

# 基于状态可行域约束的极值搜索系统预设性能控制

张友安<sup>1</sup>, 张雷<sup>2†</sup>, 刘京茂<sup>3</sup>, 孙玉梅<sup>1</sup>

(1. 烟台南山学院 电气与电子工程系, 山东 烟台 265713; 2. 海军航空工程学院  
控制工程系, 山东 烟台 264001; 3. 山东南山国际飞行有限公司, 山东 烟台 265713)

**摘要:** 针对极值搜索系统在稳定状态存在可行域约束情况下的预设性能控制问题, 首先利用罚函数构造新型目标函数并设计极值参考轨迹; 然后, 通过性能函数和误差转换函数构建系统等效模型, 利用反演控制方法进行预设性能控制器设计; 最后, 设计不确定参数自适应估计律. 系统在实现极值搜索的同时能够满足预先设定的性能指标. 数值仿真验证了所提出方法的有效性.

**关键词:** 可行域约束; 极值搜索系统; 不确定参数; 预设性能; 反演控制

**中图分类号:** TP273      **文献标志码:** A

## Prescribed performance control of extremum seeking system based on state feasible region constraint

ZHANG You-an<sup>1</sup>, ZHANG Lei<sup>2†</sup>, LIU Jing-mao<sup>3</sup>, SUN Yu-mei<sup>1</sup>

(1. Department of Electrical and Electronic Engineering, Yantai Nanshan University, Yantai 265713, China; 2. Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China; 3. Shandong Nanshan International Flight Co LTD, Yantai 265713, China)

**Abstract:** For prescribed performance control problems of extremum seeking systems based on stable state feasible region constraint, firstly, a new objective function is constructed by using the penalty function, and the extremum reference trajectory is designed. Then, the system equivalent model is constructed by using performance functions and error transformation functions, and the prescribed performance controller is designed by backstepping control. Finally, the uncertain parameter's adaptive estimation law is designed. Extremum seeking is realized and the prescribed performance index is satisfied. Numerical simulation verifies the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** feasible region constraint; extremum seeking systems; uncertain parameters; prescribed performance; backstepping control

## 0 引言

在实际系统信息不完整或参数不确定的情况下, 极值搜索方法能够使得系统的输出轨迹自适应地收敛并稳定于输出量的最优值处, 从而使得控制过程中期望的控制目标最优化<sup>[1]</sup>. 经过近几十年的发展, 极值搜索方法的研究范畴已经形成了基于激励信号的极值搜索方法、滑模极值搜索方法、神经网络极值搜索方法和随机极值搜索方法等多种方法, 解决了许多实际问题<sup>[2]</sup>. 文献[3]首次针对含未知参数的极值搜索系统利用自适应控制方法进行了控制器设计; 文献[4]针对一类含不确定参数的多变量极值搜索系统利用反演控制<sup>[5]</sup>方法进行了控制器设计, 保证了系

统的稳定性; 文献[6]针对系统含未建模动态和未知扰动的设计了数值优化控制器、状态估计器和鲁棒控制器, 但设计过程比较复杂; 文献[7]针对传统极值搜索方法构造罚函数对状态含不等式约束的情况进行了控制器设计.

在实际系统控制器设计时, 往往会对收敛速度及超调量等性能指标进行预先设定. 预设性能控制方法利用性能函数和函数变换构造等效模型, 针对等效模型进行控制器设计, 以保证跟踪误差、收敛速度、超调量等指标满足预先设定的关于准确性、快速性和稳定性的要求<sup>[8]</sup>. 文献[9]针对多输入多输出非线性系统进行预设性能控制器设计, 放宽了该控制方法的

收稿日期: 2016-12-06; 修回日期: 2017-03-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60674090).

作者简介: 张友安(1963—), 男, 教授, 博士, 从事非线性控制、智能控制等研究; 张雷(1988—), 男, 博士生, 从事非线性控制、极值搜索控制的研究.

†通讯作者. E-mail: zhanglei090@aliyun.com

研究范围. 文献[10]针对未知纯反馈非线性系统进行了状态反馈控制器设计. 文献[11]针对严格反馈系统的输出约束控制问题, 构造基于障碍Lyapunov函数, 并进行了滑模反演控制器设计. 文献[12]针对严格反馈型非线性系统, 引入了罚函数, 结合反演控制方法进行了自适应反演控制器设计. 文献[13]针对一类目标函数受预设性能函数限定的极值搜索系统的控制问题进行了反演控制器设计. 已有文献大多针对系统无约束的情况进行控制器设计, 并未涉及到系统稳定状态存在不等式约束的情况<sup>[14-17]</sup>.

本文针对稳定状态存在可行域约束的严格反馈型极值搜索系统的预设性能控制问题, 利用罚函数构造新型目标函数, 进行极值参考轨迹设计; 通过性能函数和误差转换函数构建等效模型, 进行预设性能反演控制器设计; 利用自适应方法设计不确定参数估计律, 使系统能够搜索到满足约束情况下的目标函数的极值, 同时满足预先设定的性能指标.

## 1 系统描述

考虑状态存在可行域约束的极值搜索系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + g_i(\bar{x}_i) + \phi_i(\bar{x}_i)\theta_i, \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n)u + g_n(\bar{x}_n) + \phi_n(\bar{x}_n)\theta_n, \\ y = J(x_1, \theta), \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \\ \text{s.t. } S(x_1) \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\bar{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T \in \mathbf{R}^i$  为由状态  $x_1$  到状态  $x_i$  构成的状态向量, 状态  $x_i$  是可测的;  $u \in \mathbf{R}$  为系统输入,  $y \in \mathbf{R}$  为系统输出;  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T \in \mathbf{R}^n$  为有界不确定参数向量,  $y = J(x_1, \theta)$  为含不确定参数的目标函数; 函数  $f_i(\cdot), g_i(\cdot), \phi_i(\cdot)$  为已知光滑函数,  $i \in [1, 2, \dots, n]$ ;  $S(x_1)$  为关于状态  $x_1$  可行域约束的约束函数, 是已知光滑函数, 这里关于对状态  $x_1$  进行的可行域约束是针对  $x_1$  的最终稳定状态.

在控制器设计之前先给出如下假设.

**假设1** 存在常数  $f_{i0} > 0$ , 使得  $|f_i(\cdot)| > f_{i0}$  成立,  $i \in [1, 2, \dots, n]$ .

假设1限制  $f_i(\cdot)$  始终为严格正或严格负的, 以确保系统(1)满足可控性条件. 不失一般性, 本文设定  $f_i(\cdot) > 0$ .

**假设2** 目标函数  $y = J(x_1, \theta)$  存在唯一极值点  $J^*(x_1^*, \theta)$ , 即系统状态  $x_1^*$  和  $x_1$  分别满足

$$\begin{cases} \frac{\partial J^*(x_1^*, \theta)}{\partial x_1^*} = 0, \\ \frac{\partial J^2(x_1, \theta)}{\partial^2 x_1} \neq 0. \end{cases} \quad (2)$$

## 2 基于状态可行域约束的极值参考轨迹设计

不同于以往的极值搜索方法, 本文利用目标函数构造Lyapunov函数, 设计极值参考轨迹. 系统(1)中对状态  $x_1$  的可行域约束即是对本文即将设计的极值参考轨迹的约束. 设存在可行域约束时的状态  $x_1$  的极值参考轨迹为  $\overleftarrow{x}_{1,d}$ , 针对极值参考轨迹  $\overleftarrow{x}_{1,d}$ , 引入经典对数型罚函数对  $\overleftarrow{x}_{1,d}$  满足  $S(\overleftarrow{x}_{1,d}) \leq 0$  约束进行处理. 当目标函数含唯一极大值时, 采用的对数型罚函数为

$$\varphi_1(\overleftarrow{x}_{1,d}) = \delta \ln(-S(\overleftarrow{x}_{1,d})); \quad (3)$$

当目标函数含唯一极小值时, 采用的对数型罚函数为

$$\varphi_2(\overleftarrow{x}_{1,d}) = -\delta \ln(-S(\overleftarrow{x}_{1,d})). \quad (4)$$

引入如式(3)和(4)所示的罚函数构造新型目标函数, 代入系统(1), 则系统(1)转换为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + g_i(\bar{x}_i) + \phi_i(\bar{x}_i)\theta_i, \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n)u + g_n(\bar{x}_n) + \phi_n(\bar{x}_n)\theta_n, \\ J_S(\overleftarrow{x}_{1,d}, \theta) = J(\overleftarrow{x}_{1,d}, \hat{\theta}) \pm \delta \ln(-S(\overleftarrow{x}_{1,d})). \end{cases} \quad (5)$$

其中  $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n]^T \in \mathbf{R}^n$  为有界不确定参数向量  $\theta$  的估计值. 通过新型目标函数的建立, 将状态约束  $S(x_1) \leq 0$  时搜索目标函数  $J(x_1, \theta)$  最值的问题转换为直接搜索新型目标函数  $J_S(\overleftarrow{x}_{1,d}, \theta)$  所对应的最值的问题. 考虑到在约束情况下, 从系统(1)到系统(5)的转换是等效转换, 现仅需针对系统(5)设计极值参考轨迹即可. 考虑因  $\overleftarrow{x}_{1,d}$  满足  $S(\overleftarrow{x}_{1,d}) \leq 0$  而可能引起的可行域包含若干无交集区间的问题, 现给出如下补充假设.

**假设3** 极值参考轨迹  $\overleftarrow{x}_{1,d}$  初始值  $\overleftarrow{x}_{1,d}(0)$  满足  $S(\overleftarrow{x}_{1,d}(0)) < 0$ .

针对系统(5), 定义状态  $x_1$  跟踪极值参考轨迹  $\overleftarrow{x}_{1,d}$  的跟踪误差为  $e(t) = x_1 - \overleftarrow{x}_{1,d}$ , 控制目标为:

1) 在系统(5)搜索到新型目标函数的最优值(最大值或最小值)的有界邻域内, 跟踪误差  $e(t) = x_1 - \overleftarrow{x}_{1,d}$  满足预先设定的稳态和瞬态性能要求;

2) 闭环系统中的所有信号有界.

下面设计极值参考轨迹  $\overleftarrow{x}_{1,d}$ . 不失一般性, 以目标函数含唯一极大值情况为例, 构造关于新型目标函数  $J_S(\overleftarrow{x}_{1,d}, \hat{\theta})$  与状态  $x_1$  和极值参考轨迹  $\overleftarrow{x}_{1,d}$  的Lyapunov函数

$$V_{JS} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial J(\overleftarrow{x}_{1,d}, \hat{\theta})}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1(\overleftarrow{x}_{1,d})}{\partial \overleftarrow{x}_{1,d}} \right)^2. \quad (6)$$

对式(6)进行微分, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{JS} = & \left( \frac{\partial J}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \overleftarrow{x}_{1,d}} \right) \cdot \left( \frac{\partial^2 J}{\partial x_1^2} \overleftarrow{x}_{1,d} + \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 J}{\partial x_1 \partial \hat{\theta}} \hat{\theta} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \overleftarrow{x}_{1,d}^2} \overleftarrow{x}_{1,d} \right) = \\ & \left( \frac{\partial J}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \overleftarrow{x}_{1,d}} \right) \cdot \left( \left( \frac{\partial^2 J}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \overleftarrow{x}_{1,d}^2} \right) \overleftarrow{x}_{1,d} + \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 J}{\partial x_1 \partial \hat{\theta}} \hat{\theta} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

由式(8)可得状态  $x_1$  的参考轨迹  $\overleftarrow{x}_{1,d}$  应满足

$$\begin{aligned} \overleftarrow{x}_{1,d} = & \left( \frac{\partial^2 J}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \overleftarrow{x}_{1,d}^2} \right)^{-1} \cdot \left( -k_d \left( \frac{\partial J}{\partial x_1} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial \overleftarrow{x}_{1,d}} \right) - \frac{\partial^2 J}{\partial x_1 \partial \hat{\theta}} \hat{\theta} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $k_d \in \mathbf{R}^+$  为设计常数.

将式(8)代入(7),可得

$$\dot{V}_{JS} = -k_d \left( \frac{\partial J}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \overleftarrow{x}_{1,d}} \right)^2 \leq 0. \quad (9)$$

由式(6)可得  $V_{JS} \geq 0$  成立,当极值参考轨迹  $\overleftarrow{x}_{1,d}$  如式(7)所示时存在  $\dot{V}_{JS} \leq 0$  成立. 当状态  $x_1$  准确跟踪极值参考轨迹  $\overleftarrow{x}_{1,d}$  时,状态  $x_1$  最终无限接近对应的最大点  $x_1^*(\hat{\theta})$ , 此时新型目标函数稳定在对应区间最值的有界邻域内,即系统(1)中的目标函数搜索到状态满足约束情况下的最优值.

### 3 性能函数和函数变换

在预设性能控制器设计之前需引入性能函数对跟踪误差  $e(t)$  的瞬态和稳态性能进行设定. 其中性能函数的定义如下.

**定义1** 性能函数  $\varpi: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$  是连续函数,且满足以下条件:

- 1)  $\varpi(t)$  是正的且严格递减;
- 2)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varpi(t) = \varpi_\infty > 0$ .

在初始误差  $e(0)$  已知的前提下,给出如下形式的不等式约束:

$$\begin{cases} -\varsigma \varpi(t) < e(t) < \varpi(t), & e(0) > 0; \\ -\varpi(t) < e(t) < \varsigma \varpi(t), & e(0) < 0. \end{cases} \quad (10)$$

其中:  $t \in [0, \infty)$ , 设计参数  $\varsigma \in [0, 1]$ .

如果式(10)所示的不等式约束满足,不失一般性,考虑  $e(0) < 0$  的情况,则误差曲线将始终被限制在下界函数  $-\varpi(t)$  和上界函数  $\varsigma \varpi(t)$  所包围的区域之中,结合性能函数  $\varpi(t)$  的递减特性及参数  $\varsigma \in [0, 1]$  可知,误差  $e(t)$  将在函数  $-\varpi(t)$  和  $\varsigma \varpi(t)$  的共同夹逼作用下按预先设定指标收敛到零的某个邻域内.

针对性能函数先作如下假设.

**假设4** 初始误差  $|e(0)| = |x_1(0) - \overleftarrow{x}_{1,d}(0)|$  有

界且上界已知.

下面引入误差转换函数概念. 在系统设计过程中,很难对不等式约束(10)直接进行处理. 这里考虑利用转换函数将不等式约束转换为等式约束再进行处理,设计误差转换函数  $f_{\text{tran}}(\cdot)$  为

$$e(t) = \varpi(t) f_{\text{tran}}(\varepsilon). \quad (11)$$

其中:  $\varepsilon$  为转换误差.  $f_{\text{tran}}(\varepsilon)$  满足以下条件:

- 1)  $f_{\text{tran}}(\varepsilon)$  光滑且严格递增.
- 2)  $\begin{cases} -\varsigma < f_{\text{tran}}(\varepsilon) < 1, & e(0) > 0; \\ -1 < f_{\text{tran}}(\varepsilon) < \varsigma, & e(0) < 0. \end{cases}$
- 3)  $\begin{cases} \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow -\infty} f_{\text{tran}}(\varepsilon) = -\varsigma, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} f_{\text{tran}}(\varepsilon) = 1, \end{cases} & e(0) > 0; \\ \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow -\infty} f_{\text{tran}}(\varepsilon) = -1, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} f_{\text{tran}}(\varepsilon) = \varsigma, \end{cases} & e(0) < 0. \end{cases}$

由上述条件知,当  $e(0) > 0$  时,存在  $-\varsigma < f_{\text{tran}}(\varepsilon) < 1$ . 由定义1可知  $\varpi(t) > 0$ , 则可以得到  $-\varsigma \varpi(t) < f_{\text{tran}}(\varepsilon) \varpi(t) < \varpi(t)$ , 结合式(10)可得  $-\varsigma \varpi(t) < e(t) < \varpi(t)$  成立. 同理可得,当  $e(0) < 0$  时,存在  $-\varpi(t) < e(t) < \varsigma \varpi(t)$ . 因此,不等式约束(10)得以满足.

此外,由函数  $f_{\text{tran}}$  的性质可知,  $f_{\text{tran}}$  是可逆的,其逆转换为

$$\varepsilon = f_{\text{tran}}^{-1}(e(t)/\varpi(t)). \quad (12)$$

显然,当  $\varepsilon(t)$  能够满足  $\varepsilon(t) \in \ell_\infty (\forall t \in [0, \infty))$  时,可以推出不等式约束(10)是成立的,进一步可以确保跟踪信号满足预先设定的性能要求. 结合性能函数  $\varpi(t)$  的衰减特性,系统稳定后的跟踪误差将被限制在区域  $\Theta = \{e \in \mathbf{R} : |e(t)| \leq \varpi_\infty\}$  内.

对式(12)两边同时求微分并代入(5),可得

$$\dot{\varepsilon} = r(-v + f_1(x_1)x_2 + g_1(x_1) + \phi_1(x_1)\theta_1). \quad (13)$$

其中:  $r = \frac{\partial f_{\text{tran}}^{-1}}{\partial \left( \frac{e(t)}{\varpi(t)} \right)} \frac{1}{\varpi(t)}$ ,  $v = \dot{x}_{1,d}(t) + \frac{e(t)\dot{\varpi}(t)}{\varpi(t)}$ , 两

式均包含与跟踪的预设性能相关且可直接用于控制器设计的性能函数. 由转换函数  $f_{\text{tran}}(\cdot)$  的性质1)可知,  $\varepsilon(t) \in \ell_\infty (\forall t \in [0, \infty))$  时  $r > 0$ , 且  $v$  是有界的. 针对系统(5)中的状态  $x_1$  进行约束转换可得到式(13),再用(13)替换(5)中关于状态  $x_1$  的方程,可得转换后的整体模型为

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = r(-v + f_1(\bar{x}_1)x_2 + g_1(\bar{x}_1) + \phi_1(\bar{x}_1)\theta_1), \\ \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + g_i(\bar{x}_i) + \phi_i(\bar{x}_i)\theta_i, \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n)u + g_n(\bar{x}_n) + \phi_n(\bar{x}_n)\theta_n, \\ J_S(\overleftarrow{x}_{1,d}, \hat{\theta}) = J(\overleftarrow{x}_{1,d}, \hat{\theta}) \pm \delta \ln(-S(\overleftarrow{x}_{1,d})). \end{cases} \quad (14)$$

此时,  $i \in [2, \dots, n]$ .

考虑系统(5),经误差转换函数(11)进行误差转换后得到等效约束系统(14),以下结果成立:1)系统(5)经误差转换函数转换到系统(14)的变换是等效变换;2)当系统(14)渐近稳定时,系统(5)也渐近稳定。

#### 4 预设性能控制器设计

采用反演控制方法进行预设性能自适应控制器设计,  $\tilde{\theta} = [\theta_1 - \hat{\theta}_1, \theta_2 - \hat{\theta}_2, \dots, \theta_n - \hat{\theta}_n]^T \in \mathbf{R}^n$  为不确定参数  $\theta$  的估计误差,利用自适应方法对不确定参数进行估计,具体设计过程如下。

**Step 1** 考虑系统(14)中的第1个子系统,构造 Lyapunov 函数  $V_1 = \frac{1}{2}\varepsilon^2$ , 求微分可得

$$\dot{V}_1 = \varepsilon \dot{\varepsilon} = \varepsilon(r(-v + f_1(x_1)x_2 + g_1(x_1) + \phi_1(x_1)\hat{\theta}_1)) + \varepsilon r \phi_1(x_1)\tilde{\theta}_1. \quad (15)$$

针对式(15),设计  $x_2$  的虚拟轨迹

$$x_{2,d} = \frac{1}{f_1(x_1)} \left( v - g_1(x_1) - \phi_1(x_1)\hat{\theta}_1 - \frac{k_1\varepsilon}{r} \right), \quad (16)$$

其中  $k_1 > 0$  为设计参数。

由式(14)~(16),可得

$$\dot{\varepsilon} = r \left( f_1(x_1)z_2 - \frac{k_1\varepsilon}{r} \right) + r \phi_1(x_1)\tilde{\theta}_1. \quad (17)$$

其中:定义  $z_2 = x_2 - x_{2,d}$ , 当  $x_2$  能够准确跟踪  $x_{2,d}$  时,  $z_2$  趋近于零。

**Step 2** 考虑系统(14)中的第2个子系统,构造 Lyapunov 函数  $V_2 = \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}z_2^2$ , 对  $V_2$  求微分并代入式(17),可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = \varepsilon \dot{\varepsilon} + z_2 \dot{z}_2 = & -k_1\varepsilon^2 + \varepsilon r \phi_1(x_1)\tilde{\theta}_1 + z_2 \phi_2(\bar{x}_2)\tilde{\theta}_2 + \\ & z_2(f_1(x_1)\varepsilon r + f_2(\bar{x}_2)x_3 + g_2(\bar{x}_2) + \\ & \phi_2(\bar{x}_2)\hat{\theta}_2 - \dot{x}_{2,d}). \end{aligned} \quad (18)$$

针对式(18),设计  $x_3$  的虚拟轨迹

$$\begin{aligned} x_{3,d} = \frac{1}{f_2(\bar{x}_2)} & (-k_2z_2 - f_1(x_1)\varepsilon r - g_2(\bar{x}_2) - \\ & \phi_2(\bar{x}_2)\hat{\theta}_2 + \dot{x}_{2,d}), \end{aligned} \quad (19)$$

其中  $k_2 > 0$  为设计参数。

定义  $z_3 = x_3 - x_{3,d}$ , 由式(18)和(19),可得

$$\dot{z}_2 = f_2(\bar{x}_2)z_3 - k_2z_2 - f_1(x_1)\varepsilon r + \phi_2(\bar{x}_2)\tilde{\theta}_2. \quad (20)$$

**Step  $i$**  考虑系统(14)中的第  $i$  个子系统,构造 Lyapunov 函数  $V_i = \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2 + \dots + \frac{1}{2}z_i^2$ , 其中  $z_i = x_i - x_{i,d}$ , 对  $V_i$  求微分并代入式(20),可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = \varepsilon \dot{\varepsilon} + z_2 \dot{z}_2 + z_3 \dot{z}_3 + \dots + z_i \dot{z}_i = & -k_1\varepsilon^2 - k_2z_2^2 - k_3z_3^2 - \dots - k_{i-1}z_{i-1}^2 + \\ & z_i(f_{i-1}(\bar{x}_{i-1})z_{i-1} + f_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + g_i(\bar{x}_i) + \\ & \phi_i(\bar{x}_i)\hat{\theta}_i - \dot{x}_{i,d}) + \varepsilon r \phi_1(x_1)\tilde{\theta}_1 + z_2 \phi_2(\bar{x}_2)\tilde{\theta}_2 + \end{aligned}$$

$$z_3 \phi_3(\bar{x}_3)\tilde{\theta}_3 + \dots + z_i \phi_i(\bar{x}_i)\tilde{\theta}_i. \quad (21)$$

针对式(21),设计  $x_{i+1}$  的虚拟轨迹

$$\begin{aligned} x_{i+1,d} = \frac{1}{f_i(\bar{x}_i)} & (-k_i z_i - f_{i-1}(\bar{x}_{i-1})z_{i-1} - \\ & g_i(\bar{x}_i) - \phi_i(\bar{x}_i)\hat{\theta}_i + \dot{x}_{i,d}), \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $k_{i-1} > 0$  为设计参数。

定义  $z_{i+1} = x_{i+1} - x_{i+1,d}$ , 由式(21)和(22)可得

$$\begin{aligned} \dot{z}_i = f_i(\bar{x}_i)z_{i+1} - k_i z_i - \\ f_{i-1}(\bar{x}_{i-1})z_{i-1} + \phi_i(\bar{x}_i)\tilde{\theta}_i. \end{aligned} \quad (23)$$

**Step  $n$**  考虑系统(14)中的第  $n$  个子系统,为了消除不确定参数的影响,引入不确定参数与其估计值的误差项  $\tilde{\theta}^T \mathbf{G} \tilde{\theta}$ , 其中  $\mathbf{G} = \text{diag}\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , 其每个元素都为正值常数。构造 Lyapunov 函数

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2}z_n^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \mathbf{G} \tilde{\theta},$$

对  $V_n$  求微分,代入式(21)、(22)和(23),可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n = \varepsilon \dot{\varepsilon} + z_2 \dot{z}_2 + \dots + z_n \dot{z}_n + \dot{\tilde{\theta}}^T \mathbf{G} \tilde{\theta} = & -k_1\varepsilon^2 - k_2z_2^2 - \dots - k_{n-1}z_{n-1}^2 + \\ & z_n(f_{n-1}(\mathbf{x})z_{n-1} + f_n(\mathbf{x})u + g_n(\mathbf{x}) + \\ & \phi_n(\mathbf{x})\hat{\theta}_n - \dot{x}_{n,d}) + \\ & ([\varepsilon r \phi_1(x_1), z_2 \phi_2(\bar{x}_2), \dots, z_n \phi_n(\mathbf{x})] + \dot{\tilde{\theta}}^T \mathbf{G})\tilde{\theta}. \end{aligned} \quad (24)$$

参考式(24),设计控制量和参数估计律分别为

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{f_n(\mathbf{x})} & (-k_n z_n - f_{n-1}(\mathbf{x})z_{n-1} - g_n(\mathbf{x}) - \\ & \phi_n(\mathbf{x})\hat{\theta}_n + \dot{x}_{n,d}), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\tilde{\theta}} = & -[\varepsilon r \phi_1(x_1), z_2 \phi_2(\bar{x}_2), \dots, z_n \phi_n(\mathbf{x})]\mathbf{G}^{-1}, \end{aligned} \quad (26)$$

其中  $k_n > 0$  为设计参数。

将式(25)和(26)代入(24),可得

$$\dot{V}_n = -k_1\varepsilon^2 - k_2z_2^2 - \dots - k_n z_n^2 \leq -kV_n, \quad (27)$$

其中  $k = \min\{2k_1, 2k_2, \dots, 2k_n\}$ 。

对式(27)两边沿  $(0, t)$  进行积分,可得

$$V_n \leq V_n(0)e^{-kt}. \quad (28)$$

此时, Lyapunov 函数  $V_n$  满足  $V_n \geq 0$ , 且其微分形式满足  $\dot{V}_n \leq 0$ 。

下面对系统(14)中每一个子系统进行分析。对于第1个子系统,由于  $\varepsilon \in \ell_\infty$ , 由误差转换函数的性质可知,状态  $x_1$  满足预设的瞬态和稳态性能要求,并且  $e(t) = (x_1 - \overleftarrow{x}_{1,d}) \in \ell_\infty$ , 进一步可知  $x_1 \in \ell_\infty$ ; 虚拟控制量  $x_{2,d}$  中的每一项都是有界的,因此得到  $x_{2,d} \in \ell_\infty$ 。以此类推,对于第  $i$  ( $i \in [3, 4, \dots, n]$ ) 个子系统,  $z_i = (x_i - x_{i,d}) \in \ell_\infty$ , 得到  $x_i \in \ell_\infty$ 。对于第  $n$  个

子系统, 由于  $z_n = x_n - x_{n,d} \in \ell_\infty$ , 由上一步可得  $x_{n,d} \in \ell_\infty$ , 进而得到  $x_n \in \ell_\infty$ , 由控制量  $u$  的表达式(28)可进一步得到  $u \in \ell_\infty$ .

综上所述, 可得状态  $x_1$  的跟踪误差满足预先设定的瞬态和稳态性能要求且闭环系统中所有信号有界. 考虑系统(5)是系统(1)的约束转换形式, 而从系统(5)经误差转换函数转换到系统(14)的变换是等效变换, 则根据Lyapunov稳定性理论可得到如下定理.

**定理1** 考虑如式(1)所示的一类稳定状态存在可行域约束的极值搜索系统, 在假设1~假设4成立的前提下, 构造新型目标函数如式(3)或(4)所示, 采用极值参考轨迹如式(8)所示, 定义  $e(t) = x_1 - \overleftarrow{x}_{1,d}$ , 性能函数如式(10)所示, 误差转换函数如式(11)所示, 虚拟控制器设计如式(22)所示, 实际控制输入量如式(25)所示, 自适应估计律如式(26)所示, 则可以得到如下结论:

1) 系统(1)搜索到如式(3)和(4)所示的新型目标函数的最优值(最大值或最小值)的有界邻域内, 即  $x_1$  的稳定状态满足不等式约束, 跟踪误差  $e(t) = x_1 - \overleftarrow{x}_{1,d}$  满足设定的稳态和瞬态性能要求;

2) 系统(1)是局部渐近稳定的且闭环系统中的所有信号有界.

### 5 仿真分析

针对如式(1)所示的系统进行数字仿真. 考虑当状态  $x_1$  存在可行域约束  $S(x_1) = x_1^2 - 1 \leq 0$  的情况, 数学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 + 0.1 \sin^2(x_1))x_2 + x_1^3 + x_1\theta_1, \\ \dot{x}_2 = (4 + \cos^2(x_2))u + x_1^2 - x_2\theta_2, \\ y = J(x_1, \theta) = -x_1^2 + 4x_1\theta_1 + 2\theta_2; \\ \text{s.t. } S(x_1) = x_1^2 - 1 \leq 0. \end{cases} \quad (29)$$

其中  $\theta_1 = 1, \theta_2 = 2$  为不确定参数. 当状态  $x_1$  无可行域约束时, 目标函数在  $x_1 = 2$  处取得极值  $J^*(x_1^*, \theta) = 8$ . 当状态  $x_1$  的可行域区间为  $[-1, 1]$ ,  $\overleftarrow{x}_{1,d}(0)$  满足  $\overleftarrow{x}_{1,d}(0) \in [-1, 1]$  时, 采用本文设计方法可使  $x_1$  最终稳定在  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1 = 1$  处, 此时目标函数无限趋近于状态在区间  $[-1, 1]$  内对应的最大值  $J^*(x_1^*, \theta) = 7$  的有界邻域内.

分别采用本文方法针对状态约束的情况设计极值参考轨迹和预设性能反演控制器, 采用文献[17]方法针对无状态约束的情况设计极值参考轨迹和反演控制器, 控制参数选取一致进行对比仿真分析. 系统的状态变量初始值分别为  $x_1(0) = 1.5, x_2(0) = 0$ ; 参数估计初始值为  $\hat{\theta}_1(0) = 1.5, \hat{\theta}_2(0) = 0.5$ ; 极值参考轨迹初始值为  $x_{1,d}(0) = \overleftarrow{x}_{1,d}(0) = 0$ . 控制器参数如下:  $g_1 = 1, g_2 = 4, k_d = 5, k_1 = 5, k_2 = 5, \delta = 0.01$ . 选取性能函数为  $\varpi(t) = (1.7 - 0.02)e^{-0.3t} +$

$0.02$ , 参数  $\varsigma = 0.3$ , 误差转换函数  $f_{\text{tran}}(\varepsilon) = \frac{e^\varepsilon - 1}{1 + e^\varepsilon}$ , 仿真结果如图1~图6所示.

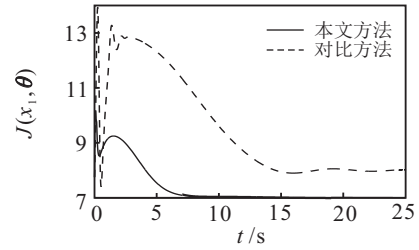


图1 目标函数  $J(x_1, \theta)$  仿真结果

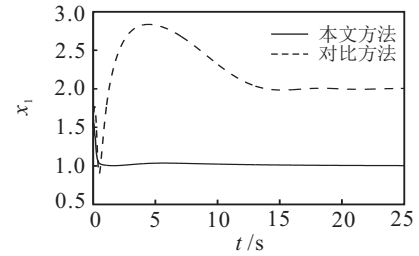


图2 状态  $x_1$  仿真结果

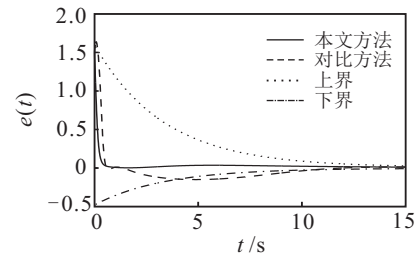


图3 状态  $x_1$  跟踪误差  $e(t)$  仿真结果

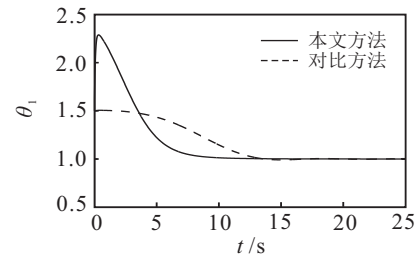


图4 不确定参数  $\theta_1$  仿真结果

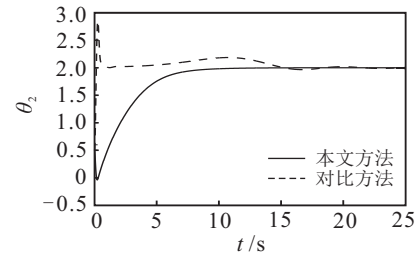


图5 不确定参数  $\theta_2$  仿真结果

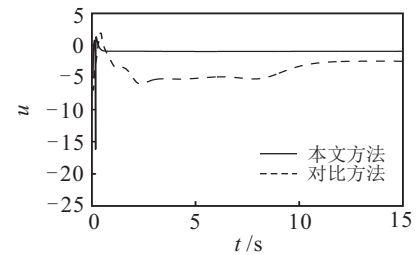


图6 控制输入  $u$  仿真结果

由图1可知,采用本文方法,目标函数收敛至满足约束情况下的最大值 $J^*(x_1^*, \theta) = 7$ 处;由图2可知,采用本文方法时,状态 $x_1$ 最终收敛至约束情况下对应的最优状态值 $x_1^* = 1$ 处,即本文设计的极值参考轨迹可以有效处理不等式约束的情况;由图3可知,采用本文预设性能控制方法时,状态 $x_1$ 跟踪误差收敛速度、超调量和稳态误差都能满足性能函数的约束要求,而无预设性能控制情况下,状态 $x_1$ 跟踪误差不能满足要求;由图4和图5可知,本文设计的自适应估计律能够准确估计不确定参数,且效果较之对比方法更好;由图6可知,本文方法设计的控制输入 $u$ 平滑有界,满足控制目标要求。

通过以上仿真分析可知,本文设计的新目标函数可有效处理稳定状态存在不等式约束的问题,极值参考轨迹和预设性能反演控制方法可以实现控制目标,自适应估计律可有效估计不确定参数值,与传统反演控制方法相比,效果较好。

## 6 结论

本文针对状态存在可行域约束的极值搜索系统的预设性能控制问题,利用罚函数构造新型目标函数,进行了极值参考轨迹设计;通过性能函数和误差转换函数构建系统等效模型,进行了预设性能反演控制器设计;利用自适应方法设计不确定参数估计律,初步解决了此类极值搜索系统的预设性能控制问题。本文的创新之处在于构造了新型目标函数,并设计了极值参考轨迹,同时针对此情况进行了预设性能控制器设计,以实现控制目标。

### 参考文献(References)

- [1] Krstic M, Wang H H. Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems[J]. *Automatica*, 2000, 36(4): 595-601.
- [2] 左斌, 李静, 胡云安. 极值搜索算法研究及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2014: 1-2.  
(Zuo B, Li J, Hu Y A. Research on extremum seeking algorithm and its application[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2014: 1-2.)
- [3] Guay M, Zhang T. Adaptive extremum seeking control of nonlinear dynamic systems with parametric uncertainties[J]. *Automatica*, 2003, 39(7): 1283-1293.
- [4] Shakiba Yaghoubi, Maryam Dehghani. Adaptive extremum seeking control of a nonlinear system using backstepping technique[C]. The 23rd Iranian Conf on Electrical Engineering(ICEE). Iranian, 2015: 960-965.
- [5] Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P. Nonlinear and adaptive control design[M]. New York: Wiley, 1995: 5-10.
- [6] Maojiao Ye, Guoqiang Hu. A robust extremum seeking scheme for dynamic systems with uncertainties and disturbances[J]. *Automatica*, 2016, 66(10): 172-178.
- [7] Tan Y, Mareels Y P I M Y. Extremum seeking for constrained inputs[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2013, 58(9): 2405-2410.
- [8] Bechlioulis C P, Rovithakis G A. Prescribed performance adaptive control of SISO feedback linearizable systems with disturbances[C]. The 16th Mediterranean Conf on Control & Automation(MED). Ajaccio: IEEE, 2008: 1035-1040.
- [9] Bechlioulis C P, Rovithakis G A. Robust adaptive control of feedback linearizable MIMO nonlinear systems with prescribed performance[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2008, 53(9): 2090-2099.
- [10] Charalampos P Bechlioulis, George A Rovithakis. A low-complexity global approximation-free control scheme with prescribed performance for unknown pure feedback systems[J]. *Automatica*, 2014, 50(8): 1217-1226.
- [11] 吴春, 齐蓉, 陈晓雷. 基于障碍Lyapunov函数的输出有界全局收敛鲁棒控制[J]. *控制与决策*, 2015, 30(3): 448-454.  
(Wu C, Qi R, Chen X L. Robust control for output-constrained with global convergence using barrier Lyapunov function[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(3): 448-454.)
- [12] 刘勇华. 一类不确定非线性系统的预定性能自适应控制[J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(8): 1123-1127.  
(Liu Y H. Adaptive control for a class of uncertain nonlinear systems with prescribed performance[J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(8): 1123-1127.)
- [13] 张雷, 胡云安, 耿宝亮. 严格反馈极值搜索系统预设性能反演控制[J]. *控制与决策*, 2016, 31(9): 1585-1588.  
(Zhang L, Hu Y A, Geng B L. Prescribed performance backstepping control of strict feedback extremum seeking systems[J]. *Control and Decision*, 2016, 31(9): 1585-1588.)
- [14] Juan Yang, Jing Na, Xing Wu, et al. Adaptive parameter estimation with guaranteed prescribed performance[C]. The 26th Chinese Control and Decision Conf(CCDC). Changsha, 2014: 2515-2520.
- [15] Yongming Li, Shaocheng Tong. Prescribed performance adaptive fuzzy output-feedback dynamic surface control for nonlinear large-scale systems with time delays[J]. *Information Sciences*, 2015, 292(3): 125-142.
- [16] Shuai Sui, Shaocheng Tong, Yongming Li. Observer-based fuzzy adaptive prescribed performance tracking control for nonlinear stochastic systems with input saturation[J]. *Neurocomputing*, 2015, 158(2): 100-108.
- [17] 张雷, 胡云安, 张杨, 等. 基于Backstepping的严格反馈极值搜索系统控制器设计[J]. *海军航空工程学院学报*, 2016, 31(4): 401-406.  
(Zhang L, Hu Y A, Zhang Y, et al. Control design for strict-feedback extremum seeking systems based on backstepping[J]. *J of Naval Aeronautical and Astronautical Institute*, 2016, 31(4): 401-406.)

(责任编辑: 曹洪武)