

犹豫模糊语言群决策的共识性模型

魏翠萍[†], 马 京

(扬州大学 数学科学学院, 江苏 扬州 225000)

摘 要: 针对犹豫模糊语言群决策问题, 研究其共识性调整方法. 首先, 定义犹豫模糊语言术语集的距离测度; 然后, 基于该距离测度定义犹豫模糊决策矩阵间的共识性水平及其相关概念, 建立共识性调整模型, 该模型采用反馈机制, 并且尽可能提供给专家较多的信息, 以方便专家进行信息修正, 达到群体共识; 最后, 通过具体实例说明了所提出的共识性方法的可行性和实用性.

关键词: 群决策; 犹豫模糊语言决策矩阵; 距离测度; 共识性测度

中图分类号: C934 文献标志码: A

Consensus model for hesitant fuzzy linguistic group decision making

WEI Cui-ping[†], MA Jing

(College of Mathematical Science, Yangzhou University, Yangzhou 225000, China)

Abstract: This paper studies a the consensus approach for the decision making problems with hesitant fuzzy linguistic decision matrices. The distance measure is proposed for the hesitant fuzzy linguistic term sets. Based on the distance among the individual decision matrices, the group consensus level and some other consensus levels are defined for the hesitant fuzzy decision matrices, and the consensus research process is introduced. A consensus model is established, it defines a feedback mechanism to make the information provided for the experts as much as possible, and is helpful for the experts to adjust information and reach group consensus. Finally, a numerical example is used to illustrate the feasibility and practicability of the proposed consensus model.

Keywords: group decision making; hesitant fuzzy linguistic decision matrices; distance measure; consensus measures

0 引 言

在实际的决策问题中存在着许多定性准则, 如汽车的性能、学生的品德表现等. 对这些定性准则进行评价时, 人们往往不能直接用具体的数值来反映, 而一般大都以语言的形式来表达, 于是具有语言评价信息的决策问题开始受到广泛的关注, 并涌现出大量的研究成果^[1-17]. 传统基于语言的决策问题, 往往采用一个具体的语言术语来表达决策信息, 但当专家不能确定地给出评价时, 单个语言术语将不足以表达专家的评价结果. 为此, Rodríguez 等^[6]在犹豫模糊集的基础上, 定义了犹豫模糊语言术语集. 随后, 许多学者开展了关于犹豫模糊语言术语集的研究, 提出了运算规则、信息测度、集结算子和相关的决策方法. Lee 等^[7-8]提出了犹豫模糊语言术语集的比较方法及其相似测度; Liao 等^[9]提出了犹豫模糊语言术语集的距离测度和相似测度; Wei 等^[10]基于可能度公式

提出了犹豫模糊语言术语集的比较方法以及集结算子; Wu 等^[4]提出了犹豫模糊决策矩阵的共识性测度和共识性模型; Zhu 等^[15]提出了犹豫模糊语言优先关系的概念, 并进一步讨论了其一致性.

在群决策过程中, 由于专家的知识水平、个人偏好以及复杂的决策环境等多种因素, 专家的评价结果往往不同. 要根据各个专家的评价结果得到群体专家都满意的方案排序, 就需要考虑各专家的意见是否达到一定的共识水平. 因此, 共识性就成了群决策中的一个重要的研究内容, 并已涌现出大量的研究成果^[18-29]. 文献 [18] 根据共识性模型中是否有反馈机制和共识性测度的定义两个指标, 将现有的共识性模型分为 4 类: 1) 基于个体决策意见和群体决策意见之间的偏差, 带反馈机制的共识模型^[19-20], 该模型将群体意见反馈给各个专家, 各专家通过群体评价对自己的评价进行调整; 2) 基于个体决策意见和群体决策

收稿日期: 2016-12-29; 修回日期: 2017-04-01.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71371107).

作者简介: 魏翠萍(1970—), 女, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与应用、信息融合等研究; 马京(1990—), 女, 硕士生, 从事不确定决策理论与方法的研究.

[†]通讯作者. E-mail: wei_cuiping@aliyun.com

意见之间的偏差,不带反馈机制的共识模型^[21-23],该模型根据调整规则自动调整个体决策专家的意见,以达成群体共识;3)基于个体决策意见之间的偏差,带反馈机制的共识模型^[24-26];4)基于个体决策意见之间的偏差,不带反馈机制的共识模型^[27-28].

对于基于犹豫模糊语言信息的多准则群决策问题,Wu等^[14]提出了犹豫模糊语言信息间的共识性测度,并给出了共识性模型.但是,在共识性测度的定义和调整模型中,文献[14]将各个专家的评价值通过犹豫模糊语言术语集的可能分布取平均值,然后用平均值间的共识性来衡量专家间的共识性.这种处理方式会使专家的评价信息得不到全面的反映,例如,设 $S = \{s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, s_3\}$ 是一个语言术语集, $H_S^1 = \{s_1, s_2, s_3\}$ 和 $H_S^2 = \{s_2\}$ 是 S 上的两个犹豫模糊语言评价,显然这两个评价信息是不一致的,但其均值相同,在文献[14]的共识性模型中处理为意见一致的评价.为此,本文从评价数据本身的距离定义共识性测度,并建立共识性调整模型.所提出的共识性测度可以直接由专家的评价结果计算共识水平,而无需进行转化后再计算共识水平.所建立的共识性模型可以为专家提供尽可能多的信息,让专家调整尽可能少的元素来达到共识性要求.本文首先定义犹豫模糊语言术语集的距离,并基于此定义基于犹豫模糊决策矩阵间距离的共识性测度;然后建立基于犹豫模糊语言决策矩阵的共识性模型,该共识模型选择共识性最低的元素相应的专家信息进行调整,调整过程结合了反馈机制和自动调节的特点;最后通过具体实例说明所提出方法的可行性与有效性.

1 预备知识

1.1 犹豫模糊语言术语集

文献[5]定义了一种语言术语下标以零为对称中心、且语言术语个数为奇数的语言术语集 $S = \{s_\alpha | \alpha = -\tau, \dots, -1, 0, 1, \dots, \tau\}$,其中 τ 为正整数. S 满足以下条件:

条件1 存在负算子 $\text{neg}(s_\alpha) = s_{-\alpha}$,特别地, $\text{neg}(s_0) = s_0$;

条件2 有序性, $s_\alpha \leq s_\beta \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$.

在实际应用中,为了避免集结过程中信息的丢失,徐泽水^[5]引入了拓展的语言术语集 $\bar{S} = \{s_\alpha | \alpha \in [-q, q]\}$,其中 $q(q > \tau)$ 是一个充分大的自然数.若 $s_\alpha \in S$,则称 s_α 为本原术语,否则称 s_α 为虚拟术语.拓展的语言术语集仍满足上述条件1和条件2.一般地,决策者用本原术语对方案进行评价,拓展术语只用在语言计算和方案排序中.拓展的语言术语集中元素的

运算法则如下:

设 $\mu, \mu_1, \mu_2 > 0, s_\alpha, s_\beta \in \bar{S}$,则有:

- 1) $s_\alpha \oplus s_\beta = s_{\alpha+\beta}$;
- 2) $\mu s_\alpha = s_{\mu\alpha}$;
- 3) $(\mu_1 + \mu_2)s_\alpha = \mu_1 s_\alpha \oplus \mu_2 s_\alpha$;
- 4) $\mu(s_\alpha \oplus s_\beta) = \mu s_\alpha \oplus \mu s_\beta$.

当决策者用语言术语给出评价信息时,常常表示出犹豫.针对此情形,文献[6]给出了犹豫模糊语言术语集的概念.

定义1^[6] 设 $S = \{s_\alpha | \alpha = -\tau, \dots, -1, 0, 1, \dots, \tau\}$ 为一个语言术语集,若 H_S 是 S 中有限个有序连续语言术语的集合,则称 H_S 为 S 上的一个犹豫模糊语言术语集.

定义2^[6,10] 设 H_S, H_S^1 和 H_S^2 是 S 上3个犹豫模糊语言术语集,则其运算法则定义如下:

- 1) H_S^1 和 H_S^2 的取大算子 $H_S^1 \vee H_S^2$ 为 $H_S^1 \vee H_S^2 = \{\max\{s_i, s_j\} | s_i \in H_S^1, s_j \in H_S^2\}$;
- 2) H_S^1 和 H_S^2 的取小算子 $H_S^1 \wedge H_S^2$ 为 $H_S^1 \wedge H_S^2 = \{\min\{s_i, s_j\} | s_i \in H_S^1, s_j \in H_S^2\}$;
- 3) H_S 的上界 H_S^+ 和下界 H_S^- 分别为

$$H_S^+ = \max\{s_i | s_i \in H_S\}, H_S^- = \min\{s_i | s_i \in H_S\};$$

- 4) H_S 的包络 $\text{env}(H_S)$ 为

$$\text{env}(H_S) = [H_S^-, H_S^+].$$

1.2 犹豫模糊语言术语集的加权平均算子

文献[5]提出了语言平均算子,文献[15]提出了犹豫模糊语言加权平均算子.

定义3^[5] 设 $\text{LA} : S^n \rightarrow \bar{S}$,则称

$$\text{LA}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_n}) = \frac{1}{n}(s_{\alpha_1} \oplus s_{\alpha_2} \oplus \dots \oplus s_{\alpha_n}) = s_{\bar{\alpha}} \quad (1)$$

为语言平均(LA)算子,其中 $\bar{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \alpha_j$.

定义4^[15] 设 $S = \{s_\alpha | \alpha = -\tau, \dots, -1, 0, 1, \dots, \tau\}$ 是一个语言术语集, $H_S^1, H_S^2, \dots, H_S^n$ 是 S 上 n 个犹豫模糊语言术语集.设 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ 是 $H_S^j (j = 1, 2, \dots, n)$ 的权重向量,满足 $\omega_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n), \sum_{j=1}^n \omega_j = 1$,则犹豫模糊语言加权平均(HFLWA)算子定义如下:

$$\text{HFLWA}(H_S^1, H_S^2, \dots, H_S^n) = \bigoplus_{j=1}^n \omega_j H_S^j = \bigcup_{b_1 \in H_S^1, b_2 \in H_S^2, \dots, b_n \in H_S^n} \left\{ \bigoplus_{j=1}^n \omega_j b_j \right\}. \quad (2)$$

特别地,当 $\omega = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ 时,HFLWA算子退化

为犹豫模糊语言算术平均(HFLA)算子,即

$$\text{HFLA}(H_S^1, H_S^2, \dots, H_S^n) = \bigoplus_{j=1}^n \frac{1}{n} H_S^j = \bigcup_{s_1^\gamma \in H_S^1, s_2^\gamma \in H_S^2, \dots, s_n^\gamma \in H_S^n} \left\{ \bigoplus_{j=1}^n \frac{1}{n} s_j^\gamma \right\}. \quad (3)$$

2 犹豫模糊语言群决策的共识性模型

本文考虑的犹豫模糊语言多属性群决策问题描述如下:

设 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 为给定的方案集, $C = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ 为给定的属性集, 设 $\{d_1, d_2, \dots, d_t\}$ 是决策者的集合. 决策者采用语言术语集 $S = \{s_\alpha | \alpha = -\tau, \dots, -1, 0, 1, \dots, \tau\}$ 对方案在各属性下进行评价, 从而构成犹豫模糊语言决策矩阵

$$R^{(k)} = (H_{ij}^{(k)})_{n \times m}, \quad k = 1, 2, \dots, t,$$

其中 $H_{ij}^{(k)}$ 为犹豫模糊语言术语集, 代表第 k 个决策者对方案 A_i 在属性 C_j 下的评价.

t 个专家给出不同的犹豫模糊决策矩阵, 当决策者的意见达到一定的共识时, 才能对决策者的意见进行集结, 从而对方案进行排序. 下面研究如何测量决策矩阵的共识性, 以及如何对不满足共识性要求的部分元素进行适当的调整, 以达到整体共识.

2.1 共识性测度

在关于群体共识性测度的研究中, 基本上有两类计算共识性测度的方法^[28]: 第1类是通过计算个体偏好与群体偏好之间的距离给出共识性测度; 第2类是通过计算个体偏好之间的距离给出共识性测度. 本文基于第2类方法来定义共识性测度.

关于犹豫模糊语言术语集的距离, 文献[9]提出的距离公式需要对犹豫模糊语言术语集中的语言术语进行扩展, 使被比较的语言术语集中语言术语的个数相同, 这样会使所得距离受扩展方式的影响. 为此, 本文给出下面的距离公式.

记 $I(s_\alpha)$ 为语言术语 s_α 的下标 α 的值.

定义5 设 H_S^1 和 H_S^2 是 S 上任意两个犹豫模糊语言术语集, 则 H_S^1 和 H_S^2 间的距离定义为

$$d(H_S^1, H_S^2) = \frac{1}{4\tau} (|I(H_S^{1+}) - I(H_S^{2+})| + |I(H_S^{1-}) - I(H_S^{2-})|). \quad (4)$$

下面基于上面定义的距离公式, 定义犹豫模糊语言决策矩阵的共识性测度.

定义6 假设 $R^{(k)} = (H_{ij}^{(k)})_{n \times m}$ 和 $R^{(l)} = (H_{ij}^{(l)})_{n \times m} (k, l = 1, 2, \dots, t)$ 为犹豫模糊语言决策矩阵 $\{R^{(1)}, R^{(2)}, \dots, R^{(t)}\}$ 中任意两个决策矩阵, 则:

1) 称

$$\text{CL}(H_{ij}^{(k)}, H_{ij}^{(l)}) = 1 - d(H_{ij}^{(k)}, H_{ij}^{(l)}) \quad (5)$$

为犹豫模糊元素 $H_{ij}^{(k)}$ 和 $H_{ij}^{(l)}$ 的共识性水平.

2) 称

$$\text{CL}_{ij}^{(k)} = \frac{1}{t} \sum_{l=1}^t \text{CL}(H_{ij}^{(k)}, H_{ij}^{(l)}) \quad (6)$$

为对 (i, j) 位置上的元素第 k 个专家与其他专家间的共识性水平; 称

$$\text{CL}_{ij} = \frac{1}{t^2} \sum_{k=1}^t \sum_{l=1}^t \text{CL}(H_{ij}^{(k)}, H_{ij}^{(l)}) \quad (7)$$

为 (i, j) 位置上的元素的共识性水平.

3) 若决策矩阵 $R^{(k)}$ 与 $R^{(l)}$ 间的距离定义为

$$d(R^{(k)}, R^{(l)}) = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d(H_{ij}^{(k)}, H_{ij}^{(l)}) = \frac{1}{4\tau nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (|I(H_S^{k+}) - I(H_S^{l+})| + |I(H_S^{k-}) - I(H_S^{l-})|), \quad (8)$$

则称

$$\text{CL}(R^{(k)}, R^{(l)}) = 1 - d(R^{(k)}, R^{(l)}) \quad (9)$$

为犹豫模糊语言决策矩阵 $R^{(k)}$ 和 $R^{(l)}$ 的共识性水平.

4) $\{R^{(1)}, R^{(2)}, \dots, R^{(t)}\}$ 群体共识性水平定义为

$$\text{CL}\{R^{(1)}, R^{(2)}, \dots, R^{(t)}\} = \frac{1}{t^2} \sum_{k=1}^t \sum_{l=1}^t \text{CL}(R^{(k)}, R^{(l)}). \quad (10)$$

命题1 设 $R^{(c)} = (H_{ij}^{(c)})_{n \times m}$ 为 t 个决策矩阵 $\{R^{(1)}, R^{(2)}, \dots, R^{(t)}\}$ 通过 HFLWA 算子集结得到的群体决策矩阵. 其中: $H_{ij}^{(c)} = \text{HFLWA}(H_{ij}^{(1)}, H_{ij}^{(2)}, \dots, H_{ij}^{(t)})$, \bar{R} 为 $\{R^{(1)}, R^{(2)}, \dots, R^{(t)}\}$ 中任一矩阵. 则

$$\text{CL}(R^{(c)}, \bar{R}) \geq \min_{0 \leq k \leq t} \{\text{CL}(R^{(k)}, \bar{R})\}.$$

证明 由 HFLWA 算子的定义, 得

$$I(H_{ij}^{(c)+}) = \sum_{k=1}^t \lambda_k I(H_{ij}^{(k)+}), \\ I(H_{ij}^{(c)-}) = \sum_{k=1}^t \lambda_k I(H_{ij}^{(k)-}),$$

因此

$$d(R^{(c)}, \bar{R}) = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d(H_{ij}^{(c)}, \bar{H}_{ij}) = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{1}{4\tau} \left(\left| \sum_{k=1}^t \lambda_k I(H_{ij}^{(k)-}) - I(\bar{H}_{ij}^-) \right| + \left| \sum_{k=1}^t \lambda_k I(H_{ij}^{(k)+}) - I(\bar{H}_{ij}^+) \right| \right) \leq \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^t \lambda_k \frac{1}{4\tau} (|I(H_{ij}^{(k)-}) - I(\bar{H}_{ij}^-)| + |I(H_{ij}^{(k)+}) - I(\bar{H}_{ij}^+)|) = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^t \lambda_k d(H_{ij}^{(k)}, \bar{H}_{ij}) = \sum_{k=1}^t \lambda_k d(R^{(k)}, \bar{R}) \leq \max_{1 \leq k \leq t} d(R^{(k)}, \bar{R}).$$

由此可得 $CL(R^{(c)}, \bar{R}) = 1 - d(R^{(c)}, \bar{R}) \geq 1 - \max_{1 \leq k \leq t} d(R^{(k)}, \bar{R}) = \min_{0 \leq k \leq t} \{CL(R^{(k)}, \bar{R})\}$. \square

2.2 共识性模型

共识性模型用于提高 $\{R^{(1)}, R^{(2)}, \dots, R^{(t)}\}$ 间的共识性. 本文提出共识性模型的宗旨是调整尽可能少的专家的意见, 以达到群体共识. 具体遵照以下两个规则进行.

规则1(鉴定规则) 当群体共识性水平没有达到决策者要求时, 需要对个别专家的某些评价信息进行适当的调整. 采用下面的规则可以鉴定出需要调整的专家和该专家需要调整的元素, 具体方法如下:

设 \bar{CL} 为决策者给定的共识性阈值, 若 $CL < \bar{CL}$, 则一定存在 (i, j) , $CL_{ij} < \bar{CL}$. 记 $R_{pq} = \{(p, q) | CL_{pq} = \min_{(i,j)} \{CL_{ij}\}\}$, 下面选取需要对 (p, q) 位置元素进行调整的专家. 对于任意的 $(p, q) \in R_{pq}$, 令 $CL_{pq}^{(s)} = \min_k \{CL_{pq}^{(k)}\}$, 则对专家 d_s 的决策矩阵 $R^{(s)}$ 的 (p, q) 位置上的元素进行调整.

规则2(调整规则) 对 $R^{(s)}$ 中 (p, q) 位置上的元素 $H_{pq}^{(s)}$ 进行调整的规则如下: 令

$$\bar{H}_{pq}^{(s)} = \lambda H_{pq}^{(s)} \oplus (1 - \lambda) H_{pq}^{(c)}, \quad (11)$$

其中 $H_{pq}^{(c)} = \text{HFLWA}(H_{pq}^{(1)}, H_{pq}^{(2)}, \dots, H_{pq}^{(t)})$, 这里 λ 代表调整参数, 满足 $0 < \lambda < 1$.

此共识性调整模型的主要思想是先根据鉴定规则找出共识性最低的 (p, q) 位置上的元素及需调整该位置元素的专家, 然后再用调整规则对该专家 (p, q) 位置上的元素进行调整. 具体步骤如下:

输入: 犹豫模糊语言决策矩阵 $R^{(k)} = (H_{ij}^{(k)})_{n \times m}$, $k = 1, 2, \dots, t$, 以及共识性水平阈值 \bar{CL} ;

输出: 调整后的犹豫模糊语言决策矩阵 $R'^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, t$.

步骤1: $h = 0, R_0^{(k)} = (H_{ij,0}^{(k)})_{n \times m} = (H_{ij}^{(k)})_{n \times m}$, $k = 1, 2, \dots, t$.

步骤2: 计算 $\{R_h^{(1)}, R_h^{(2)}, \dots, R_h^{(t)}\}$ 的群体共识性水平, 如果 $CL\{R_h^{(1)}, R_h^{(2)}, \dots, R_h^{(t)}\} \geq \bar{CL}$, 则转步骤4; 否则, 进行下一步.

步骤3: 令 $R_{pq} = \{(p, q) | CL_{pq} = \min_{(i,j)} \{CL_{ij}\}\}$, $CL_{pq}^{(s)} = \min_{1 \leq k \leq t} \{CL_{pq}^{(k)}\}$, 则专家 d_s 的 (p, q) 位置上的元素 $H_{pq,h}^{(s)}$ 需要进行调整. 令

$$H_{ij,h+1}^{(s)} = \begin{cases} \text{round}(\lambda H_{ij,h}^{(s)} \oplus (1 - \lambda) H_{ij,h}^{(c)}), & i = p, j = q, \\ H_{ij,h}^{(s)}, & \text{其他.} \end{cases} \quad (12)$$

其中: $0 < \lambda < 1, \text{round}(\lambda H_{ij,h}^{(s)} \oplus (1 - \lambda) H_{ij,h}^{(c)}) =$

$\{\text{round}(\lambda b_{ij,h}^{(s)} \oplus (1 - \lambda) b_{ij,h}^{(c)}) | b_{ij,h}^{(s)} \in H_{ij,h}^{(s)}, b_{ij,h}^{(c)} \in H_{ij,h}^{(c)}\}$.

将建议调整后的元素信息 $H_{ij,h+1}^{(s)}$ 提供给专家 d_s 并征得其修正意见. 令 $R_{h+1}^{(k)} = R_h^{(k)}$, 当 $k \neq s$ 时, $h = h + 1$, 然后转步骤2.

步骤4: 令 $R'^{(k)} = R_h^{(k)}, k = 1, 2, \dots, t$, 输出调整之后的犹豫模糊语言决策矩阵.

性质1 在上面的共识性模型中, 令 $H_{ij,h+1}^{(s)} = \lambda H_{ij,h}^{(s)} \oplus (1 - \lambda) H_{ij,h}^{(c)}, R_{h+1}^{(k)} = R_h^{(k)}$, 当 $k \neq s$ 时, 有

$$CL\{R_{h+1}^{(1)}, R_{h+1}^{(2)}, \dots, R_{h+1}^{(t)}\} \geq CL\{R_h^{(1)}, R_h^{(2)}, \dots, R_h^{(t)}\}.$$

证明 要证

$$\frac{1}{t^2} \sum_{k=1}^t \sum_{l=1}^t CL\{R_{h+1}^{(k)}, R_{h+1}^{(l)}\} \geq \frac{1}{t^2} \sum_{k=1}^t \sum_{l=1}^t CL\{R_h^{(k)}, R_h^{(l)}\},$$

只需证明

$$\frac{1}{t^2} \sum_{k=1}^t \sum_{l=1}^t d(R_{h+1}^{(k)}, R_{h+1}^{(l)}) \leq \frac{1}{t^2} \sum_{k=1}^t \sum_{l=1}^t d(R_h^{(k)}, R_h^{(l)}),$$

即

$$\frac{1}{t^2 nm} \sum_{k=1}^t \sum_{l=1}^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d(H_{ij,h+1}^{(k)}, H_{ij,h+1}^{(l)}) \leq \frac{1}{t^2 nm} \sum_{k=1}^t \sum_{l=1}^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d(H_{ij,h}^{(k)}, H_{ij,h}^{(l)}).$$

假设从 $\{R_h^{(1)}, R_h^{(2)}, \dots, R_h^{(t)}\}$ 到 $\{R_{h+1}^{(1)}, R_{h+1}^{(2)}, \dots, R_{h+1}^{(t)}\}$ 的转变中只有 $R_h^{(s)}$ 的元素 $H_{ij,h}^{(s)}$ 发生了改变, 其他矩阵及元素不变, 则只需证明

$$\sum_{k=1}^t d(H_{ij,h+1}^{(s)}, H_{ij,h+1}^{(k)}) \leq \sum_{k=1}^t d(H_{ij,h}^{(s)}, H_{ij,h}^{(k)}).$$

有

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^t d(H_{ij,h+1}^{(s)}, H_{ij,h+1}^{(k)}) = \\ & \sum_{k \neq s} d(\lambda H_{ij,h}^{(s)} \oplus (1 - \lambda) H_{ij,h}^{(c)}, H_{ij,h}^{(k)}) = \\ & \sum_{k \neq s} \frac{1}{4\tau} [|\lambda I(H_{ij,h}^{(s)-}) + (1 - \lambda) I(H_{ij,h}^{(c)-}) - I(H_{ij,h}^{(k)-})| + \\ & |\lambda I(H_{ij,h}^{(s)+}) + (1 - \lambda) I(H_{ij,h}^{(c)+}) - I(H_{ij,h}^{(k)+})|] \leq \\ & \sum_{k \neq s} \frac{1}{4\tau} [\lambda |I(H_{ij,h}^{(s)-}) - I(H_{ij,h}^{(k)-})| + (1 - \lambda) |I(H_{ij,h}^{(c)-}) - \\ & I(H_{ij,h}^{(k)-})| + \lambda |I(H_{ij,h}^{(s)+}) - I(H_{ij,h}^{(k)+})| + \\ & (1 - \lambda) |I(H_{ij,h}^{(c)+}) - I(H_{ij,h}^{(k)+})|] = \\ & \lambda \sum_{k \neq s} d(H_{ij,h}^{(s)}, H_{ij,h}^{(k)}) + (1 - \lambda) \sum_{k \neq s} d(H_{ij,h}^{(c)}, H_{ij,h}^{(k)}). \end{aligned}$$

下面证明

$$\sum_{k \neq s} d(H_{ij,h}^{(c)}, H_{ij,h}^{(k)}) \leq \sum_{k \neq s} d(H_{ij,h}^{(s)}, H_{ij,h}^{(k)}).$$

由

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq s} d(H_{ij,h}^{(c)}, H_{ij,h}^{(k)}) &= \sum_{k \neq s} d\left(\frac{1}{t} \sum_{l=1}^t H_{ij,h}^{(l)}, H_{ij,h}^{(k)}\right) = \\ &\frac{1}{4\tau} \sum_{k \neq s} \left[\left| \frac{1}{t} \sum_{l=1}^t I(H_{ij,h}^{(l)-}) - I(H_{ij,h}^{(k)-}) \right| + \right. \\ &\left. \left| \frac{1}{t} \sum_{l=1}^t I(H_{ij,h}^{(l)+}) - I(H_{ij,h}^{(k)+}) \right| \right] \leq \\ &\frac{1}{4\tau} \sum_{k \neq s} \left[\frac{1}{t} \sum_{l=1}^t |I(H_{ij,h}^{(l)-}) - I(H_{ij,h}^{(k)-})| + \right. \\ &\left. \frac{1}{t} \sum_{l=1}^t |I(H_{ij,h}^{(l)+}) - I(H_{ij,h}^{(k)+})| \right] = \\ &\sum_{k \neq s} \left[\frac{1}{t} \sum_{l=1}^t d(H_{ij,h}^{(l)}, H_{ij,h}^{(k)}) \right]. \end{aligned}$$

又由 $CL_{ij,h}^{(s)} = \min_k \{CL_{ij,h}^{(k)}\}$, 得

$$\frac{1}{t} \sum_{k=1}^t d(H_{ij,h}^{(s)}, H_{ij,h}^{(k)}) = \max_{1 \leq l \leq t} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t d(H_{ij,h}^{(l)}, H_{ij,h}^{(k)}).$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq s} d(H_{ij,h}^{(c)}, H_{ij,h}^{(k)}) &\leq \sum_{k \neq s} \left[\frac{1}{t} \sum_{l=1}^t d(H_{ij,h}^{(s)}, H_{ij,h}^{(l)}) \right] = \\ &\sum_{k \neq s} d(H_{ij,h}^{(s)}, H_{ij,h}^{(k)}). \end{aligned}$$

由此可得

$$\sum_{k=1}^t d(H_{ij,h+1}^{(s)}, H_{ij,h+1}^{(k)}) \leq \sum_{k=1}^t d(H_{ij,h}^{(s)}, H_{ij,h}^{(k)}),$$

$$CL[R_{(h+1)}^{(1)}, R_{(h+1)}^{(2)}, \dots, R_{(h+1)}^{(t)}] \geq$$

$$CL[R_{(h)}^{(1)}, R_{(h)}^{(2)}, \dots, R_{(h)}^{(t)}]. \quad \square$$

3 数值算例

考虑选择场地问题^[14], 一家公司由于扩张生产, 原有的场地已不能满足需求, 准备重新选择一块场地. 现有3块备选场地 A_1, A_2, A_3 , 由3个专家 d_1, d_2, d_3 构成一个决策委员会, 在3块场地中作出选择. 考虑的准则有: 有利的劳动气候 (C_1), 靠近市场 (C_2), 社区服务 (C_3), 生活质量 (C_4), 接近供应商和资源 (C_5). 每个专家采用语言术语集 $S = \{s_{-3} = \text{极差}, s_{-2} = \text{很差}, s_{-1} = \text{差}, s_0 = \text{一般}, s_1 = \text{好}, s_2 = \text{很好}, s_3 = \text{极好}\}$ 对 A_i 在准则 C_j 下进行评估. 给出的评价信息转化为犹豫模糊语言术语集, 得到犹豫模糊语言决策矩阵 $R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}$ 如下:

$$R^{(1)} =$$

$$\begin{bmatrix} \{s_2\} & \{s_1, s_2\} & \{s_2, s_3\} & \{s_0, s_1\} & \{s_2\} \\ \{s_1, s_2\} & \{s_{-1}, s_0\} & \{s_1, s_2\} & \{s_0, s_1, s_2\} & \{s_{-1}\} \\ \{s_2, s_3\} & \{s_2, s_3\} & \{s_2\} & \{s_2, s_3\} & \{s_0, s_1\} \end{bmatrix},$$

$$R^{(2)} =$$

$$\begin{bmatrix} \{s_1, s_2\} & \{s_1, s_2\} & \{s_1, s_2\} & \{s_2, s_3\} & \{s_0, s_1\} \\ \{s_3\} & \{s_2, s_3\} & \{s_2, s_3\} & \{s_1, s_2\} & \{s_1, s_2\} \\ \{s_2, s_3\} & \{s_2\} & \{s_0, s_1, s_2\} & \{s_1\} & \{s_2, s_3\} \end{bmatrix},$$

$$R^{(3)} =$$

$$\begin{bmatrix} \{s_2, s_3\} & \{s_1\} & \{s_1, s_2\} & \{s_1, s_2\} & \{s_1, s_2\} \\ \{s_2\} & \{s_3\} & \{s_2, s_3\} & \{s_0, s_1\} & \{s_2, s_3\} \\ \{s_1\} & \{s_0, s_1\} & \{s_0, s_1\} & \{s_1, s_2\} & \{s_2\} \end{bmatrix}.$$

下面用第2节中提出的共识性模型对 $R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}$ 的共识性进行测度和调整.

取 $\overline{CL} = 0.9, \lambda = 0.5$. 由式(7)计算 (i, j) 位置上元素的共识性水平 CL_{ij} , 构成共识矩阵

$$CL_0 =$$

$$\begin{bmatrix} 0.925\ 93 & 0.962\ 96 & 0.925\ 93 & 0.851\ 85 & 0.888\ 89 \\ 0.888\ 89 & 0.740\ 74 & 0.925\ 93 & 0.925\ 93 & 0.740\ 74 \\ 0.888\ 89 & 0.851\ 85 & 0.888\ 89 & 0.888\ 89 & 0.851\ 85 \end{bmatrix}.$$

用式(10)计算出3个决策矩阵之间的群体共识水平

$$CL_0\{R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}\} = 0.876\ 5.$$

由于 $CL\{R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}\} < \overline{CL}$, 需要对专家的部分评价数据进行调整, 以提高专家的群体共识.

第1次迭代 通过观察共识矩阵 CL_0 , 发现 (2, 2)、(2, 5) 位置上的元素的共识水平最低, 因此计算 $CL_{22}^{(k)}, CL_{25}^{(k)}$ 的值来确定需要调整的专家. 由式(6)得 $CL_{22}^{(1)} = 0.638\ 89, CL_{22}^{(2)} = 0.805\ 56, CL_{22}^{(3)} = 0.777\ 78,$ $CL_{25}^{(1)} = 0.666\ 67, CL_{25}^{(2)} = 0.805\ 56, CL_{25}^{(3)} = 0.75.$

由此可知需要对专家 d_1 的 (2, 2)、(2, 5) 位置上的元素进行调整, 根据式(12), 将 (2, 2)、(2, 5) 位置上的元素分别调整为 $\{s_0, s_1\}, \{s_0\}$, 并征求专家 d_1 的意见, 得到修正后的决策矩阵 $R_1^{(1)}, R_1^{(2)}, R_1^{(3)}$.

计算 $R_1^{(1)}, R_1^{(2)}, R_1^{(3)}$ 间元素的共识性水平, 构成共识矩阵

$$CL_1 =$$

$$\begin{bmatrix} 0.925\ 93 & 0.962\ 96 & 0.925\ 93 & 0.851\ 85 & 0.888\ 89 \\ 0.888\ 89 & 0.814\ 81 & 0.925\ 93 & 0.925\ 93 & 0.814\ 81 \\ 0.888\ 89 & 0.851\ 85 & 0.888\ 89 & 0.888\ 89 & 0.851\ 85 \end{bmatrix}.$$

由此可得3个决策矩阵之间的群体共识水平

$$CL_1\{R_1^{(1)}, R_1^{(2)}, R_1^{(3)}\} = 0.886\ 4 < \overline{CL}.$$

第2次迭代 观察共识性矩阵 CL_1 , 发现 (2, 2)、

(2, 5)位置上的元素的共识水平还是最低,再用式(6)计算 $CL_{22}^{(k)}$ 、 $CL_{25}^{(k)}$ 的值,有

$$CL_{22}^{(1)} = 0.75, CL_{22}^{(2)} = 0.86111, CL_{22}^{(3)} = 0.83333, \\ CL_{25}^{(1)} = 0.77778, CL_{25}^{(2)} = 0.86111, CL_{25}^{(3)} = 0.80566.$$

由此可知需要对专家 d_1 的(2, 2)、(2, 5)位置上的元素进行调整,根据式(12),将(2, 2)、(2, 5)位置上的元素分别调整为 $\{s_1, s_2\}$ 、 $\{s_1\}$,并反馈给专家,得到修正后的决策矩阵 $R_2^{(1)}$ 、 $R_2^{(2)}$ 、 $R_2^{(3)}$ 和新的共识矩阵

$$CL_2 = \begin{bmatrix} 0.92593 & 0.96296 & 0.92593 & 0.85185 & 0.88889 \\ 0.88889 & 0.88889 & 0.92593 & 0.92593 & 0.88889 \\ 0.88889 & 0.85185 & 0.88889 & 0.88889 & 0.85185 \end{bmatrix}.$$

第2次调整之后3个决策者间的群体共识水平为

$$CL_2\{R_2^{(1)}, R_2^{(2)}, R_2^{(3)}\} = 0.8963.$$

第3次迭代 通过观察共识矩阵 CL_2 ,发现(1, 4)、(3, 2)、(3, 5)位置上的元素的共识水平最低,用式(6)计算 $CL_{14}^{(k)}$ 、 $CL_{32}^{(k)}$ 、 $CL_{35}^{(k)}$ 的值,有

$$CL_{14}^{(1)} = 0.83333, CL_{14}^{(2)} = 0.83333, \\ CL_{14}^{(3)} = 0.88889, CL_{32}^{(1)} = 0.86111, \\ CL_{32}^{(2)} = 0.88889, CL_{32}^{(3)} = 0.80566, \\ CL_{35}^{(1)} = 0.80566, CL_{35}^{(2)} = 0.86111, \\ CL_{35}^{(3)} = 0.88889.$$

由于经过第2次调整之后的共识性水平已经非常接近 $\overline{CL} = 0.9$,为了减少被调整的元素,只需对专家 d_1 的(3, 5)位置上的元素或专家 d_3 的(3, 2)位置上的元素进行调整.这里先调整专家 d_3 的(3, 2)位置上的元素.根据式(12),调整后的元素为 $\{s_1, s_2\}$.

第3次调整之后的3个决策者之间的群体共识水平 $CL_3\{R_3^{(1)}, R_3^{(2)}, R_3^{(3)}\} = 0.9012 > 0.9$,输出调整之后的决策矩阵.令 $R^{(1)} = R_2^{(1)}$, $R^{(2)} = R_2^{(2)}$, $R^{(3)} = R_2^{(3)}$,则

$$R^{(1')} = \begin{bmatrix} \{s_2\} & \{s_1, s_2\} & \{s_2, s_3\} & \{s_0, s_1\} & \{s_2\} \\ \{s_1, s_2\} & \{s_1, s_2\} & \{s_1, s_2\} & \{s_0, s_1, s_2\} & \{s_1\} \\ \{s_2, s_3\} & \{s_2, s_3\} & \{s_2\} & \{s_2, s_3\} & \{s_0, s_1\} \end{bmatrix},$$

$$R^{(2')} = \begin{bmatrix} \{s_1, s_2\} & \{s_1, s_2\} & \{s_1, s_2\} & \{s_2, s_3\} & \{s_0, s_1\} \\ \{s_3\} & \{s_2, s_3\} & \{s_2, s_3\} & \{s_1, s_2\} & \{s_1, s_2\} \\ \{s_2, s_3\} & \{s_2\} & \{s_0, s_1, s_2\} & \{s_1\} & \{s_2, s_3\} \end{bmatrix},$$

$$R^{(3')} = \begin{bmatrix} \{s_2, s_3\} & \{s_1\} & \{s_1, s_2\} & \{s_1, s_2\} & \{s_1, s_2\} \\ \{s_2\} & \{s_3\} & \{s_2, s_3\} & \{s_0, s_1\} & \{s_2, s_3\} \\ \{s_1\} & \{s_1, s_2\} & \{s_0, s_1\} & \{s_1, s_2\} & \{s_2\} \end{bmatrix}.$$

对于上面的例子,由文献[14]中的共识性调整模

型得到的调整结果为:专家 d_1 将其(1, 4)、(2, 2)、(2, 5)、(3, 5)位置上元素分别修改为 $\{s_1, s_2\}$ 、 $\{s_1, s_2\}$ 、 $\{s_1\}$ 、 $\{s_1, s_2\}$,与本文的调整结果略有不同.下面将两模型比较如下:

1) 两模型中共识性水平的定义不同.文献[14]将各个专家的犹豫模糊语言术语集评价信息,通过求平均转化为单个的语言术语评价信息,然后求转化后的个体决策矩阵与群体决策矩阵间的相似度来定义共识性水平.本文则通过直接计算犹豫模糊语言术语集间的距离来定义共识性水平,这样就避免了信息的丢失.例如,在上例的评价矩阵中,用本文提出的共识性测度公式,语言评价信息 $H_S^1 = \{s_1, s_2, s_3\}$ 和 $H_S^2 = \{s_2\}$ 是不一致的,但其均值相同,故在文献[14]的共识性模型中处理为意见一致的评价.

2) 两模型中共识性调整思想不同.文献[14]根据群体共识性临界值,先找出与群体决策矩阵间共识性最低的专家,根据给定的方案共识性和元素共识性的临界值,对这一专家方案共识性水平和元素共识性水平进行提高,在调整规则中只给出了调整方向,以群体共识意见为参考进行调整.本文则根据共识性水平最低的评价元素来确定调整的专家,给出了建议调整的元素,并从理论上证明了调整方法的可行性.本文方法只需要给出一个共识性临界值,并且给出了具体的调整意见供专家参考,这样可以减少确定参数和元素的困难.

4 结论

本文研究了犹豫模糊语言决策矩阵的群体共识性问题.在新建的距离测度的基础上,定义了犹豫模糊语言决策矩阵的群体共识性水平、元素的共识性水平等概念;然后建立了共识性调整方法,从理论上分析了方法的可行性.与现有的共识性模型相比,该模型可以避免计算过程中数据的丢失,提供的调整信息可以帮助专家更方便地对信息进行修正,以达到群体共识.今后将研究更合理的共识性测度,并对共识性模型的收敛速度给出理论证明.

参考文献(References)

[1] Herrera F, Martínez L. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words[J] IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2000, 8(6): 746-752.
 [2] Herrera F, Martínez L. A model based on linguistic 2-tuples for dealing with multi-granularity hierarchical linguistic contexts in multi-expert decision making[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics-Part B, 2001, 31(2): 227-234.
 [3] Gong Z W, Forrest J, Yang Y J. The optimal group

- consensus models for 2-tuple linguistic preference relations[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 37(2): 427-437.
- [4] Xu Z S. On generalized induced linguistic aggregation operators[J]. Int J of General Systems, 2006, 35(2): 17-28.
- [5] 徐泽水. 基于语言信息的决策理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 2-3.
(Xu Z S. Decision making theory and methods based on linguistic information[M]. Beijing: Science Press, 2008: 2-3.)
- [6] Rodríguez R M, Martínez L, Herrera F. Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2012, 20(1): 109-119.
- [7] Lee L W, Chen S M. Fuzzy decision making based on likelihood-based comparison relations of hesitant fuzzy linguistic term sets and hesitant fuzzy linguistic operators[J]. Information Sciences, 2015, 294(3): 513-529.
- [8] Lee L W, Chen S M. Fuzzy decision making based on hesitant fuzzy linguistic term sets[C]. Proc of the 2013 5th Asia Conf on Intelligent Information and Database Systems. Kuala Lumpur, 2013: 21-30.
- [9] Liao H C, Xu Z C, Zeng X J. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy linguistic term sets and their application in multi-criteria decision making[J]. Information Sciences, 2014, 271(3): 125-142.
- [10] Wei C P, Zhao N, Tang X J. Operators and comparisons of hesitant fuzzy linguistic term sets[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2014, 22(3): 575-585.
- [11] Wei C P, Liao H C. A multigranularity linguistic group decision-making method based on hesitant 2-tuple sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2015, 31(6): 612-634.
- [12] Wei C P, Zhao N, Tang X J. A novel linguistic group decision-making model based on extended hesitant fuzzy linguistic term sets[J]. Int J of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2015, 23(3): 379-398.
- [13] Wei C P, Ren Z L, Rodríguez R M. A hesitant fuzzy linguistic TODIM method based on a score function[J]. Int J of Computational Intelligence Systems, 2015, 8(4): 701-712.
- [14] Wu Z B, Xu J P. A consensus process for decision making with hesitant fuzzy linguistic term sets[C]. IEEE Int Conf on Systems, Man, and Cybernetics. HongKong, 2015: 155-160.
- [15] Zhu B, Xu Z S. Consistency measures for hesitant fuzzy linguistic preference relations[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2014, 22(1): 35-45.
- [16] Wang J, Wang J Q, Zhang H Y, et al. Multi-criteria decision-making based on hesitant fuzzy linguistic term sets: An outranking approach[J]. Knowledge-Based Systems, 2015, 86: 224-236.
- [17] Zhang Z, Wu C. Hesitant fuzzy linguistic aggregation operators and their applications to multiple attribute group decision making[J]. J of Intelligent & Fuzzy Systems, 2014, 26(5): 2185-2202.
- [18] Palomares I, Estrella F J, Martínez L, et al. Consensus under a fuzzy context: Taxonomy, analysis framework AFRYCA and experimental case of study[J]. Information Fusion, 2014, 20(15): 252-271.
- [19] Dong Y C, Zhang G Q, Hong W C, et al. Consensus models for AHP group decision making under row geometric mean prioritization method[J]. Decision Support Systems, 2010, 49(3): 281-289.
- [20] Herrera-Viedma E, Herrera F, Chiclana F. A consensus model for multiperson decision making with different preference structures[J]. IEEE Trans on Systems, Man, & Cybernetics, Part A: Systems & Humans, 2002, 32(3): 394-402.
- [21] Chen S M, Lee L W. Autocratic decision making using group recommendations based on the ILLWA operator and likelihood-based comparison relations[J]. South African J of Industrial Engineering, 2012, 26(3): 1-11.
- [22] Xu Z S. An automatic approach to reaching consensus in multiple attribute group decision making[J]. Computers & Industrial Engineering, 2009, 56(4): 1369-1374.
- [23] Xia M M, Xu Z S, Chen J. Algorithms for improving consistency or consensus of reciprocal $[0,1]$ -valued preference relations[J]. Fuzzy Sets & Systems, 2013, 216(8): 108-133.
- [24] Alonso S, Pérez I J, Cabrerizo F J, et al. A linguistic consensus model for Web 2.0 communities[J]. Applied Soft Computing, 2013, 13(1): 149-157.
- [25] Kacprzyk J, Zadrozny S. Soft computing and web intelligence for supporting consensus reaching[J]. Soft Computing, 2010, 14(8): 833-846.
- [26] Chiclana F, Mata F, Martínez L, et al. Integration of a consistency control module within a consensus model[J]. Int J of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2008, 16(1): 35-53.
- [27] Zhang G Q, Dong Y C, Xu Y F. Linear optimization modeling of consistency issues in group decision making based on fuzzy preference relations[J]. Expert Systems with Applications an Int J, 2012, 39(3): 2415-2420.
- [28] Palomares I, Martínez L. A semisupervised multiagent system model to support consensus-reaching processes[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2014, 22(4): 762-777.
- [29] Dong Y C, Chen X, Herrera F. Minimizing adjusted simple terms in the consensus reaching process with hesitant linguistic assessments in group decision making[J]. Information Sciences, 2015, 297(C): 95-117.
- [30] Wang H, Xu Z S. Some consistency measures of extended hesitant fuzzy linguistic preference relations[J]. Information Sciences, 2015, 297: 316-331.