \exp(-\rho(\zeta_i \boldsymbol{\eta}_{k,i})), \quad (37)$$

则有

$$p(\boldsymbol{\eta}_{k,i}) = \frac{1}{\varsigma_i} \exp(-\rho(\zeta_i \boldsymbol{\eta}_{k,i})). \quad (38)$$

定义如下函数:

$$\phi(\boldsymbol{\eta}_{k,i}) = -p'(\boldsymbol{\eta}_{k,i})/p(\boldsymbol{\eta}_{k,i}), \quad (39)$$

$$\varphi(\boldsymbol{\eta}_{k,i}) = \phi(\boldsymbol{\eta}_{k,i})/\boldsymbol{\eta}_{k,i}, \quad (40)$$

则有

$$\varphi(\boldsymbol{\eta}_{k,i}) = \begin{cases} \zeta_i, & |\boldsymbol{\eta}_{k,i}| < \gamma; \\ \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\eta}_{k,i})\gamma\zeta_i/\boldsymbol{\eta}_{k,i} - 0.5\gamma^2, & |\boldsymbol{\eta}_{k,i}| > \gamma. \end{cases} \quad (41)$$

其中 $\operatorname{sgn}(n)$ 表示符号函数. 令 $\boldsymbol{\Theta}_k = \operatorname{diag}[\varphi(\boldsymbol{\eta}_{k,i})]$ ,并将式(27)重写为

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\eta}_k) = \mathbf{S}_k^{-1/2} \boldsymbol{\Theta}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}). \quad (42)$$

将式(42)代入(25),可得

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{P}_{k|k-1} \times \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \boldsymbol{\Theta}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}). \quad (43)$$

Masreliez等已经研究过此类估计问题的方差求解方法,并指出后验状态方差可表示为

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \ell(k). \quad (44)$$

其中: $\ell(k)$ 是一标量,可由下式计算得到:

$$\ell(k) = (1 - \varepsilon)(1 - 2\Phi(-k)). \quad (45)$$

$0 \leq \varepsilon \leq 1$ ,  $\Phi$ 是标准高斯分布函数.

对比式(33)和(43)可以发现,鲁棒化的状态估计方程只在新息前增加一个权矩阵,Huber方法对卡尔曼滤波进行鲁棒化的本质是对新息进行截断平均. 基于这一认识,将Huber方法引入GHCKF算法中,构造基于Huber的鲁棒GHCKF.

## 2.3 基于新息修正的鲁棒GHCKF

记 $\hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ ,  $\mathbf{P}_{xy,k} = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T$ 以及 $\mathbf{P}_{yy,k} = \mathbf{S}_k$ ,则式(43)和(44)可以表示为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{P}_{xy,k} \mathbf{P}_{yy,k}^{-1} \boldsymbol{\Theta}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k), \quad (46)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{xy,k} \mathbf{P}_{yy,k}^{-1} \mathbf{P}_{xy,k}^T \ell(k). \quad (47)$$

由上式可见,  $\boldsymbol{\Theta}_k$ 和 $\ell(k)$ 并未影响观测信息的统计量 $\hat{\mathbf{y}}_k$ 、 $\mathbf{P}_{xy,k}$ 和 $\mathbf{P}_{yy,k}$ . 基于新息修正的鲁棒化方法无需对GHCKF中的CT过程作任何近似,只需修正相应的信息即可.

下面针对利用观测信息设计鲁棒化的GHCKF算法,对于非线性统计状态空间模型(1),基于新息修正的鲁棒GHCKF滤波过程如下.

假设 $k-1$ 时刻的状态向量 $\mathbf{x}$ 满足统计特性 $\mathbf{x}_{k-1|k-1} \sim N(\mathbf{x}_{k-1|k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1})$ ,则基于新息修正的GHCKF具体算法如下:

1) 基于GHCKF时间更新获得的状态均值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 和方差 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 进行sigma点重采样,有

$$\mathbf{X}_{i,k|k-1} = \sigma(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}). \quad (48)$$

2) 将 $\mathbf{X}_{i,k|k-1}$ 在非线性观测方程中传递,即

$$\mathbf{Z}_{i,k|k-1} = \mathbf{h}(\mathbf{X}_{i,k|k-1}). \quad (49)$$

3) 根据CT方法计算观测预测均值、方差及其与状态的协方差,即

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^{2n^2+1} \omega_i \mathbf{Z}_{i,k|k-1}, \quad (50)$$

$$\mathbf{P}_{zz,k|k-1} = \sum_{i=1}^{2n^2+1} \omega_i (\mathbf{Z}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}) \times (\mathbf{Z}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T + \mathbf{R}_k, \quad (51)$$

$$\mathbf{P}_{xz,k|k-1} = \sum_{i=1}^{2n^2+1} \omega_i (\mathbf{X}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \times (\mathbf{Z}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T. \quad (52)$$

4) 计算变换新息 $\boldsymbol{\eta}_k$ ,即

$$\boldsymbol{\eta}_k = \mathbf{P}_{zz,k|k-1}^{-1/2} (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}). \quad (53)$$

5) 计算变换新息 $\varphi(\boldsymbol{\eta}_{k,i})$ ,有

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt; \quad (54)$$

$$\zeta_i^2 = \frac{\sqrt{2\pi} \operatorname{erf}(\gamma/\sqrt{2}) + 4 \exp(-\gamma^2/2)(\gamma^{-1} + \gamma^{-3})}{\sqrt{2\pi} \operatorname{erf}(\gamma/\sqrt{2}) + 2 \exp(\gamma^2/2)\gamma^{-1}}; \quad (55)$$

$$\varphi(\boldsymbol{\eta}_{k,i}) = \begin{cases} \zeta_i, & |\boldsymbol{\eta}_{k,i}| < \gamma; \\ \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\eta}_{k,i})\gamma\zeta_i/|\boldsymbol{\eta}_{k,i}| - 0.5\gamma^2, & |\boldsymbol{\eta}_{k,i}| > \gamma. \end{cases} \quad (56)$$

其中: Huber 代价函数中的调节因子  $\gamma$  设置为  $\gamma = 1.345^{[12]}$ , 令  $\boldsymbol{\Theta}_k = \operatorname{diag}[\varphi(\boldsymbol{\eta}_{k,i})]$ .

6) 计算  $\ell(k)$ , 即

$$\ell(k) = (1 - \varepsilon)(1 - 2\Phi(-k)). \quad (57)$$

7) 进行均值  $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$  和方差  $\boldsymbol{P}_{k|k}$  估计, 即

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{P}_{k|k-1} \boldsymbol{P}_{zz,k|k-1}^{-1} \boldsymbol{\Theta}_k (\boldsymbol{z}_k - \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}), \quad (58)$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k} = \boldsymbol{P}_{k|k-1} - \boldsymbol{P}_{xz,k|k-1} \boldsymbol{P}_{zz,k|k-1}^{-1} \boldsymbol{P}_{xz,k|k-1}^T \ell(k). \quad (59)$$

可以看出, 本文提出的鲁棒 GHCKF 算法, 没有如文献 [12] 一样对观测方程进行线性化近似, 从而保持了 CT 在方差传递中原有的精度优势.

### 3 仿真验证

分别比较以下 3 种算法: 传统的 GHCKF 算法<sup>[6]</sup>、基于统计线性化认识的 Huber 鲁棒 GHCKF 算法 (记为 HGHCKF1) 和本文提出的基于近似贝叶斯估计认识的 Huber 鲁棒 GHCKF 算法 (记为 HGHCKF2).

#### 3.1 单变量非平稳增长模型

单变量非平稳增长模型的系统方程如下:

$$\begin{cases} x_k = 0.5x_{k-1} + 25 \frac{x_{k-1}}{1 + x_{k-1}^2} + 8 \cos(1.2(k-1)) + w_{k-1}, \\ y_k = \frac{x_k^2}{20} + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, K. \end{cases}$$

其中: 系统噪声  $w_{k-1} \sim N(w; 0, 1)$ , 仿真时间  $K = 500$ , 仿真时用于产生仿真数据的初始真值  $x_0 = 0.1$ . 观测噪声服从如下形式的干扰高斯分布:

$$v_k \sim (1 - \alpha)N(v_k; 0, \sigma_1^2) + \alpha N(v_k; 0, \lambda\sigma_1^2).$$

其中:  $\alpha$  为干扰因子, 设为 0.3;  $\lambda$  是干扰高斯分布方差相对于主高斯分布方差的比重. 仿真实验中, 令  $\sigma_1 = 1$ ,  $\lambda$  依次设置为 1 ~ 20 之间的整数. 通过以下指标比较 3 种滤波算法的性能:

$$\text{MMSE}(\lambda) = \operatorname{mean}(\text{MSE}(1 : M)), \quad \forall \lambda \in [1 : 20]; \quad (60)$$

$$\text{MSE}(m) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (x_k - \hat{x}_k)^2, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (61)$$

$M = 50$  表示 Monte Carlo 仿真次数. 初始滤波条件设为  $\hat{x}_{0|0} = 0, P_{0|0} = 1$ , Huber 代价函数的调节因子设为  $\gamma = 1.345$ . 3 种滤波算法的 MMSE 如图 1 所示.

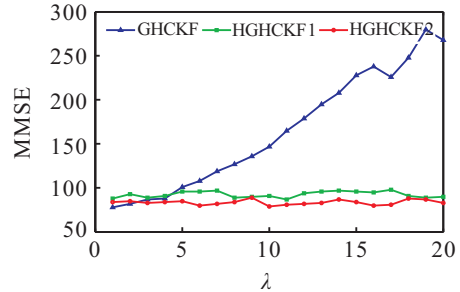


图 1 3 种滤波算法在不同  $\lambda$  下的 MMSE

由图 1 可以看出: 当  $\lambda = 1$  时 (观测噪声服从高斯分布) GHCKF 精度最高, 说明高斯分布条件下基于  $l_2$  范数最小的估计方法具有更高的精度, 而基于  $l_1/l_2$  混合代价函数最小的估计方法精度降低. 随着  $\lambda$  的增大 (干扰高斯分布的影响增大), GHCKF 估计精度明显下降, 说明统计学意义下基于  $l_2$  范数最小的估计方法不具有鲁棒性. 而两种基于 Huber 方法的鲁棒 GHCKF 算法的精度基本上不受干扰高斯分布的影响, 具有良好的鲁棒性. 同时 HGHCKF2 相对于 HGHCKF1 具有明显的精度优势, 这是因为 HGHCKF1 在利用 GHCKF 的统计线性化方法时忽略了线性化误差补偿量, 丢失了部分滤波精度, 而 HGHCKF2 充分利用了 GHCKF 的精度优势, 算法精度更高.

为了进一步说明干扰高斯分布下 HGHCKF2 相对于 GHCKF 和 HGHCKF1 的精度优势, 令  $\sigma_1 = 1, \lambda = 15$ , 并使用式 (61) 的指标比较 3 种滤波算法的估计精度, 3 种滤波算法的 MSE 如图 2 所示.

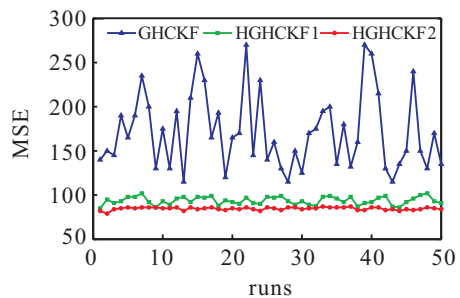


图 2  $\lambda = 15$  时 3 种滤波算法的 MSE

可以看出, 在干扰高斯分布条件下, HGHCKF2 相对于 GHCKF 和 HGHCKF1 具有更高的估计精度, 进一步表明了本文所提出算法的有效性.

### 3.2 再入飞行器目标跟踪

再入飞行器目标跟踪问题是一个强非线性状态估计问题. 状态向量  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^5$  由位置  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ 、速度  $(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$  以及一个飞行器系数  $(\mathbf{x}_5)$  组成, 目标的动力学方程表示如下:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_3(t), \\ \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}_4(t), \\ \mathbf{x}_3(t) = D(t)\mathbf{x}_3(t) + G(t)\mathbf{x}_1(t) + \boldsymbol{\omega}_1(t), \\ \mathbf{x}_4(t) = D(t)\mathbf{x}_4(t) + G(t)\mathbf{x}_2(t) + \boldsymbol{\omega}_2(t), \\ \mathbf{x}_5(t) = \boldsymbol{\omega}_3(t). \end{cases}$$

其中:  $D(t)$  是与拖力相关的项,  $G(t)$  是与引力相关的项,  $\boldsymbol{\omega}(t) = [\boldsymbol{\omega}_1(t) \ \boldsymbol{\omega}_2(t) \ \boldsymbol{\omega}_3(t)]^T$  为系统噪声. 拖力项和引力项可以表示如下:

$$\begin{cases} D(t) = \beta(0) \exp \mathbf{x}_5(t) \exp \left( \frac{R_0 - R(t)}{H_0} \right) V(t), \\ G(t) = -\frac{Gm_0}{R^3(t)}. \end{cases}$$

其中:  $R(t) = \sqrt{\mathbf{x}_1^2(t) + \mathbf{x}_2^2(t)}$  为飞行器与地球中心之间的距离,  $V(t) = \sqrt{\mathbf{x}_3^2(t) + \mathbf{x}_4^2(t)}$  为飞行器的飞行速率. 仿真实验中, 参数设置  $R_0 = 6374 \text{ km}$ ,  $\beta(0) = -0.59783$ ,  $Gm_0 = 3.9860 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$ ,  $H_0 = 13.406 \text{ km}$ . 系统噪声  $\boldsymbol{\omega}(t)$  为零均值白噪声, 其协方差矩阵  $\mathbf{Q} = \text{diag}([2.4064 \times 10^{-5}, 2.4064 \times 10^{-5}, 0])$ .

位于  $(x_r, y_r)$  的雷达每隔 1 s 输出一次飞行器相对于雷达的距离和方位, 即

$$\begin{cases} r_r(t) = \sqrt{(\mathbf{x}_1(t) - x_r)^2 + (\mathbf{x}_2(t) - y_r)^2} + \mathbf{v}_1(t), \\ \theta(t) = \text{atan}((\mathbf{x}_2(t) - y_r)/(\mathbf{x}_1(t) - x_r)) + \mathbf{v}_2(t). \end{cases}$$

其中:  $x_r = 6374 \text{ km}$ ,  $y_r = 0 \text{ km}$ ,  $\mathbf{v}(t) = [\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t)]^T$  为量测高斯噪声, 方差  $\mathbf{R} = \text{diag}([10^{-3} \text{ km}^2, 0.17 \text{ m} \cdot \text{rad}^2])$ , 初始协方差  $\mathbf{P}_0 = \text{diag}([10^{-6}, 10^{-6}, 10^{-6}, 10^{-6}, 0])$ ; 真实状态  $\mathbf{x}_0 = [6500.4, 349.14, -1.8093, -6.7967, 0.6932]^T$ , 协方差矩阵  $\mathbf{P}_{0|0} = \text{diag}([10^{-6}, 10^{-6}, 10^{-6}, 10^{-6}, 1])$ . 仿真中滤波初始值设为  $\mathbf{x}_0 = [6500.4, 349.14, -1.8093, -6.7967, 0.6932]^T$ , 假设观测噪声服从如下形式的干扰高斯分布:

$\hat{\mathbf{v}}_k \sim (1-\alpha)N(\mathbf{v}_k; 0, \mathbf{R}) + \alpha N(\mathbf{v}_k; 0, \text{unidrnd}(20) \cdot \mathbf{R})$   
其中:  $\text{unidrnd}(20)$  表示 1~20 之间的随机整数, 仿真实验中, 令  $\alpha = 0.3$ .

使用位置、速度及飞行器系数 RMSE 和 MMSE 比较不同滤波器的估计性能. 定义第  $t$  时刻位置的 RMSE 和 MMSE 为

$$\text{RMSE}_{\text{pos}}(t) = \sqrt{\frac{1}{MC} \sum_{n=1}^{MC} [(\mathbf{x}_1^n(t) - \hat{\mathbf{x}}_1^n(t))^2 + (\mathbf{x}_2^n(t) - \hat{\mathbf{x}}_2^n(t))^2]}; \quad (62)$$

$$\text{MSE}_{\text{pos}}(m) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \text{RMSE}_{\text{pos}}(k), \quad m = 1, 2, \dots, M; \quad (63)$$

$$\text{MMSE}(\lambda) = \text{mean}(\text{MSE}_{\text{pos}}(1:M)), \quad \forall \lambda \in [1:20]. \quad (64)$$

其中:  $M = 50$  为 Monte Carlo 次数;  $\mathbf{x}^n(t)$  和  $\hat{\mathbf{x}}^n(t)$  分别表示在第  $n$  次 Monte Carlo 运行时, 第  $t$  时刻真实的状态和估计的状态;  $k$  为离散时刻. 同理, 可以得到速度和飞行器系数的 RRMS 和 MMSE.

图3~图5给出了 50 次 Monte Carlo 仿真实验中 3 种算法的平均绝对值误差. 由于干扰噪声的存在, 基于 Huber 方法的 GHGCKF2 和 GHGCKF1 较传统 GHCKF 具有明显的精度优势; 同时, 由于 GHGCKF2 算法充分利用了 GHCKF 算法中 CT 变换的优势, 其精度也高于忽略统计线性化误差方差补偿的 GHGCKF1 算法.

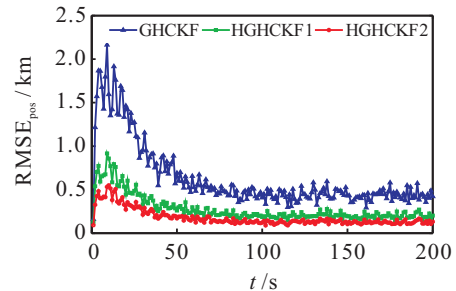


图3 目标位置的估计均方根误差

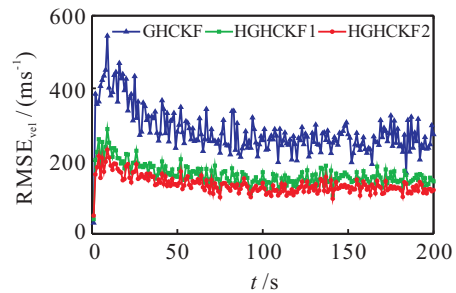


图4 目标速度的估计均方根误差

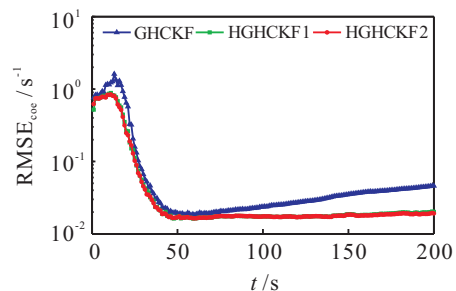


图5 目标飞行器系数的估计均方根误差(对数形式)

结合文献[14]可以发现, HGCKF1在 $k$ 时刻完成一次GHCKF估计后,进行一次基于Huber方法的线性回归估计,该过程具有以下两个相反的作用: 1)当观测噪声的实际分布与假设存在一定偏差时,这一过程起到减小偏差影响的作用,提高GHCKF的滤波精度. 2)这种统计线性化近似方法会对已有的滤波结果产生污染,降低了算法的估计精度. 即:分布偏差较大时, HGCKF1主要起到提高滤波精度的作用;分布偏差较小时, HGCKF1主要起到降低滤波精度的作用. 3.1节实验证实了上述结论. 而GHCKF2在观测噪声分布存在偏差时,只起到提高滤波精度的作用,避免了因线性化近似而带来的对滤波精度的降低作用, 3.2节实验证实了上述结论.

为了进一步比较干扰高斯分布下HGCKF2相对于GHCKF和HGCKF1的精度优势,使用式(64)的指标比较3种滤波算法的精度. 3种滤波算法的MMSE如图6~图8所示. 该结果进一步表明了HGCKF2的良好估计性能.

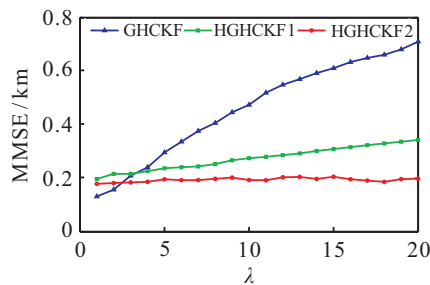


图6 3种滤波算法在不同 $\lambda$ 下位置的MMSE

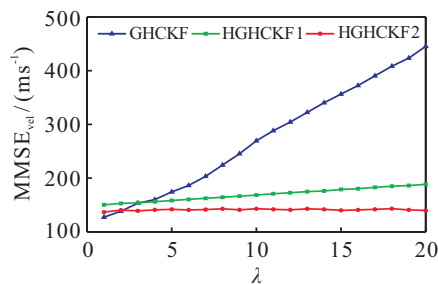


图7 3种滤波算法在不同 $\lambda$ 下速度的MMSE

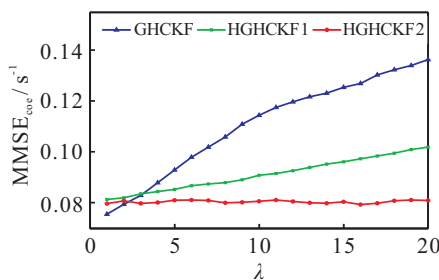


图8 3种滤波算法在不同 $\lambda$ 下飞行器系数的MMSE

## 4 结论

本文从近似贝叶斯估计角度解释了Huber方法作用于卡尔曼滤波的本质是对新息进行截断平均,推导了无需对观测方程进行线性化近似的鲁棒

GHCKF. 所提出方法兼具Huber方法鲁棒性强以及GHCKF方法滤波精度高的特点,滤波性能优于标准的GHCKF算法以及基于观测方程线性化近似的鲁棒GHCKF.

## 参考文献(References)

- [1] Ito K, Xiong K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(5): 910-927.
- [2] Julier S J, Uhlman J K, Durrant-Whyte H F. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(3): 477-482.
- [3] Norgaard M, Poulsen N K, Ravn O. New developments in state estimation for nonlinear systems[J]. Automatica, 2000, 36(11): 1627-1638.
- [4] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(6): 1254-1269.
- [5] Bin Jia, Ming Xin, Yang Cheng. High-degree cubature Kalman filters[J]. Automatica, 2013, 49(4): 510-518.
- [6] Zhang X C. Cubature information filters using high-degree and embedded cubature rules[J]. Circuits System Signal Process, 2014, 33(3): 1799-1818.
- [7] Huber P. Robust estimation of a location parameter[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1964, 35(2): 73-101.
- [8] Karlgaard C D, Schaub H. Huber-based divided difference filtering[J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 2007, 30(3): 885-891.
- [9] Lefebvre T, Bruyincx H, de Schutter J. Comment on "A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators" [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(8): 1406-1409.
- [10] Wang X, Cui N, Guo J. Huber-based unscented filtering and its application to vision-based relative navigation[J]. IET Radar, Sonar, Navigation, 2010, 4(1): 134-141.
- [11] 黄玉, 武立华, 孙枫. 基于Huber M估计的鲁棒Cubature卡尔曼滤波算法[J]. 控制与决策, 2014, 29(3): 572-577.  
(Huang Y, Wu L H, Sun F. Robust cubature Kalman filter based on Huber M estimator[J]. Control and Decision, 2014, 29(3): 572-577.)
- [12] 张文杰, 王世元, 冯亚丽, 等. 基于Huber的高阶容积卡尔曼跟踪算法[J]. 物理学报, 2016, 65(8): 088401-1-088401-9.  
(Zhang W J, Wang S Y, Feng Y L, et al. Huber-based high-degree cubature Kalman tracking algorithm[J]. Acta Physica Sinica, 2016, 65(8): 088401-1-088401-9.)
- [13] McNamee J, Stenger F. Construction of fully symmetric numerical integration formulas[J]. Numerische Mathematik, 1967, 10(4): 327-344.
- [14] Zhang X C, Teng Y L. A new derivation of the cubature Kalman filters[J]. Asian J of Control, 2014, 16(5): 1501-1510.