

基于改进符号距离的权重未知犹豫模糊决策方法

林松¹, 刘小弟², 朱建军^{1†}, 张世涛²

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 211106;

2. 安徽工业大学 数理科学与工程学院, 安徽 马鞍山 243032)

摘要: 研究犹豫模糊环境下属性权重完全未知的多属性决策问题. 针对犹豫模糊元中人为添加元素影响方案排序等问题, 提出一种基于符号距离的犹豫模糊多属性决策方法. 首先, 根据犹豫模糊元中元素个数及偏差定义一种新的犹豫度, 并基于犹豫度定义犹豫模糊符号距离; 其次, 基于符号距离提出一种属性权重优化模型以确定属性权重, 并对方案进行排序; 最后, 通过算例表明所提出方法的合理性和有效性.

关键词: 犹豫模糊元; 符号距离; 多属性决策; 权重优化

中图分类号: C934

文献标志码: A

Hesitant fuzzy decision making method with unknown weight information based on an improved signed distance

LIN Song¹, LIU Xiao-di², ZHU Jian-jun^{1†}, ZHANG Shi-tao²

(1. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China; 2. School of Mathematics and Physics, Anhui University of Technology, Ma'anshan 243032, China)

Abstract: A multiple attribute decision making problem under hesitant fuzzy environment with unknown weight information is investigated. The ranking results of alternatives are affected when adding elements into a hesitant fuzzy element(HFE). To overcome this drawback, a signed distance-based approach for the multiple attribute decision making with hesitant fuzzy information is proposed. Firstly, a novel hesitancy index based on the number and deviation of elements in a HFE is presented, and a hesitant fuzzy signed distance measure is proposed. Then, an optimization model on the basis of the signed distance measure is constructed to determine the attribute weights, and the priorities of alternatives can be obtained. Finally, a numerical example is given to illustrate the rationality and effectiveness of the proposed method.

Keywords: hesitant fuzzy element; signed distance; multiple attribute decision making; weight optimization

0 引言

在观察世界时, 由于人们的认知能力有限以及技术条件的制约往往难以获得“完全信息”, 这便使得不确定性系统处处存在. 处理不确定问题的方法有很多, 模糊集理论就是最有效的工具之一^[1]. 随着研究的深入, 在使用模糊集处理问题时渐渐地产生了一些弊端, 为此一些学者对其进行了拓展^[2-5]. 作为模糊集的一种拓展形式, Torra提出了犹豫模糊集^[5], 允许元素的隶属度可以是 $[0, 1]$ 中多个不同的值, 并讨论了犹豫模糊集与其余拓展形式的区别和联系, 开辟了一种处理不确定性问题的新视角^[6]. 它既可以反

映决策者的不同意见, 又能体现项目所处的真实水平^[7]. 在犹豫模糊集中隶属度的表示是随机的, 因而在某种程度上犹豫模糊集在表示模糊性和不确定性时更加灵活自然^[8].

目前, 关于犹豫模糊集的研究已经引起了国内外学者的广泛关注^[9-13]. 文献[14]定义了犹豫模糊集的海明距离、欧氏距离、豪斯道夫距离等, 将其应用到多属性决策中取得了良好效果; 文献[15]定义了犹豫模糊熵与交叉熵, 创造性地提出了几种求解犹豫模糊多属性决策问题的方法; 文献[16]针对属性权重不完全确定, 专家权重具有相关性的犹豫模糊多属性群决策

收稿日期: 2016-11-20; 修回日期: 2017-02-08.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71601002, 71673001, 71171112); 国家社会科学基金重点项目(14AZD049); 教育部人文社科研究青年基金项目(16YJC630077); 安徽省自然科学基金项目(1708085MG168); 安徽省哲学社会科学规划基金项目(AHSKY2015D79).

作者简介: 林松(1972—), 男, 高级会计师, 博士生, 从事复杂装备研制管理、群决策的研究; 朱建军(1976—), 男, 教授, 博士生导师, 从事多属性决策理论与方法、智能优化算法、灰色系统理论等研究.

[†]通讯作者. E-mail: zhujianjun@nuaa.edu.cn

问题,提出了一种灰关联决策方法;文献[17]将离差最大化方法拓展到犹豫模糊环境下,并依据TOPSIS对方案进行排序;文献[18]定义了犹豫模糊偏好关系,并针对具有偏好关系的犹豫模糊多属性决策问题提出了两种决策方法.在这些研究过程中,犹豫模糊元个数的统一化处理是较为关键的一个问题.不同的犹豫模糊元所含元素个数可能存在差异,不同的处理方法有不一样的结果.一种较为有效的方法是在含有元素少的犹豫模糊元中人为添加元素^[14-20],但不足之处是会影响到方案的排序.为克服此缺陷,文献[21]等提出了一种新的犹豫模糊距离测度,做到了较好的应对,但是该方法计算量较大,在一些情况下未能反映决策者或决策群体的犹豫程度^[19-20,22-23].鉴于此,本文在现有文献研究的基础上,针对犹豫模糊元中元素个数和偏差构造一种新的犹豫度,可以很好地反映决策者或决策群体的分歧程度;基于犹豫度提出的新符号距离测度,具有计算简便、区分度高,且运算时无需在元素个数少的犹豫模糊元中添加元素的特点.最后将该方法应用于犹豫模糊多属性决策中,表明了所提出方法的合理性和有效性.

1 基本概念

定义1^[12] 给定集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, 从 X 到 $[0, 1]$ 的某个子集的函数称为犹豫模糊集, 记为

$$h_A(X) = \{\langle x, h_A(x) \rangle | x \in X\}, \quad (1)$$

其中 $h_A(x)$ 为区间 $[0, 1]$ 中几个数的集合, 表示 $x \in X$ 属于集合 A 的隶属度. 为便于讨论, 称 $h_A(x)$ 为犹豫模糊元^[12].

犹豫模糊元 $h(x)$ 中的元素体现了决策者(或决策群体)的分歧或犹豫程度, 偏差越大, 犹豫程度越高. 文献[22]定义了犹豫模糊元的犹豫度, 用以衡量决策者(或决策群体)的这种犹豫程度.

定义2^[22] 设 $h = \{\gamma^i | i = 1, 2, \dots, l_h\}$ 为犹豫模糊元, γ^i 为其中第 i 小的元素, l_h 为 h 中元素个数, 则称

$$H(h) = \begin{cases} \frac{1}{C_{l_h}^2} \sum_{\lambda > \delta=1}^{l_h} |\gamma^\lambda - \gamma^\delta|, & l_h > 1; \\ 0, & l_h = 1 \end{cases} \quad (2)$$

为犹豫模糊元 h 的犹豫度, 其中

$$C_{l_h}^2 = \frac{1}{2} \cdot l_h \cdot (l_h - 1).$$

基于犹豫度, 文献[22]定义了犹豫模糊符号距离测度.

定义3^[22] 设 $h = \{\gamma^i | i = 1, 2, \dots, l_h\}$ 为犹豫模糊元, $\tilde{1}$ 为理想点犹豫模糊元, 则

$$d_S(h, \tilde{1}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l_h} \sum_{i=1}^{l_h} (1 - \gamma^i) + \frac{1}{C_{l_h}^2} \sum_{\lambda > \delta=1}^{l_h} |\gamma^\lambda - \gamma^\delta| \right), & l_h > 1; \\ \frac{1}{2} (1 - \gamma), & l_h = 1 \end{cases} \quad (3)$$

称为由 h 到 $\tilde{1}$ 的符号距离.

基于符号距离, 文献[22]定义了犹豫模糊元比较方法.

定义4^[22] 设 h_1, h_2 为犹豫模糊元, $\tilde{1}$ 为理想点犹豫模糊元, 则:

- 1) 若 $d_S(h_1, \tilde{1}) > d_S(h_2, \tilde{1})$, 则 $h_1 < h_2$;
- 2) 若 $d_S(h_1, \tilde{1}) < d_S(h_2, \tilde{1})$, 则 $h_1 > h_2$;
- 3) 若 $d_S(h_1, \tilde{1}) = d_S(h_2, \tilde{1})$, 则 $h_1 = h_2$.

2 主要结论及方法

2.1 问题描述

对于犹豫模糊多属性决策问题, 设 $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$ 为方案集, $G = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ 为属性集, 其权重向量为 $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, $w_j \in [0, 1]$, $\sum_{j=1}^n w_j = 1$. 设 $M = (h_{ij})_{m \times n}$ 表示犹豫模糊决策矩阵, 其中 $h_{ij} (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$ 是一个犹豫模糊元, 表示方案 Y_i 满足属性 G_j 的程度, 有

$$M = (h_{ij})_{m \times n} = \begin{matrix} & \begin{matrix} G_1 & G_2 & \cdots & G_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4)$$

犹豫模糊信息体现了决策者的不同意见, 具有很大程度的不确定性. 决策者的这种分歧加大了群体决策的难度. 为了有效度量决策者的分歧程度, 本文基于决策信息特征提出一种新的群体犹豫度, 并构造一个新的犹豫模糊距离公式应用于犹豫模糊多属性决策问题.

2.2 犹豫模糊符号距离改进方法

作为一种模糊测度, 符号距离在多属性决策中得到了应用^[22, 24]. 文献[22]提出了一种犹豫模糊符号距离, 然而, 在某些情形下利用该符号距离对犹豫模糊元进行比较时, 所得结果与直观认识不符.

例1 设 $h_1 = \{0.6, 0.7\}$ 和 $h_2 = \{0.6, 0.8\}$ 为两个犹豫模糊元, 直观上

$$\gamma_1^1 = \gamma_2^1, \gamma_1^2 < \gamma_2^2,$$

其中 γ_1^i 为 h_1 中第 i ($i = 1, 2$) 小元素, γ_2^i 为 h_2 中第 i 小元素, 因而 $h_1 < h_2$. 若利用犹豫模糊符号距离, 则由

式(3)可得

$$\begin{aligned} d_S(h_1, \tilde{1}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{0.4+0.3}{2} + 0.1 \right) = \\ &0.225 < d_S(h_2, \tilde{1}) = \\ &\frac{1}{2} \left(\frac{0.4+0.2}{2} + 0.2 \right) = 0.25, \end{aligned}$$

因此 $h_1 > h_2$, 矛盾.

文献[23]基于标准差定义犹豫模糊元的犹豫度为

$$\hat{H}(h) = \sqrt{\frac{1}{l_h} \sum_{i=1}^{l_h} \left[\gamma^i - \left(\frac{1}{l_h} \sum_{i=1}^{l_h} \gamma^i \right) \right]^2}, \quad (5)$$

则犹豫模糊符号距离可表示为

$$\begin{aligned} d_{\hat{S}}(h, \tilde{1}) &= \\ &\frac{1}{2} \left(\frac{1}{l_h} \sum_{i=1}^{l_h} (1 - \gamma^i) + \sqrt{\frac{1}{l_h} \sum_{i=1}^{l_h} \left[\gamma^i - \left(\frac{1}{l_h} \sum_{i=1}^{l_h} \gamma^i \right) \right]^2} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

然而, 式(6)仍然无法克服上述缺陷.

$$\begin{aligned} d_{\hat{S}}(h_1, \tilde{1}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{0.4+0.3}{2} + \sqrt{\frac{0.05^2+0.05^2}{2}} \right) = 0.2, \\ d_{\hat{S}}(h_2, \tilde{1}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{0.4+0.2}{2} + \sqrt{\frac{0.1^2+0.1^2}{2}} \right) = 0.2. \end{aligned}$$

此时可得 $h_1 = h_2$, 与直观认识不符.

另一方面, 文献[19]基于元素个数定义犹豫模糊元的犹豫度, 即犹豫模糊元中元素越多, 犹豫度越大, 但忽视了元素间的偏差, 从而当元素个数相同时, 其犹豫度也相同. 为克服上述缺陷, 本文提出一种新的犹豫度.

定义5 设 $h = \{\gamma^i | i = 1, 2, \dots, l_h\}$ 为犹豫模糊元, γ^i 为其中第 i 小的元素, l_h 为 h 中元素个数, 则称

$$\tilde{H}(h) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l_h} \sum_{i=1}^{l_h} \left[\gamma^i - \left(\frac{1}{l_h} \sum_{i=1}^{l_h} \gamma^i \right) \right]^2 + \left(1 - \frac{1}{l_h} \right) \right) \quad (7)$$

为犹豫模糊元 h 的犹豫度.

事实上, 式(7)基于元素的方差及个数定义犹豫度, 即偏差越大, 元素个数越多, 犹豫度越大. 与文献[19]、文献[22]、文献[23]中的犹豫度相比, 本文定义的犹豫度, 既考虑了元素间的偏差又考虑了元素的个数, 因而包含的信息更多, 区分度也更高.

犹豫度 $H(h)$ 具有如下性质^[22]:

性质1 设 $h = \{\gamma^i | i = 1, 2, \dots, l_h\}$ 为犹豫模糊元, $h^c = \bigcup_{\gamma \in h} \{1 - \gamma\}$ 为其补集, 则:

- 1) $0 \leq H(h) \leq 1$;
- 2) $H(h) = H(h^c)$.

容易验证式(7)满足性质1.

证明 1) $0 \leq \tilde{H}(h) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1 \cdot l_h}{l_h} + 1 \right) = 1$;

2) $\tilde{H}(h^c) =$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(\frac{1}{l_h} \sum_{i=1}^{l_h} \left[1 - \gamma^i - \left(\frac{1}{l_h} \sum_{i=1}^{l_h} (1 - \gamma^i) \right) \right]^2 + \right. \\ &\left. \left(1 - \frac{1}{l_h} \right) \right) = \\ &\frac{1}{2} \left(\frac{1}{l_h} \sum_{i=1}^{l_h} \left[-\gamma^i + \left(\frac{1}{l_h} \sum_{i=1}^{l_h} \gamma^i \right) \right]^2 + \left(1 - \frac{1}{l_h} \right) \right) = \\ &\tilde{H}(h). \quad \square \end{aligned}$$

基于式(7), 可得新的犹豫模糊符号距离.

定义6 设 $h = \{\gamma^i | i = 1, 2, \dots, l_h\}$ 为犹豫模糊元, γ^i 为其中第 i 小的元素, l_h 为 h 中元素个数, 则称

$$\begin{aligned} d_{\tilde{S}}(h, \tilde{1}) &= \\ &\frac{1}{2} \left(\frac{1}{l_h} \sum_{i=1}^{l_h} (1 - \gamma^i) + \right. \\ &\left. \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l_h} \sum_{i=1}^{l_h} \left[\gamma^i - \left(\frac{1}{l_h} \sum_{i=1}^{l_h} \gamma^i \right) \right]^2 + \left(1 - \frac{1}{l_h} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (8)$$

为犹豫模糊元 h 的符号距离.

犹豫模糊符号距离具有如下性质^[22].

性质2 设 h, h_1, h_2 为犹豫模糊元, $\tilde{1}$ 为理想点犹豫模糊元, 则:

- 1) $0 \leq d_S(h, \tilde{1}) \leq 1$;
- 2) $h = \tilde{1}$ 当且仅当 $d_S(h, \tilde{1}) = 0$;
- 3) h_1 比 h_2 离 $\tilde{1}$ 更远当且仅当 $d_S(h_1, \tilde{1}) > d_S(h_2, \tilde{1})$.

容易验证, 式(8)满足性质2.

证明 1) $0 \leq d_{\tilde{S}}(h, \tilde{1}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l_h} \sum_{i=1}^{l_h} (1 - \gamma^i) + \tilde{H}(h) \right) \leq \frac{1}{2} \cdot (1 + 1) = 1$.

2) 当 $h = \tilde{1}$ 时, $d_{\tilde{S}}(h, \tilde{1}) = \frac{1}{2} \times \left(0 + \frac{1}{2} \times (0 + 0) \right) = 0$; 当 $d_{\tilde{S}}(h, \tilde{1}) = 0$ 时, $\frac{1}{l_h} \sum_{i=1}^{l_h} (1 - \gamma^i) = 0$ 且 $\tilde{H}(h) = 0$, 此时可得 $l_h = 1, \gamma^i = 1$, 即 $h = \tilde{1}$.

3) 显然成立. $\square$

式(8)在犹豫度上同时考虑了元素间偏差和元素个数, 因而比现有犹豫包含的信息更多, 在对犹豫模糊元进行比较时, 区分度也更高. 如例1中

$$\begin{aligned} d_{\tilde{S}}(h_1, \tilde{1}) &= \\ &\frac{1}{2} \times \left[\frac{0.4+0.3}{2} + \frac{1}{2} \times (0.0025 + 0.5) \right] = 0.301, \\ d_{\tilde{S}}(h_2, \tilde{1}) &= \\ &\frac{1}{2} \times \left[\frac{0.4+0.2}{2} + \frac{1}{2} \times (0.01 + 0.5) \right] = 0.278, \end{aligned}$$

因此 $h_1 < h_2$, 与直观认识一致.

2.3 基于符号距离的属性权重确定方法

由于决策情形的复杂性, 属性权重信息常常难以确定, 主要有主观、客观及主客观结合法, 每种方法各有其特点. 本文基于离差最大化思想^[25], 即方案 Y_i 在属性 G_j 下的属性值差异越大, 属性 G_j 对方案的排序所起的作用越大, 此时对属性 G_j 赋予较大权重, 根据符号距离建立属性权重确定模型

$$(M-1) \begin{cases} \max f(\mathbf{w}) = \\ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n |d_{\tilde{S}}(h_{ij}, \tilde{1}) - d_{\tilde{S}}(h_{kj}, \tilde{1})| w_j; \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n w_j^2 = 1, 0 \leq w_j \leq 1. \end{cases}$$

定理1 模型(M-1)的解 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ 存在.

证明 为求解上述模型, 构造拉格朗日函数

$$L(\mathbf{w}, \lambda) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n |d_{\tilde{S}}(h_{ij}, \tilde{1}) - d_{\tilde{S}}(h_{kj}, \tilde{1})| w_j + \frac{\lambda}{2} \left(\sum_{j=1}^n w_j^2 - 1 \right). \quad (9)$$

分别关于 $\lambda, \mathbf{w}$ 求偏导, 并令

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\lambda, \mathbf{w})}{\partial w_j} = \\ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m |d_{\tilde{S}}(h_{ij}, \tilde{1}) - d_{\tilde{S}}(h_{kj}, \tilde{1})| + \lambda w_j = 0, \\ \frac{\partial L(\lambda, \mathbf{w})}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^n w_j^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

求得属性权重向量为

$$w_j = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m |d_{\tilde{S}}(h_{ij}, \tilde{1}) - d_{\tilde{S}}(h_{kj}, \tilde{1})|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m |d_{\tilde{S}}(h_{ij}, \tilde{1}) - d_{\tilde{S}}(h_{kj}, \tilde{1})| \right)^2}}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

将 w_j 归一化, 得

$$w_j = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m |d_{\tilde{S}}(h_{ij}, \tilde{1}) - d_{\tilde{S}}(h_{kj}, \tilde{1})|}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m |d_{\tilde{S}}(h_{ij}, \tilde{1}) - d_{\tilde{S}}(h_{kj}, \tilde{1})|}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

综上, 定理1得证. $\square$

最后, 计算各方案 Y_i 的加权符号距离

$$D_{\mathbf{w}}(Y_i, \tilde{1}) = \sum_{j=1}^n d_{\tilde{S}}(h_{ij}, \tilde{1}) w_j, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (12)$$

$D_{\mathbf{w}}(Y_i, \tilde{1}) (i = 1, 2, \dots, m)$ 越小, 方案越优.

2.4 决策步骤

对于某犹豫模糊多属性决策问题, 设

$$\begin{aligned} Y &= \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}, \\ G &= \{G_1, G_2, \dots, G_n\}, \\ W &= (w_1, w_2, \dots, w_n)^T \end{aligned}$$

如前所述, 分别表示方案集、属性集及属性权重向量. 基于符号距离的犹豫模糊多属性决策过程如下:

1) 决策者对各方案在每个属性下进行测度, 获得犹豫模糊决策矩阵 $M = (h_{ij})_{m \times n}$;

2) 根据(M-1)建立属性权重确定模型, 并依据式(11)求属性权重;

3) 根据式(12)计算各方案 $Y_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 的加权符号距离 $D_{\mathbf{w}}(Y_i, \tilde{1})$, 并依据 $D_{\mathbf{w}}(Y_i, \tilde{1})$ 对方案 Y_i 进行排序, $D_{\mathbf{w}}(Y_i, \tilde{1})$ 越小, 方案 Y_i 越优.

本文基于离差最大化思想与新的犹豫模糊符号距离, 建立属性权重确定模型, 并通过各方案的加权犹豫模糊符号距离实现方案的择优排序. 利用犹豫模糊符号距离对犹豫模糊元进行运算时, 无需在含有元素少的犹豫模糊元中添加元素, 从而可以避免人为添加元素对决策结果的影响.

3 算例分析

3.1 算例

为便于比较, 本文采用文献[14,17]的例子. 能源是社会经济发展不可缺少的重要因素, 能源政策的正确与否会直接影响到社会经济发展. 现对5种能源项目 $Y_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 进行投资, 考虑以下指标: 技术 G_1 , 环境 G_2 , 社会政策 G_3 , 经济政策 G_4 . 一个决策小组对项目 $Y_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 按各指标 $G_j (j = 1, 2, 3, 4)$ 进行测度, 获得犹豫模糊决策矩阵 $M = (h_{ij})_{m \times n}$ (见表1), 如 $h_{11}^1 = \{0.3, 0.4, 0.5\}$ 表示在技术方面决策小组有3种不同观点, 即方案 Y_1 满足属性 G_1 的程度有0.3、0.4和0.5三种, 表明决策小组中成员有不同意见.

具体决策过程如下:

1) 决策小组对方案 $Y_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 按各属性 $G_j (j = 1, 2, 3, 4)$ 进行测度, 获得犹豫模糊决策矩阵 $M = (h_{ij})_{5 \times 4}$, 见表1.

2) 根据模型(M-1), 获得属性权重

$$W = (0.2013, 0.3617, 0.2529, 0.1841)^T.$$

结果显示, 环境 G_2 最重要, 这也表明目前的能源项目投资更加关注环境的可持续发展.

表1 犹豫模糊决策矩阵 $M = (h_{ij})_{5 \times 4}$

	G_1	G_2	G_3	G_4
Y_1	{0.3, 0.4, 0.5}	{0.1, 0.7, 0.8, 0.9}	{0.2, 0.4, 0.5}	{0.3, 0.5, 0.6, 0.9}
Y_2	{0.3, 0.5}	{0.2, 0.5, 0.6, 0.7, 0.9}	{0.1, 0.5, 0.6, 0.8}	{0.3, 0.4, 0.7}
Y_3	{0.6, 0.7}	{0.6, 0.9}	{0.3, 0.5, 0.7}	{0.4, 0.6}
Y_4	{0.3, 0.4, 0.7, 0.8}	{0.2, 0.4, 0.7}	{0.1, 0.8}	{0.6, 0.8, 0.9}
Y_5	{0.1, 0.3, 0.6, 0.7, 0.9}	{0.4, 0.6, 0.7, 0.8}	{0.7, 0.8, 0.9}	{0.3, 0.6, 0.7, 0.9}

3) 根据式(12)计算各方案的加权符号距离 $D_w(Y_i, \tilde{1}), i = 1, 2, 3, 4, 5$, 有

$$D_w(Y_1, \tilde{1}) = 0.4379, D_w(Y_2, \tilde{1}) = 0.4348,$$

$$D_w(Y_3, \tilde{1}) = 0.3296, D_w(Y_4, \tilde{1}) = 0.4139,$$

$$D_w(Y_5, \tilde{1}) = 0.3083,$$

因此 $Y_5 \succ Y_3 \succ Y_4 \succ Y_2 \succ Y_1$. 结果表明, 项目 Y_5 最值得投资.

3.2 结果比较

文献[14]、文献[17]对上述问题进行了研究. 文献[14]假设属性权重已知, 并利用方案与主理想方案 $Y^* = \{1\}$ 之间的广义犹豫加权距离对方案进行排序, 距离越小, 方案越优. 文献[17]假设属性权重未知,

利用离差最大化方法确定属性权重, 并基于TOPSIS方法对方案进行排序.

1) 文献[14]假设属性权重为 $(0.15, 0.3, 0.2, 0.35)^T$, 基于广义犹豫加权距离对方案进行排序, 有

$$d_{ghw}(M, N) =$$

$$\left[\sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{1}{l_{x_i}} \sum_{j=1}^{l_{x_i}} |\gamma_M^j(x_i) - \gamma_N^j(x_i)|^\lambda \right) \right]^{1/\lambda}. \quad (13)$$

不失一般性, 取 $\lambda = 1$. 为了计算方案与主理想方案的距离, 需根据决策者的风险态度对元素少的犹豫模糊元添加元素^[14-20]: 喜好风险的添加其中最大值, 厌恶风险的添加最小值, 风险中立型的则添加最大值与最小值的算术平均值. 根据决策者的不同风险态度, 获得的决策结果如表2所示.

表2 属性权重已知的排序结果

风险态度	$d_{ghw}(Y_1, 1)$	$d_{ghw}(Y_2, 1)$	$d_{ghw}(Y_3, 1)$	$d_{ghw}(Y_4, 1)$	$d_{ghw}(Y_5, 1)$	方案排序
厌恶	0.4799	0.5027	0.4025	0.4292	0.3558	$Y_5 \succ Y_3 \succ Y_4 \succ Y_1 \succ Y_2$
中立	0.4850	0.5	0.4025	0.4295	0.3590	$Y_5 \succ Y_3 \succ Y_4 \succ Y_1 \succ Y_2$
偏好	0.4223	0.4491	0.3340	0.3291	0.3182	$Y_5 \succ Y_4 \succ Y_3 \succ Y_1 \succ Y_2$
符号距离法	0.4317	0.4355	0.3386	0.3882	0.3215	$Y_5 \succ Y_3 \succ Y_4 \succ Y_1 \succ Y_2$

根据本文方法, 计算各方案符号距离 $D_w(Y_i, \tilde{1}) (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ (表2最后一行). 为便于比较, 采用文献[14]中的属性权重 (由于假设属性权重已知, 在方案排序上与3.1节结果略有不同). 与文献[14]相比, 最优方案一致, 但在方案 Y_3, Y_4 的排序上略有不同 (见图1). 为了计算各方案与主理想方案的犹豫加权距离, 文献[14]按照风险厌恶型在犹豫模糊元中添加元素, 相应的风险中立与偏好型结果见表2. 由表2可见, 随着添加元素的不同, 方案排序结果也会不同. 如方案 Y_3 与 Y_4 , 随着决策者风险态度的变化, 在风险厌恶和中立型时 $Y_3 \succ Y_4$, 当变为风险偏好时 $Y_3 \prec Y_4$. 造成这种差异的主要原因在于犹豫模糊元中添加的元素, 尤其当决策者风险偏好时, 添加了其中最大的元素, 当添加的元素较多时, 势必影响方案的排序. 如风险厌恶时, 添加其中最小的元素, 此时

$$d_{ghw}(Y_3, 1) = 0.4025 < d_{ghw}(Y_4, 1) = 0.4292.$$

风险偏好时, 添加其中最大的元素, 此时

$$d_{ghw}(Y_3, 1) = 0.3340 > d_{ghw}(Y_4, 1) = 0.3291.$$

而利用本文符号距离方法, 无需考虑决策者的风险态度, 从而可以避免人为添加元素对决策结果的影响.

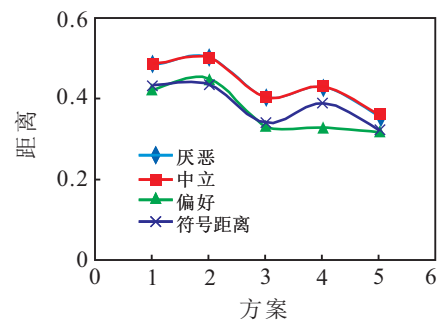


图1 属性权重已知的排序结果比较

2) 文献[17]利用离差最大化法确定属性权重, 并依据TOPSIS方法对方案进行排序. 根据决策者的风险态度, 获得的决策结果如表3所示. 本文利用符号

距离确定属性权重及对方案排序,与文献[17]相比,最优方案一致(见图2).文献[17]根据决策者的风险态度添加不同元素,不仅会影响到属性权重(见表3),更会影响方案的排序.如方案 Y_4 ,随着决策者风险态度的变化(即元素少的犹豫模糊元中添加的值不同)时,其排序也随之变化,而本文方法无需考虑决策者的风险态度在元素少的犹豫模糊元中添加元素,直接根据犹豫模糊决策信息确定属性权重、排序,因而更加合理可靠.

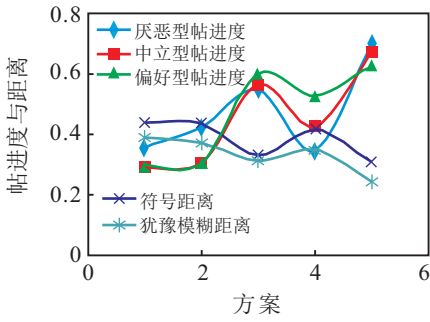


图2 属性权重未知的排序结果比较

表3 属性权重未知的排序结果

风险态度	属性权重	方案排序
厌恶	$w = (0.234\ 1, 0.247\ 4, 0.318\ 1, 0.200\ 4)^T$	$Y_5 \succ Y_3 \succ Y_2 \succ Y_1 \succ Y_4$
中立	$w = (0.256\ 5, 0.242\ 0, 0.287\ 8, 0.213\ 7)^T$	$Y_5 \succ Y_3 \succ Y_4 \succ Y_2 \succ Y_1$
偏好	$w = (0.246\ 2, 0.238\ 5, 0.291\ 5, 0.223\ 8)^T$	$Y_5 \succ Y_3 \succ Y_4 \succ Y_2 \succ Y_1$
符号距离法	$w = (0.201\ 3, 0.361\ 7, 0.252\ 9, 0.184\ 1)^T$	$Y_5 \succ Y_3 \succ Y_4 \succ Y_2 \succ Y_1$

3) 文献[21]提出了一种新的犹豫模糊距离测度,无需在元素少的犹豫模糊元中添加元素.不失一般性,采用其中的犹豫加权海明距离

$$d_{hwh}(M, N) = \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{2} \left(\left(\sum_{\gamma_M(x_i) \in h_M(x_i)} \min_{\gamma_N(x_i) \in h_N(x_i)} |\gamma_M(x_i) - \gamma_N(x_i)| \right) / l_{h_M(x_i)} + \frac{\sum_{\gamma_N(x_i) \in h_N(x_i)} \min_{\gamma_M(x_i) \in h_M(x_i)} |\gamma_N(x_i) - \gamma_M(x_i)|}{l_{h_N(x_i)}} \right). \quad (14)$$

为便于比较,采用本文方法确定的属性权重

$$w = (0.201\ 3, 0.361\ 7, 0.252\ 9, 0.184\ 1)^T,$$

则各方案与理想点的犹豫加权海明距离为

$$d_{hwh}(Y_1, \tilde{1}) = 0.388\ 2, \quad d_{hwh}(Y_2, \tilde{1}) = 0.37, \\ d_{hwh}(Y_3, \tilde{1}) = 0.312\ 7, \quad d_{hwh}(Y_4, \tilde{1}) = 0.347\ 6, \\ d_{hwh}(Y_5, \tilde{1}) = 0.244.$$

因此, $Y_5 \succ Y_3 \succ Y_4 \succ Y_2 \succ Y_1$,与本文方法所得方案排序一致(见图2),说明了本文方法的合理性与有效性.与其相比,本文的符号距离法计算简便,并且考虑了决策者或决策群体的犹豫度,从而能很好地反映决策者之间的分歧程度^[19-20,22-23].

4) 为减少计算量,文献[26]提出了一种调整的犹豫模糊加权平均算子(AHFWA),同时利用文献[12]中的犹豫模糊元得分函数进行比较,所得到的方案的排序结果如表4所示.由表4中的结果可以看出,采用AHFWA,仍需根据决策者风险态度在含有元素少的犹豫模糊元中添加元素,同样会影响到方案排序,甚至影响最优方案.

表4 AHFWA排序结果

风险态度	$s(Y_1)$	$s(Y_2)$	$s(Y_3)$	$s(Y_4)$	$s(Y_5)$	方案排序
厌恶	0.466 2	0.479 0	0.568 4	0.444 6	0.626 5	$Y_5 \succ Y_3 \succ Y_2 \succ Y_1 \succ Y_4$
中立	0.525 7	0.516 0	0.640 9	0.545 8	0.665 4	$Y_5 \succ Y_3 \succ Y_4 \succ Y_1 \succ Y_2$
偏好	0.599 1	0.560 3	0.724 8	0.658 7	0.705 6	$Y_3 \succ Y_5 \succ Y_4 \succ Y_1 \succ Y_2$
符号距离法	0.437 9	0.434 8	0.329 6	0.413 9	0.308 3	$Y_5 \succ Y_3 \succ Y_4 \succ Y_2 \succ Y_1$

4 结 论

本文提出了一种新的犹豫模糊符号距离,并对属性权重完全未知的犹豫模糊多属性决策问题进行了研究.主要做了以下工作:

1) 基于犹豫模糊元中元素的方差与个数定义犹豫度,以反映决策者或决策群体的分歧程度,并基于

犹豫度定义一种区分度较高的犹豫模糊符号距离.

2) 基于离差最大化思想,利用新的犹豫模糊符号距离建立属性权重优化模型,并对其解的存在性进行了证明.

3) 针对犹豫模糊环境下的方案排序问题,提出了一种加权符号距离方法.无论是在属性权重确定,

还是方案排序上,本文方法都无需人为添加元素,因而结果更加合理、可靠。

当然,在应用犹豫模糊符号距离时,主要基于决策者提供的信息与数据,而决策者的判断可能存在主观性。为得到较为客观的决策信息、降低决策者主观随意性对决策结果的影响,下一步应考虑对决策信息进行适度修正,以提高决策效果与质量。同时,将本文方法应用到模式识别与市场预测等领域也值得探讨。

参考文献(References)

- [1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. *Information and Control*, 1965, 8(3): 338-353.
- [2] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 20(1): 87-96.
- [3] Dubois D, Prade H. Fuzzy sets and systems: Theory and applications[M]. New York: Academic Press, 1980: 30-32.
- [4] Yager R R. On the theory of bags[J]. *Int J of General Systems*, 1986, 13(1): 23-37.
- [5] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. *Int J of Intelligent Systems*, 2010, 25(6): 529-539.
- [6] Rodríguez R M, et al. A position and perspective analysis of hesitant fuzzy sets on information fusion in decision making: Towards high quality progress[J]. *Information Fusion*, 2016, 29(3): 89-97.
- [7] 刘小弟, 朱建军, 刘思峰. 犹豫模糊信息下的双向投影决策方法[J]. *系统工程理论与实践*, 2014, 34(10): 2637-2644.
(Liu X D, Zhu J J, Liu S F. The bidirectional projection method under hesitant fuzzy information[J]. *System Engineering — Theory & Practice*, 2014, 34(10): 2637-2644.)
- [8] Liao H C, Xu Z S. A VIKOR-based method for hesitant fuzzy multi-criteria decision making[J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2013, 12(4): 373-392.
- [9] Mehrdad A, Mohammad A. A hesitant fuzzy model of computational trust considering hesitancy, vagueness and uncertainty[J]. *Applied Soft Computing*, 2016, 42(1): 18-37.
- [10] Wang J Q, Wang D D, Zhang H Y, et al. Multi-criteria outranking approach with hesitant fuzzy sets[J]. *OR Spectrum*, 2014, 36(4): 1001-1019.
- [11] Farhadinia B. Information measures for hesitant fuzzy sets and interval-valued hesitant fuzzy sets[J]. *Information Sciences*, 2013, 240(10): 129-144.
- [12] Xia M M, Xu Z S. Hesitant fuzzy information aggregation in decision making[J]. *Int J of Approximate Reasoning*, 2011, 52(3): 395-407.
- [13] Qin J D, Liu X W, Pedrycz W. Hesitant fuzzy Maclaurin symmetric mean operators and its application to multiple-attribute decision making[J]. *Int J of Fuzzy Systems*, 2015, 17(4): 509-520.
- [14] Xu Z S, Xia M M. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets[J]. *Information Sciences*, 2011, 181(11): 2128-2138.
- [15] Xu Z S, Xia M M. Hesitant fuzzy entropy and cross-entropy and their use in multi-attribute decision-making[J]. *Int J of Intelligent Systems*, 2012, 27(9): 799-822.
- [16] Li X Y, Wei G W. GRA method for multiple criteria group decision making with incomplete weight information under hesitant fuzzy setting[J]. *J of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2014, 27(3): 1095-1105.
- [17] Xu Z S, Zhang X L. Hesitant fuzzy multi-attribute decision making based on TOPSIS with incomplete weight information[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2013, 52(1): 53-64.
- [18] Zhu B, Xu Z S, Xu J P. Deriving a ranking from hesitant fuzzy preference relations under group decision making[J]. *IEEE Trans on Cybernetics*, 2014, 44(8): 1328-1337.
- [19] Li D Q, Zeng W Y, Zhao Y B. Note on distance measure of hesitant fuzzy sets[J]. *Information Sciences*, 2015, 321(11): 103-115.
- [20] Zhang X L, Xu Z S. Novel distance and similarity measures on hesitant fuzzy sets with applications to clustering analysis[J]. *J of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2015, 28(5): 2279-2296.
- [21] Hu J H, Zhang X L. Hesitant fuzzy information measures and their applications in multi-criteria decision making[J]. *Int J of Systems Science*, 2016, 47(1): 62-76.
- [22] Zhang X L, Xu Z S. Hesitant fuzzy QUALIFLEX approach with a signed distance-based comparison method for multiple criteria decision analysis[J]. *Expert Systems with Applications*, 2015, 42(2): 873-884.
- [23] Liao H C, Xu Z S, Zeng X J. Novel correlation coefficients between hesitant fuzzy sets and their application in decision making[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2015, 82(7): 115-127.
- [24] Chen T Y. A signed-distance-based approach to importance assessment and multi-criteria group decision analysis based on interval type-2 fuzzy set[J]. *Knowledge and Information Systems*, 2013, 35(1): 193-231.
- [25] Wang Y M. Using the method of maximizing deviations to make decision for multi-indices[J]. *J of System Engineering and Electronics*, 1997, 8(3): 21-26.
- [26] Liao H C, Xu Z S, Xia M M. Multiplicative consistency of hesitant fuzzy preference relation and its application in group decision making[J]. *Int J of Information Technology & Decision Making*, 2014, 13(1): 47-76.

(责任编辑: 曹洪武)