

输入受限约束下的无抖振有限时间稳定趋近律设计

蒲明[†], 蒋涛, 付克昌

(成都信息工程大学 控制工程学院, 成都 610225)

摘要: 首先,证明最新的fal函数趋近律第2项慢于普通幂次项,整体性能弱于普通幂次趋近律,而多幂次项趋近律存在抖振,且在输入受限约束下,不论如何选择初始状态和参数,趋近速度总是慢于单幂次项趋近律;然后,提出输入受限约束下的变指数幂次趋近律,满足无抖振、有限时间趋近到滑模面、提高收敛速度3项指标要求;最后,推导其收敛时间的上界解析式,证明其收敛速度快于现有5种趋近律,并给出参数选择所需的充分条件.仿真结果表明了改进方案的优越性.

关键词: 输入受限; 趋近律; 无抖振; 有限时间稳定

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Finite time stable chattering-free reaching law design with bounded input

PU Ming[†], JIANG Tao, FU Ke-chang

(Control Engineering College, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China)

Abstract: Some drawbacks of the latest reaching laws are proposed as follows: the second term of the fal function reaching law is slower and unnecessary compared with the first term; the multi-power terms reaching law is chattering and slower than the sole power term reaching law under bounded input restriction, no matter how parameters are selected, nor how the initial conditions are given. Then, a variable power reaching law is proposed aiming at three goals: chattering free, reaching at sliding mode in finite time, and speeding up convergence. The analytical expression of convergence time and its upper bound are derived, and the sufficient conditions are given. Simulation results show the superiority of the proposed reaching law.

Keywords: bounded input; reaching law; chattering free; finite time stable

0 引言

滑模变结构控制是现代非线性控制领域中的一种重要方法,具有鲁棒性强、构造过程简单、物理含义清晰、实用范围广、设计灵活等特点,适用于电机^[1]、飞行器^[2]、混沌系统^[3]、电力电子^[4]等各个行业,且都有较为理想的应用.其控制原理可以分为系统状态在滑模面上向原点滑动的阶段和在趋近律作用下向滑模面趋近的阶段.因此,趋近律的优劣对系统的稳定性、稳态精度和收敛时间等性能都有直接影响,是滑模变结构控制设计的重要内容.

最早期滑模变结构控制采用符号函数趋近律 $-\lambda \operatorname{sgn}(s)$, $\lambda > 0$.其优点是简单且具有极强的鲁棒性,收敛速度快,特别是在靠近滑模面的区域也不会降低收敛速度,所以从任意有限初始点出发都能在有限时间内收敛到滑模面.这些优点得益于在滑模

面两边结构切换的符号函数,这也正是滑模控制发展成为滑模变结构控制的关键因素.但遗憾的是符号函数趋近律最大的缺点(甚至是唯一缺点)也正是在于原点附近不连续,反复高频切换而造成控制器抖振,进而间接引起滑模面抖振和被控状态抖振^[5-6],这是理论和工程都不允许的.在后续的几十年间,研究者花了很大精力设计无抖振而又兼顾快速性的趋近律.高为炳院士^[7]在1996年出版的著作中总结了三种趋近律,除了符号函数对应的等速趋近律外,还有:指数趋近律 $-\lambda \operatorname{sgn}(s) - ks$, $\lambda > 0, k > 0$;幂次趋近律 $-k|s|^\beta \operatorname{sgn}(s)$, $\beta \in (0, 1)$;一般趋近律 $-k \operatorname{sgn}(s) - f(s)$, $f(0) = 0, sf(s) > 0$.这3种趋近律奠定了后续所有趋近律改进的基础,而且又衍生出:快速幂次项趋近律 $-ks - \lambda|s|^\beta \operatorname{sgn}(s)$, $\beta \in (0, 1)$ ^[8],可加快远离滑模面阶段趋近速度,保证有限时间收敛到滑模

收稿日期: 2016-11-11; 修回日期: 2017-01-11.

基金项目: 成都信息工程大学科研基金项目(KYTZ201636).

作者简介: 蒲明(1981—),男,讲师,从事滑模控制的研究;蒋涛(1975—),男,教授,博士生导师,从事智能控制等研究.

[†]通讯作者. E-mail: msznuaa@163.com

面且无抖振,趋近律中两项分别主导远离和靠近滑模面阶段的收敛,且具有一定的自适应调节趋近速度的能力;双幂次趋近律 $-k|s|^\alpha \text{sgn}(s) - \lambda|s|^\beta \text{sgn}(s)$, $\alpha > 1$,在快速幂次趋近律的基础上进一步加快远离滑模面阶段的趋近速度^[9],但仍然采用固定的指数和固定的增益.文献[10]研究了一种新型快速滑模面 $-k|s|^{f(s)} \text{sgn}(s) - \lambda|s|^{g(s)} \text{sgn}(s)$, $f(s) > 1$, $g(s) \in (0, 1)$,并给出了两种 $f(s)$ 、 $g(s)$ 的具体结构,保证滑模面具有固定时间收敛的能力,即收敛时间上界与初始误差无关.文献[11]在文献[10]的基础上提出了一种相似结构的快速滑模面.从动力学角度看,滑模面与趋近律并无区别,因此,可将文献[10]和文献[11]提出的新型滑模面推广到趋近律设计,得到固定时间收敛的新型趋近律且无抖振,这将在文献[8-9]这一系列有限时间收敛趋近律基础上的一次提升.但目前尚无文献开展相关研究和应用(文献[10]和文献[11]中仍采用快速幂次项趋近律).

在最新的文献中,文献[12]采纳fal函数作为趋近律,其优点包括: fal函数第1项因 $\beta \in (0, 1)$,所以当 $s \in (0, 1)$ 时有 $s^\beta > s$,因此,比一般的指数趋近律在该区间内具有更快的趋近速度,且 s 越小,相对速度差 $s^\beta - s$ 越大.又因 $1 - \beta \in (0, 1)$,故 $\delta^{1-\beta}$ 虽然大于 δ 但仍然远小于1,所以第2项 $s/\delta^{1-\beta} > s$,也起到了加快趋近速度的作用.特别是当 δ 较小时,对 s 的放大作用十分明显.其次,这两项均为连续函数,特别是当 $s \rightarrow 0$ 时有 $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{\delta^{1-\beta}} = 0$,因此在原点不存在间断点,也就不会引起抖振.另外, fal函数的第1、第2项在 $s = \delta$ 点分别为 δ^β 和 $\delta/\delta^{1-\beta}$,显然这两项在该点的值是相等的.因此,对于 $s \in (0, \infty)$ 区间内任一点,采用 fal函数的趋近律是连续的,所以既能加快趋近速度又不存在抖振.但 fal函数存在一些问题,其中最大的问题在于第2项虽然相对于线性项加快了收敛速度,但相对于第1项,收敛速度却更慢,所以是不必要的.而仅含第1项的 fal函数趋近律则与普通的幂次趋近律没有区别.文献[13]在双幂次趋近律和指数趋近律的基础上提出了含有一个线性项和3个幂次项的多幂次趋近律,其中最大的特色是变指数的幂次项具有极强的自适应能力.目前大多数趋近律都可以看成它的一种特例,且它具有更快的收敛速度,同时也是有限时间收敛的趋近律.然而,多幂次趋近律最大的问题是原点处蜕化为符号函数趋近律,该点不连续从而引起滑模面抖振.最后,以上所有趋近律设计,均假设控制器输入是不受限的,因此,所得结论仅在控制器输入能量无限大的理想前提下成立.这一

点与所有工程系统输入受限的实际情况均有不同.

针对上述问题,本文首先详细讨论和证明 fal函数趋近律、多幂次项趋近律存在的缺陷;然后,受已有趋近律的启发设计一种新型的变幂次趋近律,并证明它能连续无抖振、有限时间收敛,在输入受限约束下快于现有的5种趋近律,并给出参数选择所需的充分条件和收敛时间的解析解;最后,通过仿真验证所提出方案的优越性.

1 问题陈述

在最新的滑模趋近律设计的文献中,所使用的 fal函数改进指数趋近律,其表达形式如下:

$$\text{fal}(s, \beta, \delta) = \begin{cases} |s|^\beta \text{sign}(s), & |s| > \delta; \\ \frac{s}{\delta^{1-\beta}}, & |s| \leq \delta. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\beta \in (0, 1)$, $0 < \delta \ll 1$. 考虑到趋近律在负半轴与正半轴分析证明的过程类似,因此下文仅给出 s 为正的分析及证明过程.

fal函数的优点如引言所述,而 fal函数的缺点同样明显: 1) 在 $s \in (0, \delta)$ 区间, $\frac{s}{\delta^{1-\beta}}$ 对 s 的放大倍率是固定的,即 $\frac{1}{\delta^{1-\beta}}$,不具备自适应能力.但趋近律在原点附近需要较高的收敛速度,所以应用中总是希望对 s 的放大倍率随着 s 的减小而逐步增大,同时又满足趋近律 $f(s) = 0$, $s = 0$ 这一约束以避免抖振. 2) 虽然第2项 $\frac{s}{\delta^{1-\beta}}$ 相比线性项 s 的确起到了加快速度的作用,但相比第1项 $|s|^\beta \text{sign}(s)$,在 $s \in (0, \delta)$ 区间内,收敛速度反而变慢了.于是有如下结论成立:

引理1 对于任意常数 $\delta \in (0, 1)$ 和 $\beta \in (0, 1)$, fal函数(1)中的第2项 $\frac{s}{\delta^{1-\beta}}$ 收敛速度在 $s \in (0, \delta)$ 范围内慢于第1项 s^β 的收敛速度.

证明 设比较函数 $g(s) = s^\beta - s/\delta^{1-\beta} = s(1/s^{1-\beta} - 1/\delta^{1-\beta})$,代表 fal函数趋近律的第1项与第2项在状态 s 处的速度差值.因为 $s > 0$, $s < \delta$, $s^{1-\beta} < \delta^{1-\beta}$,所以有 $g(s) > 0$ 在 $s \in (0, \delta)$ 范围内对任意 $\delta \in (0, 1)$ 和 $\beta \in (0, 1)$ 均成立,即 fal函数第2项在给定范围内慢于第1项. \square

取参数 $\beta = 0.5$, $\delta = 0.1$,则 fal函数第1项、第2项在区间 $x \in [0, \delta]$ 内的趋近速度如图1所示.

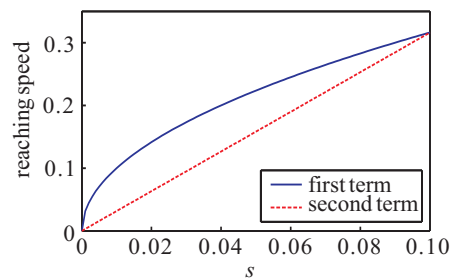


图1 fal函数两项的趋近速度对比

图1中除了 $s = 0$ 和 $s = \delta$ 两点外, fal 函数第1项趋近速度均快于第2项的趋近速度. 这一缺陷被现有文献忽视了. 根据引理1, fal 函数趋近律实际上只需要第1项即可, 第2项反而降低了 $s \in (0, \delta)$ 区间的趋近速度. 但若用第1项代替第2项, 即全论域内仅含 fal 函数的第1项, 则与普通的幂次趋近律无异, 并未起到改进的作用.

相对于 fal 函数趋近律, 多幂次趋近律具有更佳的动态性能, 其表达式为

$$\dot{s} = -k_1 |s|^\alpha \text{sgn}(s) - k_2 |s|^\beta \text{sgn}(s) - k_3 |s|^\gamma \text{sgn}(s) - k_4 s. \quad (2)$$

其中: $k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 > 0, k_4 > 0, \alpha > 1, 0 < \beta < 1, \gamma$ 作为变参数指数其取值由下式给出:

$$\gamma = \begin{cases} \max\{\alpha, |s|\}, & |s| \geq 1; \\ \min\{\beta, |s|\}, & |s| < 1. \end{cases} \quad (3)$$

但多幂次趋近律也存在两个问题, 分别由如下引理2和引理3给出.

引理2 多幂次趋近律(2)存在抖振.

证明 式(2)中第1项、第2项、第4项均是 s 的连续函数, 所以这3项在滑模面上 $s = 0$ 是连续的, 不会引起抖振. 但第3项, 变指数项 $k_3 |s|^\gamma \text{sgn}(s)$ 在滑模面上的极限是

$$\lim_{s \rightarrow 0} k_3 |s|^\gamma \text{sgn}(s) = \begin{cases} k_3, & s \rightarrow 0^+; \\ -k_3, & s \rightarrow 0^-. \end{cases} \quad (4)$$

所以变指数项 $k_3 |s|^\gamma \text{sgn}(s)$ 会产生抖振, 从而使得多幂次趋近律(2)存在抖振. \square

变指数项在 $[-1, 1]$ 区间的曲线如图2所示, 其中参数取为 $k_3 = 1, \beta = 0.5$. 曲线在原点处存在不连续跳变, 将引起抖振.

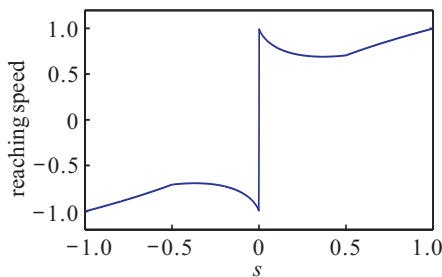


图2 原点附近变指数项曲线

由于有 $\lim_{s \rightarrow 0} -k_3 |s|^\gamma \text{sgn}(s) = -k_3 \text{sgn}(s)$, 在原点附近的足够小邻域内, 整个多幂次趋近律蜕变为符号函数趋近律. 该问题无法通过定义 $\lim_{s \rightarrow 0} s^s \triangleq 0$ 解决, 因为此时尽管原点处变指数项连续, 但在 $0 \pm \Delta$ 处仍存在不连续点, 其中 Δ 为无穷小正数. 此时一个不连续点变为两个不连续点, 抖振将更加严重.

另一方面, 多幂次趋近律没有考虑实际控制输入均是有界的这一前提. 工程应用中不允许变指数项 $k_3 |s|^\gamma \text{sgn}(s)$ 任意大. 在考虑输入受限的情况下其快速性的优势不再成立, 于是有如下结论:

引理3 1) 多幂次趋近律(2)中, 对于任意给定的参数 $k_1 > 0, k_2 > 0, k_4 > 0, \alpha > 1, \beta \in (0, 1)$, 在区间 $s \in (0, +\infty)$ 内某一点均存在参数 $k_3 > 0$, 使得变指数项 $-k_3 |s|^\gamma \text{sgn}(s)$ 趋近能力与其他3项相当; 2) 考虑输入受限的约束, 多幂次趋近律(2)在空间 $s \in [\beta, s_0], s_0 \geq \beta$ 中任意点慢于幂次趋近律 $\dot{s} = -k_5 s^\beta \text{sgn}(s), k_5 > 0, 0 < \beta < 1$.

证明 1) 只给出 $s > 0$ 区间的证明即可. 记 $g_1(s) = k_3 s^\gamma$, 且记式(2)中其他3项为 $g_2(s) = k_1 s^\alpha + k_2 s^\beta + k_4 s$. 当 $s \ll 1$ 时, $g_2(s) \approx k_2 s^\beta$. 若 $\beta > s$, 则 $g_1(s) = k_3 s^s$; 若 $\beta < s$, 则 $g_1(s) = k_3 s^\beta$. 所以对于任意点 s 均存在 k_3 使得 $g_1(s) \approx g_2(s)$. 当 $s \approx 1$ 时, $g_2(s) \approx (k_1 + k_2 + k_4)s, g_1(s) \approx k_3 s$, 取 $k_3 = k_1 + k_2 + k_4$, 有 $g_1(s) \approx g_2(s)$. 当 $s \gg 1$ 时, $g_2(s) \approx k_1 s^\alpha$. 若 $\alpha \geq s$, 则 $g_1(s) = k_1 s^\alpha$; 若 $\alpha < s$, 则 $g_1(s) = k_1 s^s$. 所以对于任意点 s 也存在 k_3 使得 $g_1(s) \approx g_2(s)$.

2) 将幂次趋近律记为 $g_1(s) = k_5 s^\beta$, 多幂次趋近律记为 $g_2(s) = k_1 s^\alpha + k_2 s^\beta + k_3 s^\gamma + k_4 s$, 其参数取值仍同式(2). 由于输入 u 受限, 记最大输入量为 $u_{\max} > 0$. 因为趋近控制是滑模控制的组成部分, 所以趋近律与控制输入存在一定的映射关系, 鉴于仅针对趋近律讨论, 现假设趋近律的最大允许量为 $s_{\max} > 0$. 一般地, 在初始状态 $s_0 > 0$ 处, 总是希望对应的趋近律取最大值, 从而拥有最大的控制能力, 所以存在如下约束:

$$\begin{cases} s_{\max} = g_1(s_0) = k_5 s_0^\beta, \\ s_{\max} = g_2(s_0) = k_1 s_0^\alpha + k_2 s_0^\beta + k_3 s_0^\gamma + k_4 s_0, \\ s \leq s_{\max}, \forall s \in [0, s_0]. \end{cases} \quad (5)$$

这两种趋近律都是收敛的, 因此 $s < s_0$ 对于任意 $t > 0$ 均成立. 由式(5)可设比较函数为

$$\begin{aligned} g(s) &= g_1(s) - g_2(s) = \\ &= \frac{k_1 s_0^\alpha + k_2 s_0^\beta + k_3 s_0^\gamma + k_4 s_0}{s_0^\beta} s^\beta - \\ &= k_1 s^\alpha - k_2 s^\beta - k_3 s^\gamma - k_4 s = \\ &= k_1 s^\alpha (s_0^{\alpha-\beta} s^{\beta-\alpha} - 1) + k_2 (s^\beta - s_0^\beta) + \\ &= k_3 s^\gamma (s_0^{\gamma-\beta} s^{\beta-\gamma} - 1) + k_4 (s_0^{1-\beta} s^{\beta-1} - 1). \end{aligned} \quad (6)$$

其中第2项恒为0. 剩下3项中因为 $\alpha > \beta$ 及 $s_0 \geq s$ 一定成立, 所以如下不等式组对于任意可能的 α, β, s_0

在 s 给定范围内均成立:

$$\begin{cases} s_0^{\alpha-\beta} s^{\beta-\alpha} = \left(\frac{s_0}{s}\right)^{\alpha-\beta} > 1, s \in (0, s_0); \\ s_0^{\gamma-\beta} s^{\beta-\gamma} = \left(\frac{s_0}{s}\right)^{\gamma-\beta} \geq 1, \gamma \geq \beta; \\ s_0^{1-\beta} s^{\beta-1} = \left(\frac{s_0}{s}\right)^{1-\beta} > 1, s \in (0, s_0). \end{cases} \quad (7)$$

当 $s_0 \geq \beta$ 时, 对于任意 $s \in [\beta, s_0]$ 点均有 $g(s) > 0$ 成立. 因为 $g_1(s)$ 在 $s \in (0, s_0)$ 上是 s 的增函数并有 $g_1(s_0) = s_{\max}$, 所以 $g_1(s) < s_{\max}$ 对于 $s \in (0, s_0)$ 内的任意点均成立. 再根据上述证明中已得结论 $g(s) > 0$, 所以 $g_2(s) < s_{\max}$ 在 $s \in (\beta_0, s_0)$ 内的任意点也均成立, 即满足输入受限这一条件. \square

图3给出了引理3中结论2)的仿真曲线. 其中: $s_{\max} = 100, s_0 = 5, k_1 = 0.1, k_2 = 0.1, k_3 = 0.0314, k_4 = 0.1, k_5 = 44.7214, \alpha = 1.5, \beta = 0.5$. 可以验证 $g_1(5) = g_2(5) = s_{\max}$.

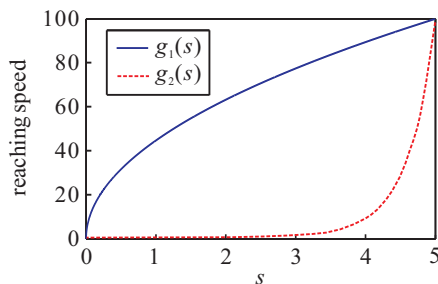


图3 输入受限下 $g_1(s)$ 和 $g_2(s)$ 的趋近速度

仿真结果表明, 在输入受限的约束下, 区间 (β, s_0) 中每一点处, $g_1(s)$ 的趋近速度均大于 $g_2(s)$ 的趋近速度. 通过进一步分析可知, 这两种趋近律都存在闲置量 $s_{\max} - g_i(s), i = 1, 2$. 例如 $s = 2$ 时, 系统可以允许的最大趋近速度为 100, 这两种趋近律解算所得结果分别为 $g_1(2) = 63.2456$, 闲置 36.7544; $g_2(2) = 0.7499$, 闲置 99.2501. 下文设计的目的就是满足各种约束情况下, 尽量减小各点处趋近能力闲置的量, 从而最大程度提升趋近律的控制性能.

注1 引理3的结论1)表明, 式(2)的4项中, 只有变指数项是必须的. 若取 $k_3 = k_i, i = 1, 2, 4$, 则变指数项在相当大的论域内将远优于其他3项. 例如 $x \gg \alpha \gg 1$ 时, $k_3 s^\gamma \gg k_1 s^\alpha \gg k_4 s \gg k_2 x^\beta$. 引理3的结论2)进一步说明, 若考虑输入受限的约束, 则在 $k_1 |s|^\alpha \text{sgn}(s), k_3 |s|^\gamma \text{sgn}(s), k_4 s$ 这3项中任意一项的趋近律将慢于不含这些项的普通指数趋近律.

注2 当 $s_0 < \beta$ 时, 虽然 $g(s)$ 的符号难以确定, 但可知在原点附近的足够小邻域内, $g_1(s)$ 是 s 的增函数且 $g_1(0) = 0, g_2(s)$ 是 s 的减函数且 $g_2(0) = k_3 > 0$, 所以对于任意一组给定参数 $k_i, i = 1, 2, \dots, 5$, 总会存在一个足够小的相关常数 $\xi(k_i, i = 1, 2, \dots, 5) > 0$,

使得任意点 $s \in [0, \xi(k_i, i = 1, 2, \dots, 5)]$ 均有 $g(s) > 0$ 成立. 这说明在这一足够小的区域内, 多幂次趋近律是快于普通指数趋近律的. 然而, 这一优势是伴随着抖振的, 这一点已由引理2证明. 多幂次趋近律的优点和缺点均源自变指数项, 这非常类似于符号函数趋近律.

注3 由于快速幂次趋近律、双幂次趋近律都是多幂次指数趋近律的一种特例, 引理3的结论也适合这两种趋近律.

在上述问题陈述基础上, 本文趋近律设计的目标是: 在有限时间稳定、无抖振、输入受限条件下, 保证趋近速度快于fal函数趋近律、多幂次趋近律、指数趋近律、快速幂次趋近律和双幂次趋近律.

2 输入受限的新型无抖振有限时间稳定趋近律设计

首先给出下文所需的引理.

引理4^[8] 对于方程 $s = \dot{x} + \beta|x|^\gamma \text{sgn}(x) = 0$ 和 $s = \dot{x} + \alpha x + \beta|x|^\gamma \text{sgn}(x) = 0$, 其中 $\alpha, \beta > 0, 0 < \gamma < 1$, 从初始点 x_0 收敛到0的时间分别为

$$T = \frac{1}{\beta(1-\gamma)} |x_0|^{1-\gamma}, \quad (8)$$

$$T = \frac{1}{\alpha(1-\gamma)} \ln \frac{\alpha|x_0|^{1-\gamma} + \beta}{\beta}. \quad (9)$$

受文献[10]中新型快速Terminal滑模面启发, 基于多幂次趋近律, 下面的定理将给出在输入受限约束条件下无抖振有限时间稳定的新型趋近律.

定理1 在输入受限条件 $|s| \leq s_{\max}$ 约束下, 新型趋近律如下式所示 ($\beta \in (0, 1)$):

$$\begin{cases} f(s) = -k|s|^\varphi \text{sgn}(s), \\ k = s_{\max}, \varphi = \begin{cases} \beta, & |s| < 1; \\ 0, & |s| \geq 1. \end{cases} \end{cases} \quad (10)$$

则有:

1) 该趋近律是连续无抖振的、稳定的, 且可在有限时间 T 内从任意有限初始点 s_0 收敛到滑模面上. T 的解析式由下式给出:

$$T = \begin{cases} \frac{|s_0|^{1-\beta}}{s_{\max}(1-\beta)}, & s_0 \leq 1; \\ \frac{s_0(1-\beta) + \beta}{s_{\max}(1-\beta)}, & s_0 > 1. \end{cases} \quad (11)$$

2) 当 $s_0 > 1$ 或 $s_0 \in (0, \delta)$ 时, $f(s)$ 在 $(0, s_0)$ 内每一点收敛速度快于fal函数趋近律; 当 $s_0 \in [\delta, 1]$ 时在区间 $(0, \delta]$ 内每一点收敛速度快于fal函数趋近律.

3) 对于任意给定的 $s_0 \in (0, 1)$, 总存在参数 $\beta \in \left(0, \frac{1-s_0^2}{1+s_0^2}\right)$ 使得该趋近律在 $(0, s_0)$ 内每一点均快于双幂次趋近律、快速幂次趋近律和由下式所示的与

文献[10]快速 Terminal 滑模面相同结构的趋近律:

$$\begin{cases} f_3(s) = -k_1 \bar{f}(s) \operatorname{sgn}(s) - k_2 |s|^\beta \operatorname{sgn}(s), \\ \beta = \frac{k_3}{k_4} \in (0, 1), k_i > 0, i = 1, 2, 3, 4; \\ \bar{f}(s) = \begin{cases} x^{\frac{2(k_4 - k_3) + k_3}{k_4}}, & x > 1; \\ \frac{4}{\pi} \arctan x, & x \leq 1. \end{cases} \end{cases} \quad (12)$$

对于任意给定的 $s_0 \geq 1$, 也存在参数 $\beta \in (0, 1)$, 同样有如上结论.

4) 在区间 $s \in [\beta, s_0]$, $s_0 \geq \beta$ 内每一点, 该趋近律均快于多幂次趋近律.

证明 1) 因为 $sf(s) = -k|s|^{\varphi+1} < 0, \forall s \neq 0$, 所以到达条件满足. 又因为

$$\begin{cases} \lim_{s \rightarrow 1^-} s^\varphi = 1^\beta = 1, \\ \lim_{s \rightarrow 1^+} s^\varphi = \lim_{s \rightarrow 1^+} s^1 = 1, \\ \lim_{s \rightarrow 0^-} -k|s|^\varphi \operatorname{sgn}(s) = \lim_{s \rightarrow 0^-} k \cdot 0^\varphi = 0, \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} -k|s|^\varphi \operatorname{sgn}(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} -k \cdot 0^\varphi = 0, \end{cases} \quad (13)$$

本文所提出的趋近律在 0 点和 ± 1 点均连续, 而在其他任意点 s^β 或者 s 也是连续的, 所以趋近律 $f(s)$ 在论域内处处连续, 因此是无抖振的趋近律.

当 $s_0 \leq 1$ 时, 由式(10)可知在 $(0, s_0)$ 整个区间内趋近律 $f(s)$ 为 $-ks^\beta$. 由引理 4 可知从 s_0 收敛到滑模面 $s = 0$ 的时间为

$$T = \frac{1}{s_{\max}(1 - \beta)} |s_0|^{1-\beta}. \quad (14)$$

当 $s_0 > 1$ 时, 由式(10)可知在 $[1, s_0)$ 区间趋近律 $f(s)$ 为 $-k \operatorname{sgn}(s)$, 则根据简单的动力学知识可知, 从初始点 s_0 收敛到 1 的时间为一有限值 $T_1 = (s_0 - 1)/s_{\max}$. 同样由式(10)知, 在 $(0, 1)$ 区间内 $f(s) = -s_{\max}|s|^\beta \operatorname{sgn}(s)$, 所以根据引理 4, 其收敛时间为 $T_2 = 1/s_{\max}(1 - \beta)$. 总的收敛时间为

$$T = T_1 + T_2 = \frac{s_0 - 1}{s_{\max}} + \frac{1}{s_{\max}(1 - \beta)} = \frac{s_0(1 - \beta) + \beta}{s_{\max}(1 - \beta)}. \quad (15)$$

2) 令 fal 函数趋近律为

$$f_1(s) = \begin{cases} -\bar{k}|s|^\beta \operatorname{sign}(s), & \bar{k} > 0, |s| > \delta; \\ -\bar{k} \frac{s}{\delta^{1-\beta}}, & |s| \leq \delta, \bar{k} > 0. \end{cases}$$

设比较函数为 $g(s) = f(s) - f_1(s)$. 因为这两种趋近律都是 s 的单增函数, 所以在初始点应有最大趋近速度. 当 $s_0 > 1 > \delta$ 时, 有约束条件 $k = s_{\max} = \bar{k}s_0^\beta$. 因此在区间 $(1, s_0)$ 内, 有

$$g(s) = s_{\max} - \frac{s_{\max}}{s_0^\beta} s^\beta = s_{\max} \left(1 - \left(\frac{s}{s_0} \right)^\beta \right),$$

其中 $\frac{s}{s_0} < 1$. 所以 $\left(\frac{s}{s_0}\right)^\beta < 1$, 从而有 $g(s) > 0$. 在区间 $(\delta, 1]$ 内, 有

$$g(s) = s_{\max} s^\beta - \frac{s_{\max}}{s_0^\beta} s^\beta = s_{\max} s^\beta \left(1 - \left(\frac{1}{s_0} \right)^\beta \right) > 0.$$

在区间 $(0, \delta]$ 内, 根据第 2 节引理 1, 有

$$g(s) = s_{\max} s^\beta - \frac{s_{\max}}{s_0^\beta} \frac{s}{\delta^{1-\beta}} > s_{\max} s^\beta - s_{\max} \frac{s}{\delta^{1-\beta}} > 0.$$

所以 $s_0 > 1 > \delta$ 时, 在整个 $(0, s_0)$ 区间均有 $g(s) > 0$. 再考虑 $1 \geq s_0 \geq \delta$ 的情况. 此时初始约束条件为 $ks_0^\beta = s_{\max} = \bar{k}s_0^\beta$, 即 $k = \bar{k}$. 在区间 $(\delta, s_0]$ 内 $g(s) = ks^\beta - ks^\beta = 0$. 在区间 $(0, \delta]$ 内根据引理 1 有 $g(s) = ks^\beta - k \frac{s}{\delta^{1-\beta}} > 0$. 所以综合考虑, 本文所提出的趋近律仍然更优, 总的收敛时间仍然小于 fal 函数趋近律. 最后考虑 $s_0 < \delta$ 的情况, 初始条件为 $ks_0^\beta = s_{\max} = \bar{k} \frac{s_0}{\delta^{1-\beta}}$, 在 $(0, s_0)$ 区间内, 有

$$g(s) = \frac{s_{\max}}{s_0^\beta} s^\beta - \frac{s_{\max} \delta^{1-\beta}}{s_0} \frac{s}{\delta^{1-\beta}} = s_{\max} \left(\left(\frac{s}{s_0} \right)^\beta - \left(\frac{s}{s_0} \right) \right) > 0.$$

3) 令比较函数为 $g(s) = f(s) - f_3(s)$. 若 $s_0 \leq 1$, 则初始约束条件为 $s_{\max} = ks_0^\beta = k_1 \frac{4}{\pi} \arctan s_0 + k_2 s_0^\beta$, 且有

$$g(s) = ks^\beta - k_1 \frac{4}{\pi} \arctan s - k_2 s^\beta = \frac{k_1 \frac{4}{\pi} \arctan s_0 + k_2 s_0^\beta}{s_0^\beta} s^\beta - k_1 \frac{4}{\pi} \arctan s - k_2 s^\beta = \frac{4k_1}{\pi s_0^\beta} (\arctan s_0 s^\beta - s_0^\beta \arctan s). \quad (16)$$

因 $g(0) = g(s_0) = 0$, 令 $G(s) = \arctan s_0 s^\beta - s_0^\beta \arctan s$, 也有 $G(0) = G(s_0) = 0$. 其导数为

$$\dot{G}(s) = \beta \arctan s_0 s^{\beta-1} - s_0^\beta \frac{1}{1+s^2} = \frac{\beta \arctan s_0 s^{\beta-1} (1+s^2) - s_0^\beta}{1+s^2}. \quad (17)$$

式(17)分母必大于 0, 令分子为

$$h(s) = \beta \arctan s_0 s^{\beta-1} (1+s^2) - s_0^\beta,$$

其极限满足

$$h(0) = +\infty, \quad (18)$$

$$h(s_0) = \beta \arctan s_0 s_0^{\beta-1} (1+s_0^2) - s_0^\beta = s_0^{\beta-1} [\beta \arctan s_0 (1+s_0^2) - s_0]. \quad (19)$$

只要参数 β 满足 $\beta < \frac{s_0}{\arctan s_0 (1+s_0^2)}$, 则有 $h(s_0) < 0$.

0. 又因为 $\frac{s_0}{\arctan s_0(1+s_0^2)} > \frac{1}{1+s_0^2}$, 所以取

$$\beta \in \left(0, \frac{1}{1+s_0^2}\right), \quad (20)$$

则必有 $h(s_0) < 0$. 再考虑

$$\dot{h}(s) = \frac{\beta \arctan s_0}{s^{2-\beta}} [(\beta-1)(1+s^2) + 2s^2],$$

所以当 β 满足 $\beta < \frac{1-s^2}{1+s^2}, \forall s \in (0, s_0)$ 时, 有 $\dot{h}(s) < 0$.

又因 $\frac{1-s^2}{1+s^2} > \frac{1-s_0^2}{1+s_0^2}, \forall s \in (0, s_0)$, 故 β 应满足

$$\beta \in \left(0, \frac{1-s_0^2}{1+s_0^2}\right). \quad (21)$$

若 β 满足式(21), 则必然满足式(20). 所以满足式(21)即可保证 $\dot{h}(s) < 0, \forall s \in (0, s_0)$. 结合式(18)和(19)可知 $h(s)$ 单调减小, 也即 $\dot{G}(s) < 0, \forall s \in (0, s_0)$. 再考虑 $G(0) = G(s_0) = 0$ 及式(15)可知 $g(s) > 0, \forall s \in (0, s_0)$. 综上, 对于任意给定的 $s_0 < 1$, 总是存在满足式(21)的参数 β , 使得区间 $(0, s_0)$ 内任意点处, 本文提出的趋近律快于基于文献[10]的趋近律 $f_3(s)$.

当 $s_0 \geq 1$ 时, 初始约束条件为

$$s_{\max} = k = k_1 s_0^{\frac{2(k_4-k_3)+k_3}{k_4}} + k_2 s_0^\beta.$$

在区间 $s \in [1, s_0]$ 内 $f(s) = s_{\max}$, 有 $f_3(s) < f_3(s_0) = f(s_0) = f(s)$ 成立. 该结论的一个推论是 $f_3(1) \leq f(1)$, 等号仅在 $s_0 = 1$ 时成立. 再根据上述 $s_0 < 1$ 时的证明可知, 在区间 $s \in (0, 1)$ 内每一点处均有 $f_3(s) < f(s)$.

另外, 由文献[10]的结论可知, 双幂次趋近律、快速幂次趋近律也是 $f_3(s)$ 的一个特例. 所以本文提出的趋近律也快于双幂次趋近律和快速幂次趋近律.

4) 不论 $s_0 \geq 1$ 还是 $s_0 < 1$, 均有 $|f(s)| \geq ks^\beta$. 再由引理3可知该结论成立. □

注4 由于滑模面和趋近律在数学层面并无本质不同, 本文提出的新型趋近律也可以推广用于输入受限约束下的有限时间稳定的滑模面设计.

注5 若不考虑输入受限的约束, 将所提出的趋近律改进为

$$f(s) = -k|s|^\varphi \operatorname{sgn}(s),$$

$$k > 0, \varphi = \begin{cases} \beta, & |s| < 1; \\ |s|, & |s| \geq 1. \end{cases}$$

其中 k 为任意大的正数. 则不仅可以保留本文提出趋近律的所有优点, 而且成为固定时间收敛趋近律. 限于篇幅, 不再详细展开论述.

注6 s_0 和 s_{\max} 为客观已知条件, 而 β 是可选参数, 分析定理1式(11)可知, β 越小, 对应的收敛速度越快, 收敛时间越短, 其上界为 s_0/s_{\max} .

3 应用及仿真

仿真1 在输入受限约束下考虑趋近律最大允许值为 $s_{\max} = 100$, 初始点 $s_0 = 10$. 考虑包含本文所提出趋近律的如下6种趋近律的速度对比仿真. 为保证客观合理地比较, 6种趋近律中的 β 均取为0.1, 且假设在初始点处, 趋近律速度均为允许的最大值.

本文趋近律为

$$f(s) = -100|s|^\varphi \operatorname{sgn}(s), \varphi = \begin{cases} 0.1, & |s| < 1; \\ 0, & |s| \geq 1. \end{cases}$$

fal函数趋近律为

$$f_1(s) = \begin{cases} -79.4328|s|^{0.1} \operatorname{sign}(s), & |s| > 0.1; \\ -79.4328 \frac{s}{0.1^{0.0}}, & |s| \leq 0.1. \end{cases}$$

多幂次项趋近律为

$$f_2(s) = -0.3|s|^{1.4} \operatorname{sgn}(s) - 0.3|s|^{0.1} \operatorname{sgn}(s) - 10^{-9}|s|^\gamma \operatorname{sgn}(s) - 8.0135s,$$

$$\gamma = \begin{cases} \max\{1.5, |s|\}, & |s| \geq 1; \\ \min\{0.1, |s|\}, & |s| < 1. \end{cases}$$

基于文献[10]新型快速Terminal滑模面的趋近律为

$$f_3(s) = -1.2\bar{f}(s) \operatorname{sgn}(s) - 3.7179|s|^{0.1} \operatorname{sgn}(s),$$

$$\bar{f}(s) = \begin{cases} s^{1.9}, & s > 1; \\ \frac{4}{\pi} \arctan s, & s \leq 1. \end{cases}$$

双幂次项趋近律^[9,14]为

$$f_4(s) = -1.2|s|^{1.9} \operatorname{sgn}(s) - 3.7179|s|^{0.1} \operatorname{sgn}(s).$$

快速幂次项趋近律^[6]为

$$f_5(s) = -9s - 7.9433|s|^{0.1} \operatorname{sgn}(s).$$

所得仿真结果如图4所示. 横坐标代表 $[0, s_0]$ 区间内的某一点, 纵坐标是6种趋近律在该点处的趋近速度.

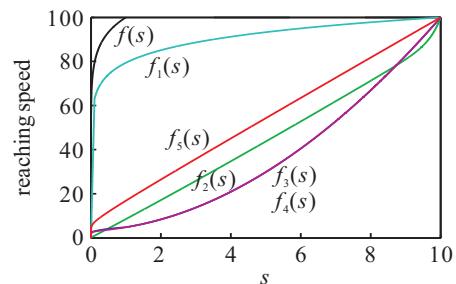


图4 输入受限下6种趋近律速度对比

分析图4可知: 1) 所有趋近律的值均小于等于 s_{\max} , 满足输入受限这一约束; 2) 本文趋近律的趋近速度在 $(10^{-13}, 10)$ 内任意点均快于多幂次项趋近律,

而在整个(0, 10)区间内任意点快于其他4种趋近律, 这与定理1的理论结果一致; 3) 本文趋近律在每一点处连续, 是无抖振的; 4) $f_i(s)$ ($i = 2, 3, 4, 5$) 均含有 $|s|^\alpha \text{sgn}(s)$, $\alpha > 1$, 该项数值随着 s 趋向于原点而急剧减小, 从而造成在输入受限约束下性能急剧下降.

仿真2 二阶系统是工程中最常见的一种对象, 包括永磁同步电机、Buck变换器、近空间飞行器等对象^[1-4]. 不失一般性, 仿真中考虑如下二阶非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x) + g_1(x)x_2, \\ \dot{x}_2 = f_2(x) + g_2(x)u + d(t). \end{cases} \quad (22)$$

其中: $f_1(x) = x_1x_2$, $g_1(x) = 1 + x_1^2$, $f_2(x) = x_1 + x_2^{0.5}$, $g_2(x) = 1$ 为已知函数, $d(t) = 1.5 \cos 0.5t$ 为系统受到的未知干扰. 设计滑模面为

$$s = \dot{x}_1 + x_1 = x_1 + (x_1 + 1 + x_1^2)x_2,$$

其导数为

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{x}_1 + (\dot{x}_1 + 2x_1\dot{x}_1)x_2 + (x_1 + 1 + x_1^2)\dot{x}_2 = \\ &= (1 + x_2 + 2x_1x_2)\dot{x}_1 + (x_1 + 1 + x_1^2)\dot{x}_2 = \\ &= (1 + x_2 + 2x_1x_2)(x_1x_2 + (1 + x_1^2)x_2) + \\ &= (x_1 + 1 + x_1^2)(x_1 + x_2^{0.5} + u + d(t)). \end{aligned}$$

设计滑模控制器为

$$\begin{aligned} u &= -x_1 - x_2^{0.5} + (x_1 + 1 + x_1^2)^{-1} \times \\ &= -(1 + x_2 + 2x_1x_2) \times \\ &= ((x_1x_2 + (1 + x_1^2)x_2) + f_r(s)), \end{aligned}$$

其中 $f_r(s)$ 为趋近律. 假设输入受限且最大值为 $u_{\max} = |u(x_0)| = 30$, 初始状态为 $x_1 = 1, x_2 = 2$, 则 $s_0 = 7, s_{\max} = 40.7574$. 因为 $s_{\max} > (x_1 + 1 + x_1^2)|d(t)|, t = 0$, 所以在该滑模控制器作用下, 可以保证滑模面到达条件 $s\dot{s} < 0, s \neq 0$ 成立, 滑模面及系统状态收敛. 所有带终端吸引项的趋近律中, β 均取为 0.1. 再根据初始约束条件 $f_i(s_0) = s_{\max}$ 可以确定 6 种不同趋近律的系数. 该约束的目的是使得各趋近律的趋近能力在初始点达到最大允许值, 即不会存在“闲置”的趋近能力. 由于所有趋近律的系数都是根据该等式解算得到, 从而保证了公正客观地比较. 若系数是任意选择的, 则总可以通过选择系数使这 6 种趋近律任意一种成为“最优”的趋近律或者“最差”的趋近律, 而这种比较是没有意义的. $f_r(s)$ 分别取为

$$f(s) = -40.7574|s|^\varphi \text{sgn}(s), \varphi = \begin{cases} 0.1, & |s| < 1; \\ 0, & |s| \geq 1. \end{cases}$$

$$f_1(s) = \begin{cases} -33.5503|s|^{0.1} \text{sgn}(s), & |s| > 0.5; \\ -33.5503 \frac{s}{0.5^{0.9}}, & |s| \leq 0.5. \end{cases}$$

$$f_2(s) = -|s|^{1.5} \text{sgn}(s) - 10|s|^{0.1} \text{sgn}(s) - 10^{-5}|s|^\gamma \text{sgn}(s) - 1.8536s,$$

$$\gamma = \begin{cases} \max\{1.5, |s|\}, & |s| \geq 1; \\ \min\{0.1, |s|\}, & |s| < 1. \end{cases}$$

$$f_3(s) = -2\bar{f}(s)\text{sgn}(s) - 3.0596|s|^{0.1} \text{sgn}(s),$$

$$\bar{f}(s) = \begin{cases} s^{1.5}, & s > 1; \\ \frac{4}{\pi} \arctan s, & s \leq 1. \end{cases}$$

$$f_4(s) = -|s|^{1.9} \text{sgn}(s) - 0.3474|s|^{0.1} \text{sgn}(s).$$

$$f_5(s) = -5s - 4.7393|s|^{0.1} \text{sgn}(s).$$

6种趋近律作用下的被控系统状态曲线如图5、图6所示.

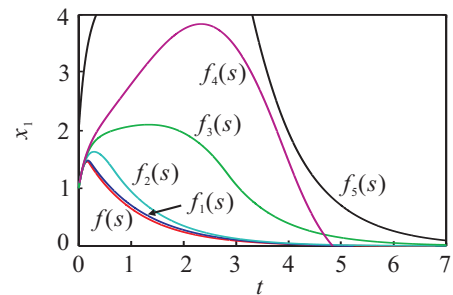


图5 x_1 曲线

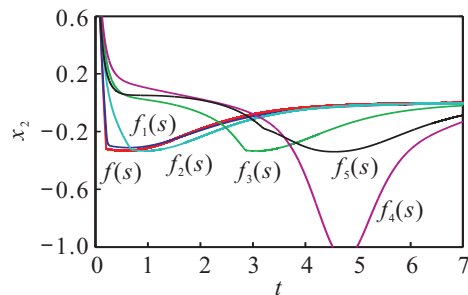


图6 x_2 曲线

由图5和图6可知, 本文所提出方案作用下的系统状态收敛速度最快, 且稳态误差非常小, 对扰动的抑制能力较为理想, 表现出较强的鲁棒性能. 而其余几种趋近律由于控制能力不足, 不仅被控系统状态收敛更加缓慢, 而且在扰动作用下, 收敛过程超调较大, 出现大幅振荡. 由于这6种滑模控制的滑模面完全相同, 区别仅是趋近律部分, 根据仿真结论可知, 本文趋近律具有更优的性能, 且对于更大的扰动也具有较好的控制能力, 即具有一定的控制余量. 当这几种趋近律用于更高阶系统时, 由于子系统间的耦合作用更加复杂, 这样的区别将会更将明显.

仿真中出现的这6种滑模趋近律,几乎涵盖了目前所有的无抖振趋近律和新涌现的一大批快速趋近律. 在输入受限约束下,本文趋近律具有最优的控制性能. 这并非物理控制能力的区别,而取决于趋近律控制算法对最大允许控制能力的利用.

4 结论

本文的出发点是结合工程实际的限制,不再假设控制输入可以任意大,而在给定的输入受限约束条件下设计趋近律. 首先分析并证明了现有两种最新趋近律存在的缺陷,说明了其在收敛速度和存在抖振方面的问题;进而在输入受限这一约束前提下,在现有趋近律方法的基础上,提出一种新的变指数趋近律,目标是有限时间收敛的、无抖振的、具有比现在的指数趋近律、 fal 函数趋近律、多幂次趋近律更快的趋近律. 因为趋近速度直接正比于鲁棒性能而反比于稳态误差和收敛时间,所以本文提出的趋近律具有更短的收敛时间和更小的稳态误差. 在仿真中,与现有各种趋近律进行了对比,并检验了在扰动影响下的控制能力. 采用相同的滑模面、初始状态、最大输入能力以及终端吸引子指数 β ,使得控制效果的区别仅取决于趋近律的不同结构. 仿真结果显示了本文所提出方案的有效性和优越性. 另外一个贡献是,由于趋近律和滑模面在数学结构上的相同,所得结论也适用于对应的滑模面设计.

参考文献(References)

- [1] Thiago B, Vinicius F M, Hilton A G, et al. Discrete time sliding mode observer for sensor-less vector control of permanent magnet synchronous machine[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 2014, 61(4): 1679-1691.
- [2] Zheng E, Xiong J. Quad-rotor unmanned helicopter control via novel robust terminal sliding mode controller and under-actuated system sliding mode controller[J]. *Int J for Light and Electron Optics*, 2014, 125(11): 2817-2825.
- [3] 薛楷嘉,王从庆. 基于在线误差修正自适应SVR的非线性不确定分数阶混沌系统滑模控制[J]. *物理学报*, 2015, 64(7): 1-8.
(Xue K J, Wang C Q. Sliding mode control of fractional order chaotic system based on an online error correction adaptive SVR[J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, 64(7): 1-8.)
- [4] Martinez-Salamero L, Garcia G, Lahore O M C. Start-up control and voltage regulation in a boost converter under sliding-mode operation[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 2013, 60(10): 4637-4649.
- [5] Zuo Z Y. Non-singular fixed-time terminal sliding mode control of nonlinear systems[J]. *Control Theory and Applications*, 2015, 9(4): 545-552.
- [6] Xu S D, Chen C C, Wu Z L. Study of nonsingular fast terminal sliding mode fault tolerant control[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 2015, 62(6): 3906-3913.
- [7] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1996: 34-36.
(Gao W B. *Theoretical basis of variable structure control*[M]. Beijing: Science Press, 1996: 34-36.)
- [8] Yu S H, Yu X H, Shirinzadeh B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode[J]. *Automatica*, 2005, 41: 1957-1964.
- [9] 张合新,范金锁,孟飞,等. 一种新型滑模控制双幂次趋近律[J]. *控制与决策*, 2013, 28(2): 289-292.
(Zhang H X, Fan J S, Meng F, et al. A new double power reaching law for sliding mode control[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(2): 289-292.)
- [10] 蒲明,吴庆宪,姜长生,等. 新型快速Terminal滑模及其在近空间飞行器上的应用[J]. *航空学报*, 2011, 32(7): 1283-1291.
(Pu M, Wu Q X, Jiang C S, et al. New fast Terminal sliding mode and its application to near space vehicles[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2011, 32(7): 1283-1291.)
- [11] 刘宇超,郭建国,周军,等. 基于新型快速Terminal滑模的高超声速飞行器姿态控制[J]. *航空学报*, 2015, 36(7): 2372-2380.
(Liu Y C, Guo J G, Zhou J, et al. Hypersonic vehicle attitude control based on new fast Terminal sliding mode[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2015, 36(7): 2372-2380.)
- [12] 周涛. 基于一种新型趋近律的自适应滑模控制[J]. *控制与决策*, 2016, 31(7): 1335-1338.
(Zhou T. Adaptive sliding mode control based on a new reaching law[J]. *Control and Decision*, 2016, 31(7): 1335-1338.)
- [13] 张瑶,马广富,郭延宁,等. 一种多幂次滑模趋近律设计与分析[J]. *自动化学报*, 2016, 42(3): 466-472.
(Zhang Y, Ma G F, Guo Y N, et al. A multi power reaching law of sliding mode control design and analysis[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2016, 42(3): 466-472.)
- [14] 李惠洁,蔡远利. 基于双幂次趋近律的滑模控制方法[J]. *控制与决策*, 2016, 31(3): 498-502.
(Li H J, Cai Y L. Sliding mode control with double power reaching law[J]. *Control and Decision*, 2016, 31(3): 498-502.)

(责任编辑: 李君玲)