

基于时变增益ESO的航天器无源姿态跟踪控制

王 青^{1†}, 龚立纲¹, 董朝阳²

(1. 北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191;

2. 北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191)

摘 要: 针对修正罗德里格参数描述的航天器姿态运动模型, 利用扩张状态观测器(ESO)研究无角速度测量下的无源姿态跟踪控制问题. 首先, 为了削弱常值增益 ESO 中的峰化现象, 设计一种时变增益 ESO 对角速度和系统的总干扰进行估计; 进一步考虑航天器姿态运动的无源特性, 结合互连和阻尼分配无源控制(IDA-PBC)理论及 backstepping 思想设计跟踪控制律; 最后, 从理论上对闭环系统的稳定性进行严格证明. 仿真结果验证了所提出控制方法的有效性.

关键词: 姿态跟踪; 无源性; 互连和阻尼分配; 扩张状态观测器; 时变增益

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Passive attitude tracking control of spacecraft based on time-varying gain ESO

WANG Qing^{1†}, GONG Li-gang¹, DONG Chao-yang²

(1. School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China; 2. School of Aeronautical Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: Passive attitude tracking control without angular velocity measurement is investigated based on the extended state observer(ESO), for the spacecraft attitude motion model described by modified Rodrigues parameters. Firstly, to weaken the peaking phenomenon in the constant gain ESO, a time-varying gain ESO is designed to provide estimations of both angular velocity and total disturbance of the attitude motion system. Then, by considering the passivity property of spacecraft attitude motion, combing the interconnection and damping assignment passivity-based control(IDA-PBC) theory and the backstepping idea, the tracking control law is designed. Finally, the stability of the closed-loop system is proved theoretically. Numerical simulations demonstrate the validity of the proposed control method.

Keywords: attitude tracking; passivity; interconnection and damping assignment; extended state observer; time-varying gain

0 引 言

航天器的姿态控制作为完成对地观测、交会对接等空间任务的基础环节, 以及刚体姿态控制理论的具体应用对象, 一直受到控制理论界和工程界研究人员的广泛关注^[1-3]. 在全状态反馈的前提下, 国内外学者采用包括自适应控制^[4]、backstepping 控制^[5]、滑模控制^[6]等多种方法对航天器姿态控制进行了研究, 并取得了丰富的成果. 但在实际情况中, 出于成本、空间等因素的考虑, 航天器可能未安装陀螺仪等角速度传感器, 或者测量的角速度信号含有较大的噪声, 此时无法直接利用角速度反馈进行控制, 因此有必要研究无角速度测量前提下的航天器姿态控制方法.

一方面, 现有文献中针对无角速度测量的航天器姿态控制的方法可分为两类: 一是根据姿态运动模型的无源特性^[7-9], 即单独考察角速度运动方程时, 输入力矩和角速度之间存在无源关系, 因此可通过构造另一个无源系统获得姿态角的近似微分来提供阻尼, 保证系统的稳定性; 二是根据航天器的输入力矩和姿态角输出来构造观测器^[10-12], 获得角速度的估计值用于反馈控制. 对于第 1 类方法, 证明稳定性的主要依据是 Barbalat 引理, 理论上只能保证无干扰情形下系统的渐近稳定性, 而航天器在空间轨道运行时不可避免地会受到外部扰动, 同时航天器自身的转动惯量等参数也存在不确定性, 从而限制了第 1 类方法

收稿日期: 2016-11-20; 修回日期: 2017-03-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61374012); 航空科学基金项目(2016ZA51011).

作者简介: 王青(1968—), 女, 教授, 博士, 从事飞行器制导与控制、网络控制系统等研究; 龚立纲(1992—), 男, 博士生, 从事飞行器控制、非线性系统的研究.

†通讯作者. E-mail: bhwangqing@126.com

的进一步应用. 对于第2类方法, 文献[10]基于部分 Lyapunov 函数严格化理论, 设计了平滑角速度观测器, 在无干扰情形下能够保证角速度观测误差的渐近收敛; 文献[11]结合重新定义的角速度估计误差和切换逻辑设计角速度观测器, 在无干扰情形下能够保证角速度观测误差的指数收敛. 但文献[10]和文献[11]均无法直接应用于干扰情形下的姿态跟踪控制. 文献[12]基于浸入与不变流形理论设计了角速度观测器, 但只能保证常值干扰情形下系统的稳定性.

文献[10-12]本质上属于对干扰的被动抑制, 由于理论上无法保证存在一般干扰情形下的稳定性, 系统的性能受限于实际干扰的特性. 针对干扰的主动抑制控制, 以扩张状态观测器(ESO)为核心的自抗扰控制方法近年来得到了越来越多的关注^[13-15], ESO 通过将系统的内外部扰动之和作为扩张状态进行实时估计, 从而可在控制律设计中对估计的总扰动进行补偿, 提升系统的性能. 文献[16-17]首次给出了 ESO 的收敛性理论证明, 对于线性 ESO, 特别是常值增益 ESO 的 Lyapunov 函数可以严格构造; 但对于非线性 ESO, 收敛性理论证明需要假设 Lyapunov 函数的存在, 不便于控制律的设计和分析, 因此对 ESO 的后续应用研究主要针对线性情形^[18-20]. 在线性情形下, 由于 ESO 初值和系统初值不一致, 会使得常值增益 ESO 出现峰化现象 (peaking phenomenon)^[21-22], 不利于闭环系统稳定.

另一方面, 在能够获取角速度测量的前提下, 现有文献中的全状态反馈控制方法大都是从 Lyapunov 函数出发, 利用控制力矩消除角速度运动模型中的非线性项^[2-6]. 从能量角度看, 稳定性的本质是为了衰减能量, 而角速度运动模型中包含的角速度和角动量叉积项是不影响能量衰减的, 在控制律设计中没有必要消除. 由 Acosta 等^[23-25]提出的互连和阻尼分配无源控制 (IDA-PBC) 理论充分考虑了这一点, 通过将系统模型表示为端口受控哈密顿 (PCH) 形式, 利用互连结构矩阵表示能量的分配关系, 最后注入阻尼矩阵来保证系统具有期望的特性. IDA-PBC 理论在温度控制系统^[26]、机械系统^[27]、感应电机系统^[28]等领域具有广泛的应用, 但在航天器姿态系统领域的应用还比较少见.

考虑到上述两方面情况, 本文针对修正罗德里格参数描述的航天器姿态运动模型, 首先设计一种时变增益 ESO 对角速度和系统的总干扰进行估计, 在保证观测误差收敛的同时, 削弱常值增益 ESO 的峰化现象; 进一步结合 IDA-PBC 理论和 backstepping 思

想, 设计姿态跟踪控制律, 利用 Lyapunov 函数从理论上证明闭环系统一致最终有界稳定. 数值仿真结果表明, 所提方法能够保证姿态跟踪误差的收敛性, 并有效削弱峰化现象的影响, 降低对控制力矩范数的要求, 便于工程应用.

1 航天器姿态模型

以修正罗德里格参数表示时, 航天器的姿态运动方程可以写为

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = G(\sigma)\omega, \\ J\dot{\omega} + \omega^\times J\omega = \tau + \tau_d. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]^\top$ 为修正罗德里格参数; $G(\sigma) = \frac{1}{4}[(1 - \sigma^\top \sigma)I_3 + 2\sigma^\times + 2\sigma\sigma^\top]$, σ^\times 为 σ 组成的反对称阵, 即

$$\sigma^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_3 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & 0 & -\sigma_1 \\ -\sigma_2 & \sigma_1 & 0 \end{bmatrix};$$

$\omega = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^\top$ 为航天器本体体系下的角速度; $J = J^\top > 0$ 为航天器的转动惯量阵; τ 为控制力矩; τ_d 为转动惯量不确定性、外部扰动等引起的总干扰力矩.

对于系统(1), 有如下假设:

假设1 τ_d 可导, 且存在常数 $M_d > 0$ 使得 $\|\tau_d\| \leq M_d$, $\|\dot{\tau}_d\| \leq M_d$.

2 线性时变ESO设计

令 $x_1 = \sigma$, $x_2 = G(\sigma)\omega$, 则由式(1)有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + g(x_1)\tau + \bar{\tau}_d. \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$f(x_1, x_2) = \dot{G}(x_1)G^{-1}(x_1)x_2 - G(x_1)J^{-1}.$$

$$[G^{-1}(x_1)x_2]^\times JG^{-1}(x_1)x_2,$$

$$g(x_1) = G(x_1)J^{-1},$$

$$\bar{\tau}_d = G(x_1)J^{-1}\tau_d.$$

由 $G(x_1)$ 的表达式可知

$$\dot{G}(x_1) = -\frac{1}{2}x_1^\top x_2 I_3 + \frac{1}{2}x_2^\times + \frac{1}{2}x_2 x_1^\top + \frac{1}{2}x_1 x_2^\top. \quad (3)$$

结合式(3), $f(x_1, x_2)$ 的表达式可以进一步写为

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = & -\frac{1}{2}x_1^\top x_2 G^{-1}(x_1)x_2 + \frac{1}{2}x_2^\times G^{-1}(x_1)x_2 + \\ & \frac{1}{2}x_2 x_1^\top G^{-1}(x_1)x_2 + \frac{1}{2}x_1 x_2^\top G^{-1}(x_1)x_2 - \\ & G(x_1)J^{-1}[G^{-1}(x_1)x_2]^\times JG^{-1}(x_1)x_2. \end{aligned} \quad (4)$$

取扩张状态 $\mathbf{x}_3 = \bar{\tau}_d$, 则系统方程可以写为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)\boldsymbol{\tau} + \mathbf{x}_3, \\ \dot{\mathbf{x}}_3 = \dot{\bar{\tau}}_d. \end{cases} \quad (5)$$

针对系统(5), 设计ESO如下:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 = \hat{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{L}_1(t)[\mathbf{x}_1 - \hat{\mathbf{x}}_1], \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \hat{\mathbf{x}}_2) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)\boldsymbol{\tau} + \hat{\mathbf{x}}_3 + \mathbf{L}_2(t)[\mathbf{x}_1 - \hat{\mathbf{x}}_1], \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_3 = \mathbf{L}_3(t)[\mathbf{x}_1 - \hat{\mathbf{x}}_1], \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\mathbf{L}_i(t) = \text{diag}\{l_i(t), l_i(t), l_i(t)\}$, $l_i(t)$ 为时变增益系数, $i = 1, 2, 3$.

对于系统(5)和ESO(6), 进一步有如下假设:

假设2 存在常数 $M > 0$ 使得 $\|\mathbf{x}_1\| \leq M, \|\mathbf{x}_2\| \leq M, \|\hat{\mathbf{x}}_1\| \leq M, \|\hat{\mathbf{x}}_2\| \leq M$.

定义观测误差 $\boldsymbol{\eta}_i = \mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i, i = 1, 2, 3$, 则有

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}}_1 = \boldsymbol{\eta}_2 - \mathbf{L}_1(t)\boldsymbol{\eta}_1, \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_2 = \boldsymbol{\eta}_3 - \mathbf{L}_2(t)\boldsymbol{\eta}_1 + \Delta\mathbf{f}, \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_3 = -\mathbf{L}_3(t)\boldsymbol{\eta}_1 + \dot{\bar{\tau}}_d, \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\Delta\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \hat{\mathbf{x}}_2)$. 系统(7)对于 $\boldsymbol{\eta}_i$ 的每一个分量而言, 本质上是解耦的, 即设 $\boldsymbol{\eta}_i = [\eta_{i,1}, \eta_{i,2}, \eta_{i,3}]^T$, 则有

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_{1,j} \\ \dot{\eta}_{2,j} \\ \dot{\eta}_{3,j} \end{bmatrix} = \mathbf{A}(t) \begin{bmatrix} \eta_{1,j} \\ \eta_{2,j} \\ \eta_{3,j} \end{bmatrix} + \mathbf{b}_1 \dot{\bar{\tau}}_{d,j} + \mathbf{b}_2 \Delta f_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (8)$$

其中: $\dot{\bar{\tau}}_{d,j}$ 和 Δf_j 分别为 $\dot{\bar{\tau}}_d$ 和 $\Delta\mathbf{f}$ 的第 j 个分量,

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} -l_1(t) & 1 & 0 \\ -l_2(t) & 0 & 1 \\ -l_3(t) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = [0 \ 0 \ 1]^T, \quad \mathbf{b}_2 = [0 \ 1 \ 0]^T.$$

为了分析系统(8)的稳定性, 考虑与系统(8)对应的辅助系统

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\eta}}_{1,j} \\ \dot{\bar{\eta}}_{2,j} \\ \dot{\bar{\eta}}_{3,j} \end{bmatrix} = \mathbf{A}(t) \begin{bmatrix} \bar{\eta}_{1,j} \\ \bar{\eta}_{2,j} \\ \bar{\eta}_{3,j} \end{bmatrix} + \mathbf{b}_1 \dot{\bar{\tau}}_{d,j}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (9)$$

与系统(9)对应的标准型为

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_c(t) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} + \mathbf{b}_c \dot{\bar{\tau}}_{d,j}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (10)$$

其中

$$\mathbf{A}_c(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1(t) & -a_2(t) & -a_3(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_c = \mathbf{b} = [0 \ 0 \ 1]^T,$$

$a_i(t)$ 为与 $l_i(t)$ 有关的函数, 且满足以下假设:

假设3 $a_i(t)$ 有界且三阶连续可导.

令 $\bar{\boldsymbol{\eta}} = [\bar{\eta}_{1,j}, \bar{\eta}_{2,j}, \bar{\eta}_{3,j}]^T, \boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]^T$. 与 $\bar{\boldsymbol{\eta}}$ 系统对应的可控性矩阵为

$$\mathbf{U}(t) = [\mathbf{p}_1(t), \mathbf{p}_2(t), \mathbf{p}_3(t)].$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1(t) &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{p}_2(t) &= -\mathbf{A}(t)\mathbf{p}_1(t) + \dot{\mathbf{p}}_1(t), \\ \mathbf{p}_3(t) &= -\mathbf{A}(t)\mathbf{p}_2(t) + \dot{\mathbf{p}}_2(t). \end{aligned}$$

由 $\mathbf{A}(t)$ 和 \mathbf{b} 的表达式可得

$$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

同理, 与 $\boldsymbol{\xi}$ 系统对应的可控性矩阵为

$$\mathbf{U}_c(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -a_3(t) \\ 1 & a_3(t) & -a_2(t) + a_3^2(t) + \dot{a}_3(t) \end{bmatrix}.$$

则从 $\bar{\boldsymbol{\eta}}$ 系统到 $\boldsymbol{\xi}$ 系统的坐标变换矩阵^[22,29] 为

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{U}_c(t)\mathbf{U}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_3(t) & 1 & 0 \\ -a_2(t) + a_3^2(t) + \dot{a}_3(t) & -a_3(t) & 1 \end{bmatrix}.$$

由假设3可知, $\mathbf{F}^{-1}(t)$ 存在且有界, 具体表达式

为

$$\mathbf{F}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_3(t) & 1 & 0 \\ a_2(t) - \dot{a}_3(t) & a_3(t) & 1 \end{bmatrix}.$$

进一步, 由 $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{F}(t)\bar{\boldsymbol{\eta}}$ 可得

$$\begin{cases} \mathbf{A}(t) = \mathbf{F}^{-1}(t)(\mathbf{A}_c(t)\mathbf{F}(t) - \dot{\mathbf{F}}(t)), \\ \mathbf{b} = \mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{b}_c. \end{cases}$$

由 $\mathbf{F}(t)$ 、 \mathbf{b} 和 \mathbf{b}_c 的表达式可知上式中的第2式是成立的, 由上式中的第1式有

$$\begin{cases} l_1(t) = a_3(t), \\ l_2(t) = a_2(t) - 2\dot{a}_3(t), \\ l_3(t) = a_1(t) + \ddot{a}_3(t) - \dot{a}_2(t). \end{cases} \quad (11)$$

由式(11)可知, $l_i(t)$ 可以表示为 $a_i(t)$ 的函数, 通

过设计 $a_i(t)$ 来保证系统(10)稳定,从而有助于揭示ESO的稳定性.一旦得到合适的 $a_i(t)$,则ESO的参数也随之确定.设与系统(10)对应的PD特征值和SD特征值分别为 $\rho_i(t)$ 和 $\mu_i(t)$ ^[22,29],定义

$$T_0(t) = T_1(t) = 1,$$

$$T_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \rho_1(t) & \rho_2(t) \end{bmatrix},$$

$$T_3(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \rho_1(t) & \rho_2(t) & \rho_3(t) \\ \dot{\rho}_1(t) + \rho_1^2(t) & \dot{\rho}_2(t) + \rho_2^2(t) & \dot{\rho}_3(t) + \rho_3^2(t) \end{bmatrix},$$

则有

$$\begin{cases} \mu_i(t) = \rho_i(t) + \dot{T}_i(t)/T_i(t) - \dot{T}_{i-1}(t)/T_{i-1}(t), \\ \kappa_{i,j}(t) = \dot{\kappa}_{i-1,j}(t) - \mu_i(t)\kappa_{i-1,j}(t) + \kappa_{i-1,j-1}(t). \\ i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (12)$$

其中: $\kappa_{n,0}(t) = 0, \kappa_{n,n+1}(t) = 0, n = 0, 1, 2; T_2(t)$ 和 $T_3(t)$ 分别为 $T_2(t)$ 和 $T_3(t)$ 对应的行列式.根据式(12)递推计算出的 $\kappa_{3,j}(t)$ 对应于 $a_i(t)$, 即有 $a_1(t) = \kappa_{3,1}(t), a_2(t) = \kappa_{3,2}(t), a_3(t) = \kappa_{3,3}(t)$.因此,系统(10)的稳定性最终归结于 $\rho_i(t)$ 的设计.对于线性时不变系统, $\rho_i(t)$ 即对应于系统矩阵的特征值.

根据上述分析,有以下引理.

引理1 设 $\rho_i(t)$ 为实数且满足如下条件:1) $\rho_i(t)$ 有界且三阶连续可导;2)由式(12)计算出的 $a_{3,j}(t)$ 满足假设3;3)存在常数 $c > 0$ 使得 $\rho_i(t) \leq -c < 0$.则系统 $\dot{\chi} = A(t)\chi$ 和 $\dot{\chi}_c = A_c(t)\chi_c$ 是指数稳定的.

证明 由条件1)~条件3)可知 $T_3(t)$ 非奇异且连续可导,令 $\chi_z = T_3^{-1}(t)\chi_c$,则有

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_z &= \dot{T}_3^{-1}(t)\chi_c + T_3^{-1}(t)\dot{\chi}_c = \\ &[\dot{T}_3^{-1}(t) + T_3^{-1}(t)A_c(t)]T_3(t)\chi_z = \\ &A_z(t)\chi_z, \end{aligned}$$

其中

$$A_z(t) = \text{diag}\{\rho_1(t), \rho_2(t), \rho_3(t)\}.$$

根据条件3),取对称正定阵 $P_z(t)$ 为单位阵,Lyapunov函数 $V_1(\chi_z) = \chi_z^T P_z(t)\chi_z$,则有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\chi_z) &= \\ \chi_z^T [\dot{P}_z(t) + P_z(t)A_z(t) + A_z^T(t)P_z(t)]\chi_z &= \\ 2\chi_z^T A_z \chi_z &\leq -2c\|\chi_z\|^2 < 0. \end{aligned}$$

由上式可知 χ_z 系统是指数稳定的.设 χ_z 系统的状态转移矩阵为 $\Phi_z(t, t_0)$,则存在常数 $k_1 > 0$ 和 $k_2 > 0$ 使

得

$$\|\Phi_z(t, t_0)\| \leq k_1 e^{-k_2(t-t_0)}, \forall t \geq t_0.$$

设 χ_c 和 χ 系统的状态转移矩阵分别为 $\Phi_c(t, t_0)$ 和 $\Phi_x(t, t_0)$,则有

$$\begin{aligned} \|\Phi_c(t, t_0)\| &= \|T_3(t)\Phi_z(t, t_0)T_3^{-1}(t)\| \leq \\ &\|T_3(t)\| \|T_3^{-1}(t)\| \|\Phi_z(t, t_0)\|, \\ \|\Phi_x(t, t_0)\| &= \|F^{-1}(t)\Phi_c(t, t_0)F(t)\| \leq \\ &\|F(t)\| \|F^{-1}(t)\| \|\Phi_c(t, t_0)\|. \end{aligned}$$

由于 $T_3(t), T_3^{-1}(t), F(t), F^{-1}(t)$ 均存在,且连续有界,存在常数 $k_3 > 0$ 和 $k_4 > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \|\Phi_c(t, t_0)\| &\leq k_3 e^{-k_2(t-t_0)}, \\ \|\Phi_x(t, t_0)\| &\leq k_4 e^{-k_2(t-t_0)}, \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

从而 χ 和 χ_c 系统是指数稳定的. \square

根据引理1,进一步有以下定理.

定理1 若 $\rho_i(t) \leq -\frac{c_1}{\varepsilon} < 0$,且满足引理1中的条件, $c_1 > 0, 0 < \varepsilon \ll 1$,则 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\eta(t)\| = O(\varepsilon)$,其中 $\eta = [\eta_1^T, \eta_2^T, \eta_3^T]^T$.

证明 令

$$P_\eta(t) = (T_3^{-1}(t)F(t))^T (T_3^{-1}(t)F(t)),$$

根据引理1中的条件可知 $P_\eta(t)$ 有界连续可导,且为对称正定矩阵.由

$$\chi_z = T_3^{-1}(t)\chi_c = T_3^{-1}(t)F(t)\chi$$

可知

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_z &= \frac{d(T_3^{-1}(t)F(t))}{dt} \chi + T_3^{-1}(t)F(t)\dot{\chi} = \\ &\left[\frac{d(T_3^{-1}(t)F(t))}{dt} + \right. \\ &\left. T_3^{-1}(t)F(t)A(t) \right] (T_3^{-1}(t)F(t))^{-1} \chi_z. \end{aligned}$$

进一步,由 $\dot{\chi}_z = A_z(t)\chi_z$ 可知有如下关系成立:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d(T_3^{-1}(t)F(t))}{dt} + \right. \\ \left. A_z(t)T_3^{-1}(t)F(t) \right] = \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \dot{P}_\eta(t) + P_\eta(t)A(t) + A^T(t)P_\eta(t) &= \\ 2 \frac{d(T_3^{-1}(t)F(t))^T}{dt} (T_3^{-1}(t)F(t)) + \\ 2(T_3^{-1}(t)F(t))^T (T_3^{-1}(t)F(t))A(t) &= \\ 2(T_3^{-1}(t)F(t))^T A_z(t)T_3^{-1}(t)F(t). \end{aligned}$$

对于系统(8),令 $\tilde{\eta} = [\eta_{1,j}, \eta_{2,j}, \eta_{3,j}]^T$,选取Lyapunov函数为 $V_2(\tilde{\eta}) = \tilde{\eta}^T P_\eta(t)\tilde{\eta}$,则 $V_2(\tilde{\eta})$ 沿系统的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) = & 2\tilde{\boldsymbol{\eta}}^T (\mathbf{T}_3^{-1}(t)\mathbf{F}(t))^T \mathbf{A}_z(t)\mathbf{T}_3^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\tilde{\boldsymbol{\eta}} + \\ & 2\tilde{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{P}_\eta(t)[0, \dot{\tau}_{d,j}, \Delta f_j]^T. \end{aligned}$$

由 $\mathbf{A}_z(t)$ 的组成可知, 存在常数 $c_2 > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\eta}}^T (\mathbf{T}_3^{-1}(t)\mathbf{F}(t))^T \mathbf{A}_z(t)\mathbf{T}_3^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\tilde{\boldsymbol{\eta}} \leq & \\ -\frac{c_2}{\varepsilon} \|\mathbf{T}_3^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\tilde{\boldsymbol{\eta}}\|^2 = & \\ -\frac{c_2}{\varepsilon} \tilde{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{P}_\eta(t)\tilde{\boldsymbol{\eta}}. & \end{aligned}$$

由 $\mathbf{P}_\eta(t)$ 的性质可知, 存在常数 c_3, c_4 和 $c_5 > 0$ 使得

$$\begin{aligned} c_3 \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}\|^2 \leq \tilde{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{P}_\eta(t)\tilde{\boldsymbol{\eta}} \leq c_4 \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}\|^2, \\ \|\mathbf{P}_\eta(t)\| \leq c_5. \end{aligned}$$

从而有

$$\dot{V}_2(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \leq -\frac{2c_2c_3}{\varepsilon} \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}\|^2 + 2c_5 \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}\| \| [0, \dot{\tau}_{d,j}, \Delta f_j]^T \|.$$

进一步, 令

$$\begin{aligned} V_3(\boldsymbol{\eta}) &= \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P}(t)\boldsymbol{\eta}, \\ \mathbf{P}(t) &= \text{diag}\{\mathbf{P}_\eta(t), \mathbf{P}_\eta(t), \mathbf{P}_\eta(t)\}, \end{aligned}$$

则有

$$\dot{V}_3(\boldsymbol{\eta}) \leq -\frac{2c_2c_3}{\varepsilon} \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + 2c_5 \|\boldsymbol{\eta}\| (\|\dot{\tau}_d\| + \|\Delta \mathbf{f}\|).$$

由假设2可知

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{x}_1)\| = \frac{1 + \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1}{4} \leq \frac{1 + M^2}{4},$$

$$\|\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_1)\| = \left\| \frac{16}{(1 + \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1)^2} \right\| = \frac{4}{1 + \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1} \leq 4,$$

从而有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1^T \hat{\mathbf{x}}_2 \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_1) \hat{\mathbf{x}}_2\| = \\ \|\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_1) \boldsymbol{\eta}_2 + \mathbf{x}_1^T \boldsymbol{\eta}_2 \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_1) \hat{\mathbf{x}}_2\| \leq \\ 8M^2 \|\boldsymbol{\eta}_2\|. \end{aligned} \quad (13)$$

同理有

$$\|\mathbf{x}_2^\times \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2 - \hat{\mathbf{x}}_2^\times \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_1) \hat{\mathbf{x}}_2\| \leq 8M \|\boldsymbol{\eta}_2\|, \quad (14)$$

$$\|\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_1^T \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2 - \hat{\mathbf{x}}_2 \mathbf{x}_1^T \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_1) \hat{\mathbf{x}}_2\| \leq 8M^2 \|\boldsymbol{\eta}_2\|, \quad (15)$$

$$\|\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^T \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \hat{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_1) \hat{\mathbf{x}}_2\| \leq 8M^2 \|\boldsymbol{\eta}_2\|, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}(\mathbf{x}_1) \mathbf{J}^{-1} [\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2]^\times \mathbf{J} \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2 + \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}_1) \mathbf{J}^{-1} [\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_1) \hat{\mathbf{x}}_2]^\times \mathbf{J} \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_1) \hat{\mathbf{x}}_2\| \leq \\ \frac{8\lambda_1 M(1 + M^2)}{\lambda_2} \|\boldsymbol{\eta}_2\|. \end{aligned} \quad (17)$$

其中: $\lambda_1 = \lambda_{\max}(\mathbf{J})$, $\lambda_2 = \lambda_{\min}(\mathbf{J})$.

结合式(13)~(17)可知

$$\|\Delta \mathbf{f}\| \leq M_f \|\boldsymbol{\eta}_2\|,$$

$$M_f = 4M \left[1 + 3M + \frac{2\lambda_1}{\lambda_2} (1 + M^2) \right].$$

进一步, 由假设1可知

$$\|\dot{\tau}_d\| = \|\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_1) \mathbf{J}^{-1} \boldsymbol{\tau}_d + \mathbf{G}(\mathbf{x}_1) \mathbf{J}^{-1} \dot{\boldsymbol{\tau}}_d\| \leq M_\Delta,$$

$$M_\Delta = \frac{M_d(7M^2 + 2M + 1)}{4\lambda_2},$$

从而有

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(\boldsymbol{\eta}) \leq \\ -\frac{2c_2c_3}{\varepsilon} \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + 2c_5 M_f \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + 2c_5 M_\Delta \|\boldsymbol{\eta}\|. \end{aligned}$$

取 $0 < \varepsilon \leq \min\left\{1, \frac{c_2c_3}{2c_5 M_f}\right\}$, 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(\boldsymbol{\eta}) \leq -\frac{c_2c_3}{\varepsilon} \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + 2c_5 M_\Delta \|\boldsymbol{\eta}\| \leq \\ -\frac{c_2c_3}{\varepsilon c_4} V_3(\boldsymbol{\eta}) + 2\frac{\sqrt{c_3}}{c_3} c_5 M_\Delta \sqrt{V_3(\boldsymbol{\eta})}. \end{aligned}$$

进一步, 由

$$\frac{d}{dt} \sqrt{V_3(\boldsymbol{\eta})} = \frac{1}{2\sqrt{V_3(\boldsymbol{\eta})}} \frac{d}{dt} V_3(\boldsymbol{\eta})$$

可得

$$\frac{d}{dt} \sqrt{V_3(\boldsymbol{\eta})} \leq -\frac{c_2c_3}{2\varepsilon c_4} \sqrt{V_3(\boldsymbol{\eta})} + \frac{\sqrt{c_3}}{c_3} c_5 M_\Delta,$$

从而有

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\eta}(t)\| \leq \sqrt{\frac{V_3(\boldsymbol{\eta}(t))}{c_3}} \leq \\ \sqrt{\frac{V_3(\boldsymbol{\eta}(0))}{c_3}} e^{-\frac{c_2c_3}{2\varepsilon c_4} t} + \frac{c_5 M_\Delta}{c_3} \int_0^t e^{-\frac{c_2c_3}{2\varepsilon c_4} (t-s)} ds. \end{aligned}$$

由上式可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\|\boldsymbol{\eta}(t)\| \rightarrow O(\varepsilon)$. \square

注1 定理1本质上是在引理1的基础上, 对时变增益ESO观测误差的分析. 在引理1中已证明了, 当与线性时变系统矩阵对应的PD特征值 $\rho_i(t) < 0$, 且足够光滑时, 线性时变系统指数稳定. 在 $\rho_i(t)$ 确定的情况下, 通过式(11)和(12)可以计算出对应的ESO时变增益 $l_i(t)$. 定理1的结论表明, 若 $\rho_i(t)$ 取为 $1/\varepsilon$ 的同阶量, 则ESO观测误差的界趋于 ε 的同阶量.

3 IDA-PBC控制器设计

设 $\mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma})$ 为与 $\boldsymbol{\sigma}$ 对应的姿态矩阵, 其具体表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}) = \\ \mathbf{I}_3 - 4 \frac{1 - \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma}}{(1 + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma})^2} \boldsymbol{\sigma}^\times + \frac{8}{(1 + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma})^2} (\boldsymbol{\sigma}^\times)^2. \end{aligned}$$

期望的姿态运动模型为

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_r = \mathbf{G}(\boldsymbol{\sigma}_r) \boldsymbol{\omega}_r.$$

其中: $\boldsymbol{\sigma}_r$ 为期望的姿态, $\boldsymbol{\omega}_r$ 为期望的角速度. 针对期望的姿态运动, 有如下假设:

假设4 存在常数 $M_r > 0$, 使得 $\|\sigma_r\| \leq M_r$, $\|\omega_r\| \leq M_r$, $\|\dot{\omega}_r\| \leq M_r$.

定义姿态和角速度跟踪误差状态分别为 x_{c1} 和 x_{c2} , 且分别满足

$$\begin{aligned} C(x_{c1}) &= C(\sigma)C^T(\sigma_r), \\ x_{c2} &= J[\omega - C(x_{c1})\omega_r], \end{aligned}$$

则有

$$\begin{cases} \dot{x}_{c1} = G(x_{c1})J^{-1}x_{c2}, \\ \dot{x}_{c2} = SJ^{-1}x_{c2} + \bar{\tau} + \tau_d. \end{cases} \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} \tau &= (C(x_{c1})\omega_r)^\times JC(x_{c1})\omega_r + JC(x_{c1})\dot{\omega}_r + \bar{\tau}, \\ S &= (J\omega)^\times - (C(x_{c1})\omega_r)^\times J - J(C(x_{c1})\omega_r)^\times \end{aligned}$$

为反对称阵; $\bar{\tau}$ 为待设计的部分.

根据 backstepping 思想, 有

$$\begin{aligned} \dot{x}_{c1} &= \\ &-D_1x_{c1} + G(x_{c1})J^{-1}[x_{c2} + JG^{-1}(x_{c1})D_1x_{c1}]. \end{aligned} \quad (19)$$

其中: D_1 为正定对称阵, $-JG^{-1}(x_{c1})D_1x_{c1}$ 为 x_{c2} 的虚拟指令. 令

$$\begin{aligned} z_1 &= x_{c1}, \\ z_2 &= x_{c2} + JG^{-1}(x_{c1})D_1x_{c1}, \end{aligned}$$

则有

$$\dot{z}_1 = -D_1z_1 + G(z_1)J^{-1}z_2. \quad (20)$$

结合式(18)和(20), 并取哈密顿函数为

$$H(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(z_1^T z_1 + z_2^T J^{-1}z_2),$$

可直接写出期望的闭环系统PCH形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_1 & G(z_1) \\ -G^T(z_1) & S - D_2 \end{bmatrix} \nabla H(z_1, z_2). \quad (21)$$

由式(21)有

$$\dot{z}_2 = -G^T(z_1)\frac{\partial H}{\partial z_1} + (S - D_2)\frac{\partial H}{\partial z_2}. \quad (22)$$

而由式(18)和 z_2 的表达式有

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \\ \dot{x}_{c2} + J\dot{G}^{-1}(x_{c1})D_1x_{c1} + JG^{-1}(x_{c1})D_1\dot{x}_{c1} &= \\ SJ^{-1}x_{c2} + \bar{\tau} + \tau_d + J\dot{G}^{-1}(x_{c1})D_1x_{c1} + \\ JG^{-1}(x_{c1})D_1G(x_{c1})J^{-1}x_{c2}. \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$\dot{G}^{-1}(x_{c1}) = -G^{-1}(x_{c1})\dot{G}(x_{c1})G^{-1}(x_{c1}).$$

结合式(22)和(23)可得

$\bar{\tau} =$

$$\begin{aligned} &\{[(S - D_2)G^{-1}(x_{c1}) - \\ &J\dot{G}^{-1}(x_{c1})]D_1 - G^T(x_{c1})\}x_{c1} - \\ &[D_2 + JG^{-1}(x_{c1})D_1G(x_{c1})]J^{-1}x_{c2} - \tau_d. \end{aligned} \quad (24)$$

角速度项和干扰项只能取估计值, 因此实际的控制指令取为

$$\begin{aligned} \hat{\tau} &= \\ &\{[(\hat{S} - D_2)G^{-1}(x_{c1}) - J\dot{\hat{G}}^{-1}(x_{c1})]D_1 - \\ &G^T(x_{c1})\}x_{c1} - [D_2 + \\ &JG^{-1}(x_{c1})D_1G(x_{c1})]J^{-1}\hat{x}_{c2} - \hat{\tau}_d. \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \\ &(JG^{-1}(x_1)\hat{x}_2)^\times - (C(x_{c1})\omega_r)^\times J - \\ &J(C(x_{c1})\omega_r)^\times, \\ \hat{x}_{c2} &= J[G^{-1}(x_1)\hat{x}_2 - C(x_{c1})\omega_r], \\ \hat{G}^{-1}(x_{c1}) &= -G^{-1}(x_{c1})\dot{\hat{G}}(x_{c1})G^{-1}(x_{c1}), \\ \dot{\hat{G}}(x_{c1}) &= \\ &-\frac{1}{2}x_{c1}^T G(x_{c1})J^{-1}\hat{x}_{c2}I_3 + \frac{1}{2}[G(x_{c1})J^{-1}\hat{x}_{c2}]^\times + \\ &\frac{1}{2}G(x_{c1})J^{-1}\hat{x}_{c2}x_{c1}^T + \frac{1}{2}x_{c1}[G(x_{c1})J^{-1}\hat{x}_{c2}]^T, \\ \hat{\tau}_d &= JG^{-1}(x_1)\hat{x}_3. \end{aligned}$$

4 闭环系统稳定性分析

针对第2节设计的时变增益ESO和第3节设计的控制律, 有以下定理.

定理2 在时变增益ESO(6)和控制律(25)的作用下, 航天器姿态闭环系统一致最终有界稳定, 且稳定的界为 $O(\sqrt{\varepsilon})$.

证明 选取闭环系统的Lyapunov函数为

$$\begin{aligned} V(\nu) &= V_3(\eta) + H(z_1, z_2), \\ \nu &= [\eta^T, z_1^T, z_2^T]^T. \end{aligned}$$

由第2节和第3节的分析可知, $V(\nu)$ 正定且径向无界, 设

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \lambda_{\max}(D_1), \\ \lambda_4 &= \lambda_{\min}(D_1), \\ \lambda_5 &= \lambda_{\max}(D_2), \\ \lambda_6 &= \lambda_{\min}(D_2), \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{V}(\nu) &= \\ \dot{V}_3(\eta) + \dot{H}(z_1, z_2) &\leq \end{aligned}$$

$$-\frac{c_2c_3}{\varepsilon}\|\boldsymbol{\eta}\|^2 - \lambda_4\|\mathbf{z}_1\|^2 - \lambda_6\|\mathbf{z}_2\|^2 + 2c_5M_\Delta\|\boldsymbol{\eta}\| + \mathbf{z}_2^T\mathbf{J}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\tau}} - \bar{\boldsymbol{\tau}}).$$

由式(20)和(21)可得

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\tau}} - \bar{\boldsymbol{\tau}} = & [(\hat{\mathbf{S}} - \mathbf{S})\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_{c1}) - \mathbf{J}(\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_{c1}) - \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_{c1}))]\mathbf{D}_1\mathbf{x}_{c1} - [\mathbf{D}_2 + \\ & \mathbf{J}\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_{c1})\mathbf{D}_1\mathbf{G}(\mathbf{x}_{c1})]\mathbf{J}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_{c2} - \mathbf{x}_{c2}) - (\hat{\boldsymbol{\tau}}_d - \boldsymbol{\tau}_d). \end{aligned}$$

对上式右端的每一项进一步处理,有

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{S}} - \mathbf{S}\| &= \|\mathbf{J}\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_1)\boldsymbol{\eta}_2\| \leq 4\lambda_1\|\boldsymbol{\eta}\|, \\ \|\mathbf{J}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_{c2} - \mathbf{x}_{c2})\| &= \|\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_1)\boldsymbol{\eta}_2\| \leq 4\|\boldsymbol{\eta}\|, \\ \|\hat{\boldsymbol{\tau}}_d - \boldsymbol{\tau}_d\| &= \|\mathbf{J}\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_1)\boldsymbol{\eta}_3\| \leq 4\lambda_1\|\boldsymbol{\eta}\|, \\ \|\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_{c1}) - \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}_{c1})\| &\leq \\ \|\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_{c1})\|^2\|\dot{\hat{\mathbf{G}}}(\mathbf{x}_{c1}) - \dot{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{x}_{c1})\| &\leq \\ 16\|\dot{\hat{\mathbf{G}}}(\mathbf{x}_{c1}) - \dot{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{x}_{c1})\|. \end{aligned}$$

$\|\dot{\hat{\mathbf{G}}}(\mathbf{x}_{c1}) - \dot{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{x}_{c1})\|$ 的表达式可以进一步处理为

$$\begin{aligned} \|\dot{\hat{\mathbf{G}}}(\mathbf{x}_{c1}) - \dot{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{x}_{c1})\| &\leq \\ \frac{1}{2}\{\|\mathbf{x}_{c1}^T\mathbf{G}(\mathbf{x}_{c1})\mathbf{J}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_{c2} - \mathbf{x}_{c2})\mathbf{I}_3\| + & \\ \|\mathbf{G}(\mathbf{x}_{c1})\mathbf{J}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_{c2} - \mathbf{x}_{c2})\| + & \\ \|\mathbf{G}(\mathbf{x}_{c1})\mathbf{J}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_{c2} - \mathbf{x}_{c2})\mathbf{x}_{c1}^T\| + & \\ \|\mathbf{x}_{c1}[\mathbf{G}(\mathbf{x}_{c1})\mathbf{J}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_{c2} - \mathbf{x}_{c2})]^T\| \} &\leq \\ 2\|\mathbf{G}(\mathbf{x}_{c1})\|(3\|\mathbf{x}_{c1}\| + 1)\|\boldsymbol{\eta}\|. \end{aligned}$$

设满足 $\mathbf{C}(\mathbf{x}_{c1}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{C}^T(\boldsymbol{\sigma}_r)$ 的解为 $\mathbf{x}_{c1} = \mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_r)$, 由 $\mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma})$ 的表达式可知函数 \mathbf{s} 的每一个分量关于 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_r$ 是连续的, 因此存在与 M 和 M_r 有关的常数 M_s , 使得 $\|\mathbf{x}_{c1}\| = \|\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_r)\| \leq M_s$, 从而有

$$\|\dot{\hat{\mathbf{G}}}(\mathbf{x}_{c1}) - \dot{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{x}_{c1})\| \leq \frac{(M_s^2 + 1)(3M_s + 1)}{2}\|\boldsymbol{\eta}\|.$$

结合前面的分析可知

$$\begin{aligned} \|\hat{\boldsymbol{\tau}} - \bar{\boldsymbol{\tau}}\| &\leq M_\tau\|\boldsymbol{\eta}\|, \\ M_\tau &= 4\lambda_1\{[2(M_s^2 + 1)(3M_s + 1) + 4]\lambda_3M_s + \\ &\lambda_3(M_s^2 + 1) + 1\} + \lambda_5. \end{aligned}$$

进一步, 由 Young 不等式^[30]有

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_2^T\mathbf{J}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\tau}} - \bar{\boldsymbol{\tau}}) &\leq \frac{M_\tau}{\lambda_2}\|\mathbf{z}_2\|\|\boldsymbol{\eta}\| \leq \\ &\frac{\lambda_6}{2}\|\mathbf{z}_2\|^2 + \frac{M_\tau^2}{2\lambda_2^2\lambda_6}\|\boldsymbol{\eta}\|^2. \end{aligned}$$

从而有

$$\dot{V}(\boldsymbol{\nu}) \leq$$

$$\begin{aligned} &-\frac{c_2c_3}{\varepsilon}\|\boldsymbol{\eta}\|^2 - \lambda_4\|\mathbf{z}_1\|^2 - \frac{\lambda_6}{2}\|\mathbf{z}_2\|^2 + \\ &2c_5M_\Delta\|\boldsymbol{\eta}\| + \frac{M_\tau^2}{2\lambda_2^2\lambda_6}\|\boldsymbol{\eta}\|^2 \leq \\ &-\frac{c_2c_3}{2\varepsilon}\|\boldsymbol{\eta}\|^2 - \left(\frac{c_2c_3}{2\varepsilon} - \frac{M_\tau^2}{2\lambda_2^2\lambda_6}\right)\|\boldsymbol{\eta}\|^2 + \\ &2c_5M_\Delta\|\boldsymbol{\eta}\| - \lambda_4\|\mathbf{z}_1\|^2 - \frac{\lambda_6}{2}\|\mathbf{z}_2\|^2. \end{aligned}$$

取 $0 < \varepsilon \leq \min\left\{\frac{c_2c_3\lambda_2^2\lambda_6}{M_\tau^2}, \frac{c_2c_3}{2c_5M_f}, 1\right\}$, 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{\nu}) &\leq \\ &-\frac{c_2c_3}{2\varepsilon}\|\boldsymbol{\eta}\|^2 - \lambda_4\|\mathbf{z}_1\|^2 - \frac{\lambda_6}{2}\|\mathbf{z}_2\|^2 + 2c_5M_\Delta\|\boldsymbol{\eta}\| \leq \\ &-\frac{c_2c_3}{4\varepsilon}\left(\|\boldsymbol{\eta}\| - \frac{4c_5M_\Delta\varepsilon}{c_2c_3}\right)^2 - \frac{c_2c_3}{4\varepsilon}\|\boldsymbol{\eta}\|^2 - \\ &\lambda_4\|\mathbf{z}_1\|^2 - \frac{\lambda_6}{2}\|\mathbf{z}_2\|^2 + \frac{6c_5^2M_\Delta^2\varepsilon}{c_2c_3} \leq \\ &-\frac{c_6}{2}\|\boldsymbol{\nu}\|^2 - \left(\frac{c_6}{2}\|\boldsymbol{\nu}\|^2 - \frac{6c_5^2M_\Delta^2\varepsilon}{c_2c_3}\right). \end{aligned}$$

其中 $c_6 = \min\left\{\frac{c_2c_3}{4\varepsilon}, \lambda_4, \frac{\lambda_6}{2}\right\}$. 由上式可知, $\forall\|\boldsymbol{\nu}\| > 2\sqrt{\frac{3\varepsilon}{c_2c_3c_6}}c_5M_\Delta$, 有

$$\dot{V}(\boldsymbol{\nu}) \leq -\frac{c_6}{2}\|\boldsymbol{\nu}\|^2 < 0.$$

由于 $V(\boldsymbol{\nu})$ 正定且径向无界, 闭环系统一致最终有界稳定, 且最终的界为 $O(\sqrt{\varepsilon})$. \square

5 仿真实验

为了验证所提出的 ESO 设计方法和 IDA-PBC 控制方法的有效性, 采用文献[8]中的模型和控制参数进行对比仿真. 航天器初始姿态矩阵为

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}(0)) = \mathbf{I}_3,$$

初始角速度为

$$\boldsymbol{\omega}(0) = [0.1, 0.1, 0.1]^T \text{ rad/s},$$

转动惯量阵为

$$\mathbf{J} = \text{diag}\{22, 23, 24\} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

转动惯量阵不确定性为

$$\Delta\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & -0.6 \\ 0.3 & 0.5 & 0.4 \\ -0.6 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

外部干扰力矩为

$$\mathbf{d} =$$

$$[0.5 \sin(0.1t), 0.3 \cos(0.2t), 0.25 \cdot \sin(0.2t)] \text{ N} \cdot \text{m},$$

期望的姿态矩阵初始值为

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}_r(0)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{179}{180}\pi\right) & \sin\left(\frac{179}{180}\pi\right) \\ 0 & -\sin\left(\frac{179}{180}\pi\right) & \cos\left(\frac{179}{180}\pi\right) \end{bmatrix},$$

期望的角速度为

$$\omega_r = 0.1[\sin(t/40), \cos(t/50), \sin(t/60)]^T \text{rad/s.}$$

根据第2节中的分析,对于时变ESO参数,取 $\rho_i(t) = \bar{\rho}_i \varpi(t)$, $\bar{\rho}_i$ 为常数,表示 $\rho_i(t)$ 的名义值, $i = 1, 2, 3$. 则由式(12)可知,相应的 $a_i(t)$ 表达式为

$$\begin{cases} a_1(t) = -\bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 \bar{\rho}_3 \varpi^3(t), \\ a_2(t) = (\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_3) \dot{\varpi}(t) + 3\dot{\varpi}^2(t)/\varpi^2(t) + \\ \quad (\bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1 \bar{\rho}_3 + \bar{\rho}_2 \bar{\rho}_3) \varpi^2(t) - \ddot{\varpi}(t)/\varpi(t), \\ a_3(t) = -(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_3) \varpi(t) - 3\dot{\varpi}(t)/\varpi(t). \end{cases}$$

$l_i(t)$ 的表达式可进一步根据式(11)得到. 根据定理1, 取 $\varepsilon = 0.01$, $\bar{\rho}_i = -0.4/\varepsilon = -40$, 结合文献[31]中的改进sigmoid函数,取

$$\varpi(t) = 0.1 + 1.8[(1 + e^{-0.1t})^{-1} - 0.5],$$

可知 $\rho_i(t)$ 满足定理1中的条件,初始时刻取值为 $\bar{\rho}_i$ 的0.1倍,且随时间递增,满足定理1中的条件. 对于IDA-PBC控制器参数,取 $D_1 = (0.1 + e^{-10\|x_{c1}\|})I_3$, $D_2 = 1.5I_3$. 作为对比,常值增益ESO中 $\rho_i(t) = \bar{\rho}_i$, $i = 1, 2, 3$, 控制器参数不变.

姿态角跟踪误差定义为

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}(\text{tr}(C(x_{c1})) - 1)\right),$$

角速度跟踪误差范数为 $\Delta\omega$, 控制力矩范数为 $\tau = \|\tau\|$, 角速度和干扰力矩的估计误差范数分别为 $\delta\omega$ 和 δd , 仿真结果如图1~图5所示. 其中,方法1为时变增益ESO, 方法2为常值增益ESO, 方法3为文献[8]中的控制律, 3种方法均不需要角速度测量值.

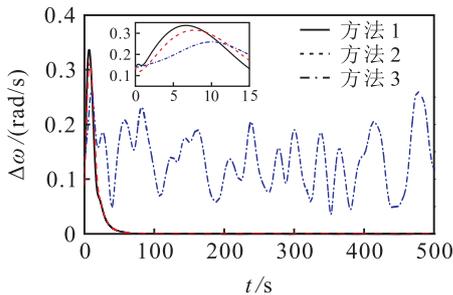


图1 姿态角跟踪误差比较曲线

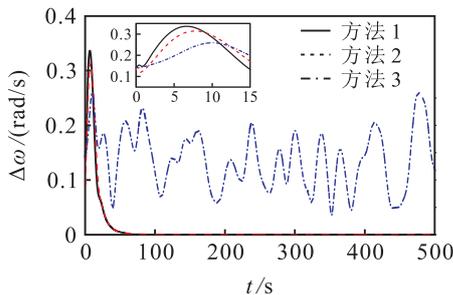


图2 角速度跟踪误差范数比较曲线

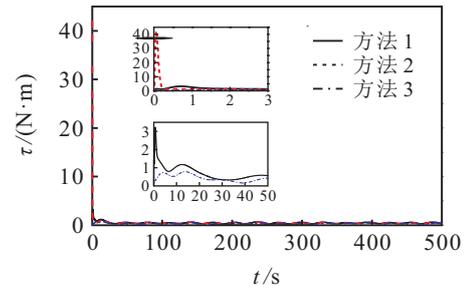


图3 控制力矩范数比较曲线

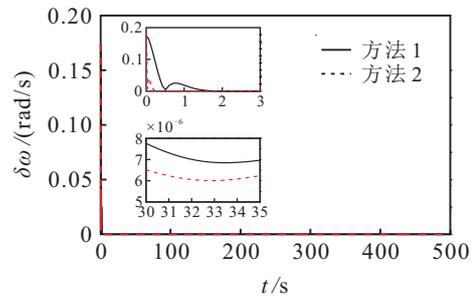


图4 角速度估计误差范数比较曲线

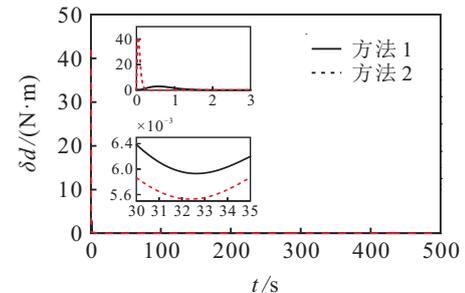


图5 干扰力矩估计误差范数比较曲线

图1和图2为姿态角和角速度跟踪误差的比较曲线. 从仿真曲线可以看出:由于干扰力矩的存在,方法3无法保证姿态角和角速度跟踪误差的收敛;方法1和方法2均能够保证姿态角和角速度跟踪误差收敛于0,且方法1与方法2在起始时刻的姿态角和角速度跟踪效果相差不大.

图3给出了3种方法的控制力矩范数比较曲线. 从图3可以看出:常值增益ESO引起的峰化现象使得在最开始的1s之内需要的控制力矩范数超过了40 N·m;而时变增益ESO在最开始的10s之内需要的控制力矩范数不超过4 N·m,在20s之后与方法3的控制力矩范数趋于同一量级,且均小于1 N·m.

图4和图5给出了方法1和方法2的角速度与干扰力矩的估计误差范数比较曲线. 从仿真曲线可以看出:常值增益ESO对角速度估计误差的收敛速度快于时变增益ESO,但由于峰化现象的存在,使得常值增益ESO对干扰力矩的估计误差在最开始的1s之内超过了40 N·m;而时变增益ESO削弱了峰化现象,对干扰力矩的估计误差一直处于较低的界以内;在30s之后,两种方法对角速度估计误差范数均处于

10^{-6} rad/s 量级, 对干扰力矩的估计误差范数均处于 10^{-3} N·m 量级。

注2 文献[8]采用旋转矩阵描述的姿态运动模型, 没有考虑干扰力矩的作用。根据文献[8]中的式(6), (15)~(17), 令 $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{C}^T(\mathbf{x}_{c1})$ 为误差旋转矩阵, $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} - \mathbf{C}(\mathbf{x}_{c1})\boldsymbol{\omega}_r$ 为误差角速度, 则姿态跟踪误差运动方程为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{R}}} = \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^\times, \\ \mathbf{J}\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} = \{(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega})^\times - (\tilde{\mathbf{R}}^T\boldsymbol{\omega}_r)^\times \mathbf{J} - \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{R}}^T\boldsymbol{\omega}_r)^\times\}\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \\ (\tilde{\mathbf{R}}^T\boldsymbol{\omega}_r)^\times \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{R}}^T\boldsymbol{\omega}_r)^\times - \mathbf{J}\tilde{\mathbf{R}}^T\dot{\boldsymbol{\omega}}_r + \boldsymbol{\tau}. \end{cases} \quad (26)$$

设计的控制器为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{R}}}, \\ \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{B}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{R}}}, \\ \boldsymbol{\tau} = -k_{\tilde{\mathbf{R}}}\mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{R}}} - k_z\mathbf{E}^T(\tilde{\mathbf{R}})\mathbf{z} + \\ (\tilde{\mathbf{R}}^T\boldsymbol{\omega}_r)^\times \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{R}}^T\boldsymbol{\omega}_r)^\times + \mathbf{J}\tilde{\mathbf{R}}^T\dot{\boldsymbol{\omega}}_r. \end{cases} \quad (27)$$

其中: \mathbf{A} 为 Hurwitz 矩阵, 满足 $\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} = -\mathbf{Q}$, \mathbf{P} 和 \mathbf{Q} 为正定矩阵, \mathbf{B} 为列满秩矩阵, (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 可控; $\mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{R}}} = \frac{1}{2\sqrt{1 + \text{tr}(\tilde{\mathbf{R}})}}(\tilde{\mathbf{R}} - \tilde{\mathbf{R}}^T)^\vee$, \vee 表示从反对称阵到三维矢量的映射, 且有

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_{\tilde{\mathbf{R}}} &= \frac{\text{tr}(\tilde{\mathbf{R}})\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}^T + 2\mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{R}}}\mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{R}}}^T}{2\sqrt{1 + \text{tr}(\tilde{\mathbf{R}})}}\tilde{\boldsymbol{\omega}} \equiv \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{R}})\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \\ k_{\tilde{\mathbf{R}}} &> 0, k_z > 0. \end{aligned}$$

根据文献[8]中的式(20), 对于由式(26)和(27)组成的闭环系统, 选取的 Lyapunov 函数为

$$V_4 = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T\mathbf{J}\tilde{\boldsymbol{\omega}} + k_{\tilde{\mathbf{R}}}\psi(\tilde{\mathbf{R}}) + \frac{k_z}{2}\dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}},$$

其中 $\psi(\tilde{\mathbf{R}}) = 2 - \sqrt{1 + \text{tr}(\tilde{\mathbf{R}})}$, 满足 $\dot{\psi}(\tilde{\mathbf{R}}) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T\mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{R}}}$, 从而有

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 &= \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T\mathbf{J}\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} + k_{\tilde{\mathbf{R}}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T\mathbf{e}_{\tilde{\mathbf{R}}} + \frac{k_z}{2}\dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\ddot{\mathbf{x}} + \frac{k_z}{2}\ddot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} &= \\ -\frac{k_z}{2}\dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{Q}\dot{\mathbf{x}} \leq 0. \end{aligned}$$

上式表明, V_4 沿闭环系统的导数是半负定的, 从而可以利用 Barbalat 引理进一步证明闭环系统的稳定性。当考虑干扰力矩 $\boldsymbol{\tau}_d$ 的作用时, V_4 沿闭环系统的导数变为 $\dot{V}_4 = -\frac{k_z}{2}\dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{Q}\dot{\mathbf{x}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T\mathbf{J}\boldsymbol{\tau}_d$, 由于交叉项 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T\mathbf{J}\boldsymbol{\tau}_d$ 的存在, 无法直接推导出 V_4 的负定性。又由于控制力矩表达式中缺乏与角速度直接相关的反馈项, 使得 \dot{V}_4 中没有关于 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 的负定项, 无法通过不等式对交叉项 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T\mathbf{J}\boldsymbol{\tau}_d$ 进行放缩处理来保证 V_4 的负定性, 从而无法保证闭环系统的稳定性。

6 结论

本文针对修正罗德里格参数描述的航天器姿态运动模型, 考虑到常值增益 ESO 所引起的峰化现象, 设计了时变增益 ESO 对系统的内外部干扰进行估计, 证明了时变增益 ESO 的收敛性; 进一步结合 IDA-PBC 理论和 backstepping 思想设计了姿态跟踪控制律, 并证明了闭环系统的稳定性。仿真结果表明, 现有文献中单独基于无源性的控制方法在考虑干扰力矩的情况下无法保证姿态系统的稳定, 而本文所提控制方法能够保证姿态和角速度跟踪误差的收敛性。与常值增益 ESO 相比, 所设计的时变增益 ESO 能够有效削弱峰化现象的影响, 有利于航天器姿态系统的稳定, 且能够降低对控制力矩范数的要求, 便于工程应用。

参考文献(References)

- [1] de Angelis E L, Giulietti F, de Ruiter A H J, et al. Spacecraft attitude control using magnetic and mechanical actuation[J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 2015, 38(11): 564-573.
- [2] Gui H, Vukovich G, Xu S. Attitude stabilization of a spacecraft with two parallel control moment gyroscopes[J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 2016, 39(3): 728-735.
- [3] Gui H, Jin L, Xu S. Small-time local controllability of spacecraft attitude using control moment gyros[J]. Automatica, 2015, 53(1): 141-148.
- [4] Thakur D, Srikant S, Akella M R. Adaptive attitude-tracking control of spacecraft with uncertain time-varying inertia parameters[J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 2014, 38(1): 41-52.
- [5] Zhang H, Fang J. Robust backstepping control for agile satellite using double-gimbal variable-speed control moment gyroscope[J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 2013, 36(5): 1356-1363.
- [6] Lu K F, Xia Y Q, Zhu Z, et al. Sliding mode attitude tracking of rigid spacecraft with disturbances[J]. J of the Franklin Institute, 2012, 349(2): 413-440.
- [7] Forbes J R. Passivity-based attitude control on the special orthogonal group of rigid-body rotations[J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 2013, 36(6): 1596-1605.
- [8] 郑重, 宋申民. 基于旋转矩阵描述的航天器无角速度测量姿态跟踪无源控制[J]. 控制与决策, 2014, 29(9): 1628-1632.
(Zheng Z, Song S M. Rotation matrix based passive attitude tracking control of spacecraft without angular velocity measurements[J]. Control and Decision, 2014, 29(9): 1628-1632.)

- [9] Akella M R. Rigid body attitude tracking without angular velocity feedback[J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 42(4): 321-326.
- [10] Akella M R, Thakur D, Mazenc F. Partial Lyapunov strictification: Smooth angular velocity observers for attitude tracking control[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 2015, 38(3): 442-451.
- [11] Chunodkar A A, Akella M R. Switching angular velocity observer for rigid-body attitude stabilization and tracking control[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 2014, 37(3): 869-878.
- [12] Hu J, Zhang H. Output feedback control for rigid-body attitude with constant disturbances[J]. *Int J of Control*, 2015, 88(3): 602-612.
- [13] Chang X, Li Y, Zhang W, et al. Active disturbance rejection control for a flywheel energy storage system[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 2015, 62(2): 991-1001.
- [14] Guo B Z, Wu Z H, Zhou H C. Active disturbance rejection control approach to output-feedback stabilization of a class of uncertain nonlinear systems subject to stochastic disturbance[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2016, 61(6): 1613-1618.
- [15] Sira-Ramírez H, Linares-Flores J, García-Rodríguez C, et al. On the control of the permanent magnet synchronous motor: An active disturbance rejection control approach[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 2014, 22(5): 2056-2063.
- [16] Guo B Z, Zhao Z. On the convergence of an extended state observer for nonlinear systems with uncertainty[J]. *Systems & Control Letters*, 2011, 60(6): 420-430.
- [17] Guo B Z, Zhao Z L. On convergence of non-linear extended state observer for multi-input multi-output systems with uncertainty[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2012, 6(15): 2375-2386.
- [18] Yao J, Jiao Z, Ma D. Adaptive robust control of DC motors with extended state observer[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 2014, 61(7): 3630-3637.
- [19] Tan W, Fu C. Linear active disturbance-rejection control: Analysis and Tuning via IMC[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 2016, 63(4): 2350-2359.
- [20] 杨明, 董晨, 王松艳, 等. 基于有限时间输出反馈的线性扩张状态观测器[J]. *自动化学报*, 2015, 41(1): 59-66.
(Yang M, Dong C, Wang S Y, et al. Linear extended state observer based on finite-time output feedback[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(1): 59-66.)
- [21] Khalil H K, Praly L. High-gain observers in nonlinear feedback control[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2014, 24(6): 993-1015.
- [22] Pu Z Q, Yuan R Y, Yi J Q, et al. A class of adaptive extended state observers for nonlinear disturbed systems[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 2015, 62(9): 5858-5869.
- [23] Acosta J A, Ortega R, Astolfi A, et al. Interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems with underactuation degree one[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(12): 1936-1955.
- [24] Ortega R, Liu Z, Su H. Control via interconnection and damping assignment of linear time-invariant systems: A tutorial[J]. *Int J of Control*, 2012, 85(5): 603-611.
- [25] Donaire A, Ortega R, Romero J G. Simultaneous interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems using dissipative forces[J]. *Systems & Control Letters*, 2016, 94: 118-126.
- [26] Aranovskiy S, Ortega R, Cisneros R. A robust PI passivity-based control of nonlinear systems and its application to temperature regulation[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2016, 26(1): 2216-2231.
- [27] Crasta N, Ortega R, Pillai H K. On the matching equations of energy shaping controllers for mechanical systems[J]. *Int J of Control*, 2015, 88(9): 1757-1765.
- [28] Batlle C, Dòria-Cerezo A, Espinosa-Perez G, et al. Simultaneous interconnection and damping assignment passivity-based control: The induction machine case study[J]. *Int J of Control*, 2009, 82(2): 241-255.
- [29] Lee H C, Choi J W. Linear time-varying eigenstructure assignment with flight control application[J]. *IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems*, 2004, 40(1): 145-157.
- [30] Kristic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. *Nonlinear and adaptive control design*[M]. New York: Wiley, 1995: 75-76.
- [31] 邵星灵, 王宏伦. 基于改进sigmoid函数的非线性跟踪微分器[J]. *控制理论与应用*, 2014, 31(8): 1116-1122.
(Shao X L, Wang H L. Nonlinear tracking differentiator based on improved sigmoid function[J]. *Control Theory & Applications*, 2014, 31(8): 1116-1122.)

(责任编辑: 齐 霖)