

# 基于广义犹豫三角模糊幂均算子的MADM方法

牟能冶<sup>†</sup>

(1. 西南交通大学 交通运输与物流学院, 成都 610031; 2. 西南交通大学  
综合交通运输智能化国家地方联合工程实验室, 成都 610031)

**摘 要:** 针对以犹豫三角模糊元(HTFE)为输入的多属性决策(MADM)问题, 首先, 给出犹豫三角模糊集距离的定义, 并基于此提出犹豫三角模糊幂均(HTFPA)算子的概念; 其次, 为了能够有效地弱化与整体信息偏差较大的评估值对决策结果的影响, 提出广义犹豫三角模糊幂均(GHTFPA)算子, 并探讨其相关性质; 再次, 通过构建基于最小绝对偏差法的非线性规划模型, 以合理地获取广义犹豫三角模糊幂均参数; 最后, 针对各属性之间均存在交互关联关系且权重信息完全未知的MADM问题, 提出基于广义犹豫三角模糊幂均算子的MADM方法. 案例和对比分析表明, 所提出的方法是可行且合理的.

**关键词:** 多属性决策; 犹豫三角模糊集; 幂均算子; 广义幂均算子; 物流供应商选择

中图分类号: C934

文献标志码: A

## An approach to multiple attribute decision making on the basis of hesitant triangular fuzzy power average operator

MU Neng-ye<sup>†</sup>

(1. School of Transportation and Logistics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China; 2. National United Engineering Laboratory of Integrated and Intelligent Transportation, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract:** In terms of the multiple attribute decision making(MADM) problems under hesitant triangular fuzzy environment, the distance measure for the hesitant triangular fuzzy sets is first introduced, and then the concept of the hesitant triangular fuzzy power average(HTFPA) is proposed. In order to effectively alleviate the influence of these “false” or “biased” arguments on the final decision-making result, the generalized hesitant triangular fuzzy power average(GHTFPA) is introduced and its related properties are also investigated. Then, a nonlinear programming model is constructed on the basis of the least absolute deviation method to reasonably attain the parameter of the GHTFPA operator. Furthermore, a novel approach, with respect to the MADM problem in which there are interactions among attributes and the attribute weights are unknown, is provided by utilizing the GHTFPA operator. Finally, a numerical example and a comparison are provided to illustrate the feasibility and rationality of the proposed approach.

**Keywords:** multiple attribute decision making; hesitant triangular fuzzy set; power average operator; generalized power average operator; supplier selection

## 0 引 言

多属性决策(MADM)问题是系统科学和决策科学等领域的研究热点,在故障诊断、模式识别、图像处理、机器学习、决策支持系统等方面有着十分广泛的运用<sup>[1-3]</sup>. 同时,丰富而复杂的决策背景也对与MADM相关的理论和方法提出了新要求<sup>[4]</sup>:新的决策理论和方法应在合理地避免主观因素影响的前提下,具备处理系统高度不确定性、信息多重关联性

复杂因素的能力.

自Zadeh<sup>[5]</sup>首次提出模糊集的概念以来,学者们不断致力于将其进行拓展和延伸,以应对新环境下由系统的高度不确定性所导致的问题. 其中,诸如区间模糊集<sup>[6]</sup>、直觉模糊集<sup>[7]</sup>、三角模糊数<sup>[8]</sup>、梯形模糊数<sup>[9]</sup>以及犹豫模糊集<sup>[10]</sup>等的相关理论及其应用一直是模糊领域的研究热点. 特别地,Zhao等<sup>[11]</sup>在结合三角模糊数和犹豫模糊集的基础上提出了犹豫三角模

收稿日期: 2016-11-21; 修回日期: 2017-07-03.

基金项目: 国家哲学社会科学基金项目(12CJL056); 国家软科学研究计划中央高校基本科研业务费百人计划项目(2012X03262); 四川省科技厅项目(2011S22004); 成都市科技项目(2015S26013).

作者简介: 牟能冶(1982-),男,副教授,博士,从事决策理论与方法及供应链管理的研究.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: munengye@home.swjtu.edu.cn

糊集的概念. 该集合可用于描述决策者认为事物隶属于某属性的程度存在几个可能值的模糊问题, 因而较传统的以单一三角模糊数表示的情形更加贴近实际.

在MADM问题中, 信息多重关联性对决策结果的合理性有着直接的影响. Yager<sup>[12]</sup>通过构建支持度函数以度量各待集结元素间的关系, 并基于此提出了幂均(PA)算子. 该算子不仅能够降低与整体信息偏差较大的评估值的权重, 而且能够提升重要评估值对决策结果的影响. 熊升华等<sup>[4]</sup>在此基础上定义了广义幂均算子, 以尽可能地弱化与整体信息偏差较大评估值对决策结果的影响. Bonferroni<sup>[13]</sup>针对各决策属性间相互关联的信息集结问题, 提出了Bonferroni均值以集结相关决策信息. 随后, 学者们就Bonferroni均值的理论拓展及其应用开展了大量的研究<sup>[14-16]</sup>. 特别地, Dutta等<sup>[17]</sup>将Bonferroni均值拓展到考虑决策属性部分关联的情形, 并将其应用于二元语义环境下的MADM问题中. Chen等<sup>[18]</sup>则在已有研究的基础上给出了Bonferroni均值拓展的一般形式, 并给出了该算子的集结机理. 此外, Choquet积分及其拓展<sup>[19-21]</sup>也被广泛地用于解决信息具有多重关联性的MADM问题. 相较于Bonferroni均值和Choquet积分算子, 幂均算子的优势主要体现在以下两个方面: 1) Bonferroni均值和Choquet积分算子需要通过决策评估属性间的交互关系间接反映决策评估值间的相关关系<sup>[17-18]</sup>, 而幂均算子能够直接将决策评估值间的交互关系考虑到信息聚合过程中; 2) 尽管幂均算子和Choquet积分算子均将决策信息间的交互关系转换为待聚合数据的权重信息, 但幂均算子主要通过待聚合数据值的大小客观确定该权重信息, 而Choquet积分算子则需要由决策者根据决策属性间的关系主观给定待聚合数据的权重信息<sup>[22]</sup>. 因此, 幂均算子更适用于需要考虑决策评估值间交互关系的信息聚合问题.

目前, 鲜有文献探讨以犹豫三角模糊元(HTFE)为输入的多属性决策(MADM)问题中, 信息多重关联性对决策结果合理性的影响. 针对该问题, 本文首先给出犹豫三角模糊集距离的公理化定义, 并据此定义标准化犹豫三角模糊Hamming距离. 随后, 提出犹豫三角模糊幂均(HTFPA)算子, 该算子能够弱化与整体信息偏差较大的犹豫三角模糊评估值对决策结果影响. 基于广义幂均算子, 本文还定义了可有效降低与整体信息偏差较大的犹豫三角模糊评估值的权重的广义犹豫三角模糊幂均(GHTFPA)算子, 并给出一

种基于最小绝对偏差法的非线性规划模型, 以合理且客观地获取广义犹豫三角模糊幂均参数. 最后, 针对属性之间均存在交互关联关系且权重信息完全未知的MADM问题, 提出基于广义犹豫三角模糊幂均算子的MADM方法. 通过将本文方法应用于物流供应商选取的实例中, 以及与相关方法的对比分析, 验证了所提出方法的可行性和合理性.

## 1 预备知识

### 1.1 三角模糊数

定义1<sup>[8]</sup> 若 $\tilde{a} = (a^L, a^M, a^U)$ , 满足 $0 \leq a^L \leq a^M \leq a^U$ , 则称 $\tilde{a}$ 为一个三角模糊数, 其隶属度函数可以表示为

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0, & x < a^L; \\ \frac{x - a^L}{a^M - a^L}, & a^L \leq x < a^M; \\ \frac{x - a^L}{a^M - a^U}, & a^M \leq x < a^U; \\ 0, & x \geq a^U. \end{cases}$$

其中:  $a^L$ 和 $a^U$ 分别为 $a$ 所支撑的下界和上界,  $a^M$ 为 $a$ 的中值.

定义2<sup>[23]</sup> 设 $\tilde{a} = (a^L, a^M, a^U)$ 和 $\tilde{b} = (b^L, b^M, b^U)$ 为论域 $X$ 上的两个三角模糊数, 则 $\tilde{a} \geq \tilde{b}$ 的可能度定义为

$$p(\tilde{a} \geq \tilde{b}) = \lambda \max \left\{ 1 - \max \left[ \frac{b^M - a^L}{a^M - a^L + b^M - b^L}, 0 \right], 0 \right\} + (1 - \lambda) \max \left\{ 1 - \max \left[ \frac{b^U - a^M}{a^U - a^M + b^U - b^M}, 0 \right], 0 \right\}, \quad (1)$$

其中参数 $\lambda$ 反映了决策者的风险态度. 若决策者是偏好风险的, 则 $\lambda > 0.5$ ; 若决策者是风险中立的, 则 $\lambda = 0.5$ ; 若决策者是厌恶风险的, 则 $\lambda < 0.5$ . 基于定义2, 可对两个三角模糊数进行比较.

### 1.2 犹豫三角模糊集

在三角模糊数<sup>[8]</sup>和犹豫模糊集<sup>[10]</sup>的基础上, Zhao等<sup>[11]</sup>提出了如下犹豫三角模糊集(HTFS)的概念, 旨在解决现实生活中以犹豫三角模糊信息为输入的多属性决策问题.

定义3<sup>[11]</sup> 设 $X$ 为一非空集合, 称

$$E = \{ \langle x, \tilde{h}_E(x) \rangle | x \in X \} \quad (2)$$

为犹豫三角模糊集, 其中 $\tilde{h}_E(x)$ 为单位区间 $[0, 1]$ 上元素 $x$ 隶属于集合 $E$ 的一系列三角模糊数构成的集合. 为了便于描述, Zhao等<sup>[11]</sup>记 $\tilde{h}_E(x) = \tilde{h} = \{(\gamma^L, \gamma^M, \gamma^U)\}$ 为一犹豫三角模糊元(HTFE), 并记所有犹豫三角模糊元的集合为 $\tilde{H}$ .

**定义4**<sup>[11]</sup> 设  $\tilde{h} = \{(\gamma^L, \gamma^M, \gamma^U)\}$ ,  $\tilde{h}_1 = \{(\gamma_1^L, \gamma_1^M, \gamma_1^U)\}$  和  $\tilde{h}_2 = \{(\gamma_2^L, \gamma_2^M, \gamma_2^U)\}$  为论域  $X$  上的3个犹豫三角模糊元, 则其运算规则定义为

$$\begin{aligned} \tilde{h}^\lambda &= \bigcup_{\tilde{\gamma} \in \tilde{h}} \{((\gamma^L)^\lambda, (\gamma^M)^\lambda, (\gamma^U)^\lambda)\}; \\ \lambda \tilde{h} &= \bigcup_{\tilde{\gamma} \in \tilde{h}} \{(1 - (1 - \gamma^L)^\lambda, 1 - (1 - \gamma^M)^\lambda, 1 - (1 - \gamma^U)^\lambda)\}; \\ \tilde{h}_1 \oplus \tilde{h}_2 &= \bigcup_{\tilde{\gamma}_1 \in \tilde{h}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \tilde{h}_2} \{(\gamma_1^L + \gamma_2^L - \gamma_1^L \gamma_2^L, \gamma_1^M + \gamma_2^M - \gamma_1^M \gamma_2^M, \gamma_1^U + \gamma_2^U - \gamma_1^U \gamma_2^U)\}; \\ \tilde{h}_1 \times \tilde{h}_2 &= \bigcup_{\tilde{\gamma}_1 \in \tilde{h}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \tilde{h}_2} \{(\gamma_1^L \gamma_2^L, \gamma_1^M \gamma_2^M, \gamma_1^U \gamma_2^U)\}. \end{aligned}$$

同时, Zhao等<sup>[11]</sup>将犹豫三角模糊元的记分函数定义为

$$s(\tilde{h}) = \frac{1}{\#\tilde{h}} \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{h}} \tilde{\gamma}, \quad (3)$$

其中  $\#\tilde{h}$  表示  $\tilde{h}$  中三角模糊数的个数. 结合定义2, 可对犹豫三角模糊元进行比较, 其比较规则为: 若  $s(\tilde{h}_1) \geq s(\tilde{h}_2)$ , 则  $\tilde{h}_1 \geq \tilde{h}_2$ .

### 1.3 幂均算子

为了克服信息集结过程中部分偏差信息对集结结果的影响, Yager<sup>[12]</sup>提出了一种依附于待集结个体与整体的差异化程度而实现降低偏差信息权重的信息集结算子, 即幂均算子. 本节简要介绍其相关概念.

**定义5**<sup>[12]</sup> 设  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  为一组待集结的实数, 称

$$PA(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\sum_{i=1}^n (1 + T(a_i)) a_i}{\sum_{i=1}^n (1 + T(a_i))} = \sum_{i=1}^n \frac{1 + T(a_i)}{\sum_{i=1}^n (1 + T(a_i))} a_i$$

为幂均算子. 其中

$$T(a_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \text{Sup}(a_i, a_j),$$

$\text{Sup}(a_i, a_j)$  表示  $a_j$  对  $a_i$  的支持度, 满足条件:

- 1)  $\text{Sup}(a, b) \in [0, 1]$ ;
- 2)  $\text{Sup}(a, b) = \text{Sup}(b, a)$ ;
- 3) 若  $|a - b| < |x - y|$ , 则  $\text{Sup}(a, b) \geq \text{Sup}(x, y)$ .

Yager<sup>[12]</sup>同时给出了如下两个满足条件的支持度函数:

$$\text{Sup}(a, b) = Ke^{-\varepsilon(a-b)^2}, \quad (4)$$

$$\text{Sup}(a, b) = K(1 - |a - b|^\varepsilon). \quad (5)$$

其中:  $K \in [0, 1], \varepsilon \geq 0$ .

### 1.4 广义幂均算子

为了尽可能地降低偏差较大数据对信息集结过程的影响, 熊升华等<sup>[4]</sup>在 Yager 的基础上给出了如下广义幂均算子的定义.

**定义6**<sup>[4]</sup> 设  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  为一组待集结的实数, 称

$$\begin{aligned} \text{GPA}_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \frac{\sum_{i=1}^n (1 + T(a_i))^\lambda a_i}{\sum_{i=1}^n (1 + T(a_i))^\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{(1 + T(a_i))^\lambda}{\sum_{i=1}^n (1 + T(a_i))^\lambda} a_i, \quad \lambda \in [0, +\infty) \end{aligned}$$

为广义幂均算子, 其中

$$T(a_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \text{Sup}(a_i, a_j),$$

$\text{Sup}(a_i, a_j)$  表示  $a_j$  对  $a_i$  的支持度, 满足定义5给出的3个条件. 广义幂均算子主要通过调节参数  $\lambda$  以调整待聚合元素  $a_i$  所对应的非线性权重. 类似的工作还包括 Xiong等<sup>[24]</sup>基于幂几何算子提出的变权幂几何等算子.

## 2 犹豫三角模糊幂均算子及其性质

在以犹豫三角模糊元为输入的 MAGDM 问题中, 与整体输入信息具有较大偏差的数据在一定程度上将影响最终的决策结论, 有时甚至会导致完全错误的决策结论. 为了弱化该数据的影响, 本节在给出犹豫三角模糊集距离定义的基础上, 提出犹豫三角模糊幂均算子, 并验证其相关性质.

**定义7** 设  $A$  和  $B$  为论域  $X$  上的两个犹豫三角模糊集, 如果其满足以下3方面性质: 1) 有界性:  $0 \leq d(A, B) \leq 1$ ; 2) 自反性: 当且仅当  $A = B$  时, 有  $d(A, B) = 0$ ; 3) 对称性:  $d(A, B) = d(B, A)$ . 则称  $d(A, B)$  为犹豫三角模糊集的距离.

通常, 对于任意  $x \in X$ , 犹豫三角模糊元  $\tilde{h}_A(x)$  与  $\tilde{h}_B(x)$  拥有不同的元素个数, 即  $\#\tilde{h}_A(x) \neq \#\tilde{h}_B(x)$ . 为了计算犹豫三角模糊集的距离, 借鉴 Xu等<sup>[24]</sup>度量犹豫模糊集距离的思想, 首先依据决策者的风险态度向元素个数较少的犹豫三角模糊元 ( $\tilde{h}_A(x)$  或  $\tilde{h}_B(x)$ ) 中添加相应最大(或最小)的三角模糊数: 若决策者是喜好风险的, 则添加最大的三角模糊数; 反之, 则添加最小的三角模糊数. 随后, 基于定义2将各犹豫三角模糊元内所包含的三角模糊数按照从大到小(或从小

到大)的顺序进行排序.

基于该思想和公理化定义7,本文给出如下犹豫模糊集距离公式.

**定义8** 设A和B为论域 $X = \{1, 2, \dots, n\}$ 上的两个犹豫三角模糊集,则标准化犹豫三角模糊Hamming距离为

$$d(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{3l_i} \sum_{j=1}^{l_i} (|\gamma_{A\sigma(j)}^L(x_i) - \gamma_{B\sigma(j)}^L(x_i)| + |\gamma_{A\sigma(j)}^M(x_i) - \gamma_{B\sigma(j)}^M(x_i)| + |\gamma_{A\sigma(j)}^U(x_i) - \gamma_{B\sigma(j)}^U(x_i)|) \right].$$

其中: $l_i = \max\{\#\tilde{h}_A(x_i), \#\tilde{h}_B(x_i)\}$ ,且 $\tilde{h}_{A\sigma(j)}(x_i) = \{(\gamma_{A\sigma(j)}^L(x_i), \gamma_{A\sigma(j)}^M(x_i), \gamma_{A\sigma(j)}^U(x_i))\}$ 和 $\tilde{h}_{B\sigma(j)}(x_i) = \{(\gamma_{B\sigma(j)}^L(x_i), \gamma_{B\sigma(j)}^M(x_i), \gamma_{B\sigma(j)}^U(x_i))\}$ 分别为 $\tilde{h}_A(x_i)$ 和 $\tilde{h}_B(x_i)$ 中第j大的三角模糊数.

**定义9** 设 $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n)$ 为一组待集结的犹豫三角模糊元,称

$$HTFPA(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n) = \frac{\bigoplus_{i=1}^n (1 + T(\tilde{h}_i))\tilde{h}_i}{\sum_{i=1}^n (1 + T(\tilde{h}_i))} = \bigoplus_{i=1}^n \left( \frac{1 + T(\tilde{h}_i)}{\sum_{i=1}^n (1 + T(\tilde{h}_i))} \tilde{h}_i \right) \quad (6)$$

为犹豫三角模糊幂均(HTFPA)算子. 其中

$$T(\tilde{h}_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \text{Sup}(\tilde{h}_i, \tilde{h}_j),$$

$\text{Sup}(\tilde{h}_i, \tilde{h}_j)$ 表示 $\tilde{h}_j$ 对 $\tilde{h}_i$ 的支持度,满足条件:

- 1)  $\text{Sup}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) \in [0, 1]$ ;
- 2)  $\text{Sup}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) = \text{Sup}(\tilde{h}_2, \tilde{h}_1)$ ;
- 3) 若 $d(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) < d(\tilde{h}_3, \tilde{h}_4)$ ,则 $\text{Sup}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) \geq \text{Sup}(\tilde{h}_3, \tilde{h}_4)$ ,记号d表示犹豫三角模糊元的距离.

由定义9可知,支持度 $\text{Sup}(\tilde{h}_i, \tilde{h}_j)$ 即为两个犹豫三角模糊元相似度的度量. 两个元素越相似,其间距越小,进而对应的支持度越大.

**定理1** 设 $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n)$ 为一组待集结的犹豫三角模糊元,利用HTFPA算子进行集结得到的结果为一个犹豫三角模糊元,可以表示为

$$HTFPA(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n) = \bigcup_{\tilde{\gamma}_1 \in \tilde{h}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \tilde{h}_2, \dots, \tilde{\gamma}_n \in \tilde{h}_n} \left\{ \left( 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^L)^{\frac{(1+T(\tilde{h}_i))}{\sum_{i=1}^n (1+T(\tilde{h}_i))}} \right), \right. \\ \left. 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^M)^{\frac{(1+T(\tilde{h}_i))}{\sum_{i=1}^n (1+T(\tilde{h}_i))}}, \right. \\ \left. 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^U)^{\frac{(1+T(\tilde{h}_i))}{\sum_{i=1}^n (1+T(\tilde{h}_i))}} \right\},$$

$$1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^U)^{\frac{(1+T(\tilde{h}_i))}{\sum_{i=1}^n (1+T(\tilde{h}_i))}} \Big\}. \quad (7)$$

**证明** 首先,利用归纳法证明

$$\bigoplus_{i=1}^n (1 + T(\tilde{h}_i))\tilde{h}_i = \bigcup_{\tilde{\gamma}_1 \in \tilde{h}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \tilde{h}_2, \dots, \tilde{\gamma}_n \in \tilde{h}_n} \left\{ \left( 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^L)^{1+T(\tilde{h}_i)}, \right. \right. \\ \left. \left. 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^M)^{1+T(\tilde{h}_i)}, 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^U)^{1+T(\tilde{h}_i)} \right) \right\} \quad (8)$$

成立.

当 $n = 2$ 时,由于

$$(1 + T(\tilde{h}_i))\tilde{h}_i = \bigcup_{\tilde{\gamma}_i \in \tilde{h}_i} \left\{ (1 - (1 - \gamma_i^L)^{1+T(\tilde{h}_i)}, 1 - (1 - \gamma_i^M)^{1+T(\tilde{h}_i)}, \right. \\ \left. 1 - (1 - \gamma_i^U)^{1+T(\tilde{h}_i)}) \right\}, i = 1, 2,$$

则

$$(1 + T(\tilde{h}_1))\tilde{h}_1 \oplus (1 + T(\tilde{h}_2))\tilde{h}_2 = \bigcup_{\tilde{\gamma}_1 \in \tilde{h}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \tilde{h}_2} \left\{ (1 - (1 - \gamma_1^L)^{1+T(\tilde{h}_1)} + \right. \\ \left. 1 - (1 - \gamma_2^L)^{1+T(\tilde{h}_2)} - (1 - (1 - \gamma_1^L)^{1+T(\tilde{h}_1)}) \cdot (1 - (1 - \gamma_2^L)^{1+T(\tilde{h}_2)}), \right. \\ \left. 1 - (1 - \gamma_1^M)^{1+T(\tilde{h}_1)} + 1 - (1 - \gamma_2^M)^{1+T(\tilde{h}_2)} - (1 - (1 - \gamma_1^M)^{1+T(\tilde{h}_1)}) \cdot (1 - (1 - \gamma_2^M)^{1+T(\tilde{h}_2)}), \right. \\ \left. 1 - (1 - \gamma_1^U)^{1+T(\tilde{h}_1)} + 1 - (1 - \gamma_2^U)^{1+T(\tilde{h}_2)} - (1 - (1 - \gamma_1^U)^{1+T(\tilde{h}_1)}) \cdot (1 - (1 - \gamma_2^U)^{1+T(\tilde{h}_2)}) \right\} = \\ \left\{ (1 - (1 - \gamma_1^L)^{1+T(\tilde{h}_1)}) \cdot (1 - \gamma_2^L)^{1+T(\tilde{h}_2)}, \right. \\ \left. 1 - (1 - \gamma_1^M)^{1+T(\tilde{h}_1)} \cdot (1 - \gamma_2^M)^{1+T(\tilde{h}_2)}, \right. \\ \left. 1 - (1 - \gamma_1^U)^{1+T(\tilde{h}_1)} \cdot (1 - \gamma_2^U)^{1+T(\tilde{h}_2)} \right\}.$$

因而,式(8)在 $n = 2$ 时成立.

假设式(8)在 $n = k$ 时成立,即

$$\bigoplus_{i=1}^k (1 + T(\tilde{h}_i))\tilde{h}_i = \bigcup_{\tilde{\gamma}_1 \in \tilde{h}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \tilde{h}_2, \dots, \tilde{\gamma}_k \in \tilde{h}_k} \left\{ \left( 1 - \prod_{i=1}^k (1 - \gamma_i^L)^{1+T(\tilde{h}_i)}, \right. \right. \\ \left. \left. 1 - \prod_{i=1}^k (1 - \gamma_i^M)^{1+T(\tilde{h}_i)}, 1 - \prod_{i=1}^k (1 - \gamma_i^U)^{1+T(\tilde{h}_i)} \right) \right\}, \\ \text{当 } n = k + 1 \text{ 时,有} \\ \bigoplus_{i=1}^{k+1} (1 + T(\tilde{h}_i))\tilde{h}_i = \left( \bigoplus_{i=1}^k (1 + T(\tilde{h}_i))\tilde{h}_i \right) \oplus ((1 + T(\tilde{h}_{k+1}))\tilde{h}_{k+1}) =$$

$$\begin{aligned} & \bigcup_{\tilde{\gamma}_1 \in \tilde{h}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \tilde{h}_2, \dots, \tilde{\gamma}_{k+1} \in \tilde{h}_{k+1}} \left\{ \left( 1 - \prod_{i=1}^k (1 - \gamma_i^L)^{1+T(\tilde{h}_i)} + \right. \right. \\ & 1 - (1 - \gamma_{k+1}^L)^{1+T(\tilde{h}_{k+1})} - \left. \left( 1 - \prod_{i=1}^k (1 - \right. \right. \\ & \left. \left. \gamma_i^L)^{1+T(\tilde{h}_i)} \right) \cdot (1 - (1 - \gamma_{k+1}^L)^{1+T(\tilde{h}_{k+1})}), 1 - \right. \\ & \left. \prod_{i=1}^k (1 - \gamma_i^M)^{1+T(\tilde{h}_i)} + 1 - (1 - \gamma_{k+1}^M)^{1+T(\tilde{h}_{k+1})} - \right. \\ & \left. \left( 1 - \prod_{i=1}^k (1 - \gamma_i^M)^{1+T(\tilde{h}_i)} \right) \cdot \left( 1 - (1 - \right. \right. \\ & \left. \left. \gamma_{k+1}^M)^{1+T(\tilde{h}_{k+1})} \right) \right), 1 - \prod_{i=1}^k (1 - \gamma_i^U)^{1+T(\tilde{h}_i)} + 1 - \\ & (1 - \gamma_{k+1}^U)^{1+T(\tilde{h}_{k+1})} - \left. \left( 1 - \prod_{i=1}^k (1 - \gamma_i^U)^{1+T(\tilde{h}_i)} \right) \cdot \right. \\ & \left. \left( 1 - (1 - \gamma_{k+1}^U)^{1+T(\tilde{h}_{k+1})} \right) \right\} = \\ & \bigcup_{\tilde{\gamma}_1 \in \tilde{h}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \tilde{h}_2, \dots, \tilde{\gamma}_{k+1} \in \tilde{h}_{k+1}} \left\{ \left( 1 - \right. \right. \\ & \left. \left. \prod_{i=1}^{k+1} (1 - \gamma_i^L)^{1+T(\tilde{h}_i)}, 1 - \prod_{i=1}^{k+1} (1 - \gamma_i^U)^{1+T(\tilde{h}_i)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

因而,式(8)对任意的正整数  $n$  成立.

此外,由犹豫三角模糊元的运算规则易知

$$\begin{aligned} \text{HTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n) &= \\ \frac{\bigoplus_{i=1}^n (1 + T(\tilde{h}_i)) \tilde{h}_i}{\sum_{i=1}^n (1 + T(\tilde{h}_i))} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bigcup_{\tilde{\gamma}_1 \in \tilde{h}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \tilde{h}_2, \dots, \tilde{\gamma}_n \in \tilde{h}_n} \left\{ \left( 1 - \left( 1 - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left( 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^L) \right) \right)^{\frac{1+T(\tilde{h}_i)}{\sum_{i=1}^n (1+T(\tilde{h}_i))}}, \right. \\ & 1 - \left. \left( 1 - \left( 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^L) \right) \right)^{\frac{1+T(\tilde{h}_i)}{\sum_{i=1}^n (1+T(\tilde{h}_i))}}, \right. \\ & 1 - \left. \left( 1 - \left( 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^L) \right) \right)^{\frac{1+T(\tilde{h}_i)}{\sum_{i=1}^n (1+T(\tilde{h}_i))}} \right\} = \\ & \bigcup_{\tilde{\gamma}_1 \in \tilde{h}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \tilde{h}_2, \dots, \tilde{\gamma}_n \in \tilde{h}_n} \left\{ \left( 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^L) \right)^{\frac{1+T(\tilde{h}_i)}{\sum_{i=1}^n (1+T(\tilde{h}_i))}}, \right. \\ & 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^M) \Big)^{\frac{(1+T(\tilde{h}_i))}{\sum_{i=1}^n (1+T(\tilde{h}_i))}}, \\ & \left. 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^U) \Big)^{\frac{1+T(\tilde{h}_i)}{\sum_{i=1}^n (1+T(\tilde{h}_i))}} \right\}, \quad \square \end{aligned}$$

**定理2** 假设对于任意的正整数  $1 \leq i \neq j \leq n$ , 存在  $\text{Sup}(\tilde{h}_i, \tilde{h}_j) = k, k \in [0, 1]$ , 则

$$\begin{aligned} \text{HTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n) &= \\ \bigcup_{\tilde{\gamma}_1 \in \tilde{h}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \tilde{h}_2, \dots, \tilde{\gamma}_n \in \tilde{h}_n} \left\{ \left( 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^L)^{1/n}, \right. \right. \\ & \left. \left. 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^M)^{1/n}, 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^U)^{1/n} \right) \right\}. \end{aligned}$$

**证明** 由条件可知,对于任意的正整数  $1 \leq i \neq j \leq n$ , 有  $T(\tilde{h}_i) = (n - 1)k$ . 结合定理1易验证定理2成立.  $\square$

**定理3** (置换不变性) 设  $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n)$  为一组待集结的犹豫三角模糊元,  $(\tilde{h}'_1, \tilde{h}'_2, \dots, \tilde{h}'_n)$  为其任一置换, 则

$$\text{HTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n) = \text{HTFPA}(\tilde{h}'_1, \tilde{h}'_2, \dots, \tilde{h}'_n).$$

**证明** 由条件可知,对于任意的  $\tilde{h}_i$ , 存在唯一的  $\tilde{h}'_j$  使得  $\tilde{h}_i = \tilde{h}'_j$ , 则  $T(\tilde{h}_i) = T(\tilde{h}'_j)$ . 因而

$$\begin{aligned} \text{HTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n) &= \\ \frac{\bigoplus_{i=1}^n (1 + T(\tilde{h}_i)) \tilde{h}_i}{\sum_{i=1}^n (1 + T(\tilde{h}_i))} &= \\ \frac{\bigoplus_{i=1}^n (1 + T(\tilde{h}'_j)) \tilde{h}'_j}{\sum_{i=1}^n (1 + T(\tilde{h}'_j))} &= \\ \text{HTFPA}(\tilde{h}'_1, \tilde{h}'_2, \dots, \tilde{h}'_n). & \quad \square \end{aligned}$$

下例将说明犹豫三角模糊幂均算子不满足幂等性、有界性和单调性.

**例1** 假设

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1 &= \{(0.15, 0.25, 0.4), (0.25, 0.35, 0.4)\}, \\ \tilde{h}_2 &= \{(0.2, 0.3, 0.45), (0.2, 0.3, 0.35)\}, \\ \tilde{h}_3 &= \{(0.16, 0.24, 0.93), (0.07, 0.08, 0.67)\}, \\ \tilde{h}_4 &= \{(0.01, 0.06, 0.69), (0.16, 0.27, 0.32)\} \end{aligned}$$

为4个犹豫三角模糊元, 并令支持度函数为  $\text{Sup} = 1 - d(h_i, h_j), i \neq j$ , 其中  $d(h_i, h_j)$  为标准化犹豫三角模糊Hamming距离. 此外,假设决策者是厌恶风险的,且式(1)中的参数  $\lambda = 0.4$ . 由定理1有

$$\begin{aligned} \text{HTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_1, \tilde{h}_1) &= \\ \{(0.1847, 0.2849, 0.4000), (0.1500, 0.2500, 0.4000), \\ (0.1847, 0.2849, 0.4000), (0.2180, 0.3182, 0.4000), \\ (0.2180, 0.3182, 0.4000), (0.2180, 0.3182, 0.4000), \\ (0.1847, 0.2849, 0.4000), (0.2500, 0.3500, 0.4000)\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{HTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3) = & \{(0.170\ 5, 0.264\ 3, 0.690\ 0), (0.178\ 7, 0.255\ 0, 0.519\ 0), \\ & (0.205\ 0, 0.299\ 2, 0.690\ 0), (0.205\ 0, 0.299\ 2, 0.707\ 2), \\ & (0.143\ 0, 0.217\ 9, 0.490\ 8), (0.143\ 0, 0.217\ 9, 0.519\ 0), \\ & (0.178\ 7, 0.255\ 0, 0.490\ 8), (0.170\ 5, 0.264\ 3, 0.707\ 2)\}; \\ \text{HTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_4) = & \{(0.204\ 6, 0.307\ 8, 0.357\ 8), (0.124\ 7, 0.211\ 2, 0.530\ 4), \\ & (0.170\ 4, 0.273\ 7, 0.393\ 1), (0.204\ 6, 0.307\ 8, 0.393\ 1), \\ & (0.170\ 4, 0.273\ 7, 0.357\ 8), (0.124\ 7, 0.211\ 2, 0.503\ 1), \\ & (0.160\ 8, 0.248\ 2, 0.530\ 4), (0.160\ 8, 0.248\ 2, 0.503\ 1)\}. \end{aligned}$$

1) 由式(3)可知,  $s(\text{HTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_1, \tilde{h}_1)) = \{(0.201\ 0, 0.301\ 2, 0.400\ 0)\}$ , 且  $s(\tilde{h}_1) = \{(0.200\ 0, 0.300\ 0, 0.400\ 0)\}$ . 根据式(1),  $\text{HTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_1, \tilde{h}_1) \neq \tilde{h}_1$ , 即HTFPA算子不满足幂等性.

2) 令  $\tilde{a}_1 = \text{HTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3)$ ,  $\tilde{a}_2 = \tilde{h}_1$ ,  $\tilde{a}_3 = \tilde{h}_2$ ,  $\tilde{a}_4 = \tilde{h}_3$ , 并利用式(1)和(3)比较犹豫三角模糊元  $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4$ . 假设  $p_{ij} = p(\tilde{a}_i \geq \tilde{a}_j)$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$ , 则可能度矩阵为

$$p = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.5369 & 0.5369 & 0.6697 \\ 0.4631 & 0.5000 & 0.5000 & 0.5946 \\ 0.4631 & 0.5000 & 0.5000 & 0.5946 \\ 0.3303 & 0.4054 & 0.4054 & 0.5000 \end{bmatrix}.$$

对矩阵每一行求和, 有  $p_1 = 2.2436, p_2 = 2.0577, p_3 = 2.0577, p_4 = 1.6411$ , 所以  $\tilde{a}_1 > \tilde{a}_2 = \tilde{a}_3 > \tilde{a}_4$ , 即  $\text{HTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3) > \tilde{h}_1 = \tilde{h}_2 > \tilde{h}_3$ , 因而HTFPA算子不满足有界性.

3) 类似2), 分别比较犹豫三角模糊元的大小为  $\tilde{h}_1 = \tilde{h}_2 > \tilde{h}_3 > \tilde{h}_4$ , 以及  $\text{HTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_1, \tilde{h}_1) < \text{HTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3)$  且  $\text{HTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_1, \tilde{h}_1) > \text{HTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_4)$ . 因而HTFPA算子不满足单调性.

事实上, 犹豫三角模糊幂均算子的非单调性决定了其区别于传统集结算子的一个重要特性: 降低与整体偏离较大数据的权重, 以凸显与重要数据对集结结果的影响.

### 3 广义犹豫三角模糊幂均算子及其性质

在实际的决策环境中, 为了尽可能地降低大偏差的输入数据对于信息集成结论的影响, 本文定义如下广义犹豫三角模糊幂均算子.

**定义10** 设  $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n)$  为一组待集结的犹豫三角模糊元, 称

$$\text{GHTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n) = \bigoplus_{i=1}^n (1 + T(\tilde{h}_i))^\xi \tilde{h}_i / \sum_{i=1}^n (1 + T(\tilde{h}_i))^\xi =$$

$$\bigoplus_{i=1}^n \left( \frac{(1 + T(\tilde{h}_i))^\xi}{\sum_{i=1}^n (1 + T(\tilde{h}_i))^\xi} \tilde{h}_i \right), \xi \geq 0 \quad (9)$$

为广义犹豫三角模糊幂均(GHTFPA)算子, 其中

$$T(\tilde{h}_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \text{Sup}(\tilde{h}_i, \tilde{h}_j),$$

$\text{Sup}(\tilde{h}_i, \tilde{h}_j)$  表示  $\tilde{h}_j$  对  $\tilde{h}_i$  的支持度, 满足条件定义9的3个条件.

**定理4** 设  $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n)$  为一组待集结的犹豫三角模糊元, 利用GHTFPA算子进行集结得到的结果为一个犹豫三角模糊元, 可以表示为

$$\begin{aligned} \text{GHTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n) = & \bigcup_{\tilde{\gamma}_1 \in \tilde{h}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \tilde{h}_2, \dots, \tilde{\gamma}_n \in \tilde{h}_n} \left\{ \left( 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^L)^{\frac{(1+T(\tilde{h}_i))^\xi}{\sum_{i=1}^n (1+T(\tilde{h}_i))^\xi}} \right. \right. \\ & \left. \left. 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^M)^{\frac{(1+T(\tilde{h}_i))^\xi}{\sum_{i=1}^n (1+T(\tilde{h}_i))^\xi}} \right. \right. \\ & \left. \left. 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^U)^{\frac{(1+T(\tilde{h}_i))^\xi}{\sum_{i=1}^n (1+T(\tilde{h}_i))^\xi}} \right) \right\}, \xi \geq 0. \quad (10) \end{aligned}$$

证明过程与定理1的证明类似, 此处省略.

**定理5** 假设: 1) 对于任意的正整数  $1 \leq i \neq j \leq n$ , 存在  $\text{Sup}(\tilde{h}_i, \tilde{h}_j) = k, k \in [0, 1]$ ; 2)  $\xi = 0$ , 则

$$\begin{aligned} \text{GHTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n) = & \bigcup_{\tilde{\gamma}_1 \in \tilde{h}_1, \tilde{\gamma}_2 \in \tilde{h}_2, \dots, \tilde{\gamma}_n \in \tilde{h}_n} \left\{ \left( 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^L)^{1/n}, \right. \right. \\ & \left. \left. 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^M)^{1/n}, 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^U)^{1/n} \right) \right\}. \end{aligned}$$

**证明** 由条件可知, 对于任意的正整数  $1 \leq i \neq j \leq n$ , 有  $T(\tilde{h}_i) = (n - 1)k$ . 此外, 若  $\xi = 0$ , 则  $(1 + T(\tilde{h}_i))^\xi = 1$ . 结合定理4易验证定理5成立.  $\square$

此外, 当  $\xi = 1$  时, 广义犹豫三角模糊幂均算子退化为犹豫三角模糊幂均算子.

**定理6** (置换不变性) 设  $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n)$  为一组待集结的犹豫三角模糊元,  $(\tilde{h}'_1, \tilde{h}'_2, \dots, \tilde{h}'_n)$  为其任一置换, 则

$$\begin{aligned} \text{GHTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n) = & \\ \text{GHTFPA}(\tilde{h}'_1, \tilde{h}'_2, \dots, \tilde{h}'_n). & \end{aligned}$$

证明过程与定理3的证明类似, 此处省略.

与犹豫三角模糊幂均算子类似, 广义犹豫三角模糊幂均算子也不满足幂等性、有界性和单调性. 需要指出的是, 广义犹豫三角模糊幂均算子能够根据需求定量地降低与整体偏离较大数据的权重, 以及提升与

整体偏离较小数据在集结过程中的重要性. 下例将说明该现象.

**例2** 对于由例1中4个犹豫三角模糊元所构成的待集结数组  $\tilde{h} = \{\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3, \tilde{h}_4\}$ , 各元素的权重  $w_i = (1 + T(\tilde{h}_i))^\xi / \sum_{i=1}^n (1 + T(\tilde{h}_i))^\xi (i = 1, 2, 3, 4)$  随广义犹豫三角幂均参数  $\xi \geq 0$  的变化如图1所示. 其中, 支持度函数为  $\text{Sup} = 1 - d(h_i, h_j), i \neq j, d(h_i, h_j)$  为标准化犹豫三角模糊Hamming距离, 且决策者是厌恶风险的.

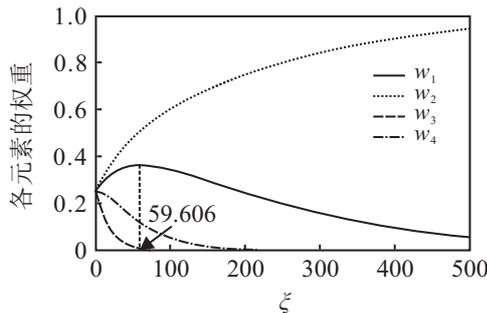


图1 权重  $w_i$  随广义犹豫三角幂均参数  $\xi$  的变化

在图1中, 当  $\xi \leq 59.606$  时,  $\tilde{h}_3$  和  $\tilde{h}_4$  与整体偏离较大, 其权重随  $\xi$  的增加而减小; 同理,  $\tilde{h}_1$  和  $\tilde{h}_2$  与整体偏离较小, 因而其权重随  $\xi$  的增加而增加. 特别地, 由于  $\tilde{h}_3$  与整体的偏离最大, 其权重下降最快. 当  $\xi > 59.606$  时,  $\tilde{h}_1$  所对应的权重也相应地减小, 而  $\tilde{h}_2$  所对应的权重持续增加, 该现象说明广义犹豫三角模糊幂均算子能够根据需求有效地提升主要元素在集结过程中的重要性. 此外, 亦可看出, 当  $\xi \rightarrow +\infty$  时,  $\tilde{h}_2$  的权重逐渐趋于1, 而  $\tilde{h}_1, \tilde{h}_3$  和  $\tilde{h}_4$  的权重逐渐趋于0. 因此, 有以下定理.

**定理7** 设  $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n)$  为一组待集结的犹豫三角模糊元, 则必存在某个常数  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  使得

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \text{GHTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n) = \tilde{h}_k.$$

**证明** 不失一般性, 令  $T(\tilde{h}_k) = \max_{i=1, 2, \dots, n} \{T(\tilde{h}_i)\}$ , 则

$$\begin{aligned} \text{GHTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n) &= \bigoplus_{i=1}^n \left( \frac{(1 + T(\tilde{h}_i))^\xi}{\sum_{i=1}^n (1 + T(\tilde{h}_i))^\xi} \tilde{h}_i \right) = \\ &= \bigoplus_{i=1}^n \left( \frac{(1 + T(\tilde{h}_i))^\xi}{\sum_{i=1}^n (1 + T(\tilde{h}_i))^\xi} \tilde{h}_i \right), \xi \geq 0, \end{aligned}$$

其中  $0 < (1 + T(\tilde{h}_i)) / (1 + T(\tilde{h}_k)) \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$ . 因此, 当  $\xi \rightarrow +\infty$  时:

1) 若  $i \neq k$ , 则

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 + T(\tilde{h}_i)}{1 + T(\tilde{h}_k)} \right)^\xi = 0;$$

2) 若  $i = k$ , 则

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 + T(\tilde{h}_i)}{1 + T(\tilde{h}_k)} \right)^\xi = 1.$$

进而,  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \text{GHTFPA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n) = \tilde{h}_k. \square$

#### 4 广义犹豫三角模糊幂均参数 $\xi$ 的确定方法

在已有研究中, 参数  $\xi$  的取值通常直接假定由决策者予以确定, 并未考虑主观确定参数值对决策结论准确性的影响. 因此, 为尽可能避免主观确定参数取值对信息集结过程的不利影响, 本文针对广义犹豫三角模糊幂均算子中参数  $\xi$  的确定, 提出如下最小偏差拟合法.

首先, 将待集结元素进行排列, 使得

$$T(\tilde{h}_{\sigma(1)}) \leq T(\tilde{h}_{\sigma(2)}) \leq \dots \leq T(\tilde{h}_{\sigma(n)}).$$

然后, 利用权重三角生成函数<sup>[18]</sup>

$$w_{\sigma(i)} = Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{i-1}{n}\right), i = 1, 2, \dots, n$$

求得各待集结元素的权重. 其中,  $Q: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  为一单调非减的函数, 满足  $Q(0) = 0$  且  $Q(1) = 1$ .

最后, 利用广义犹豫模糊幂均算子权重公式

$$w_{\sigma(i)}(\xi) = \frac{(1 + T(\tilde{h}_{\sigma(i)}))^\xi}{\sum_{i=1}^n (1 + T(\tilde{h}_{\sigma(i)}))^\xi}, i = 1, 2, \dots, n, \xi \geq 0$$

获取元素  $\tilde{h}_{\sigma(i)}$  所对应的权重.

易知, 由上述两种方法生成的权重均随  $T(\tilde{h}_{\sigma(i)})$  值的增加而增加, 因而根据权重信息的一致性<sup>[4]</sup>, 利用

$$\xi = \arg \min_{\xi \in [0, +\infty)} \sum_{i=1}^n |w_{\sigma(i)}(\xi) - w_{\sigma(i)}|$$

获得广义犹豫三角模糊幂均参数  $\xi$  的客观值.

由于以上方法充分利用待集结数据信息, 从而确保了该方法的可行性. 另一方面, 该方法亦可视为对权重三角生成函数的一种改进, 使得权重的确定过程更为合理.

#### 5 基于广义犹豫三角模糊幂均算子的MADM方法

考虑各属性间存在交互关联关系且权重信息完全未知的MADM问题, 分别记  $M = \{1, 2, \dots, m\}$  和  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  为  $m$  个备选方案和  $n$  个属性的下标集合. 假定待评估方案集合为  $A = \{A_1, A_2, \dots,$

$A_m$ }, 以及待评估的属性集合为  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ . 首先, 决策者以犹豫三角模糊元给出方案  $A_i (i \in M)$  在属性  $C_j (j \in N)$  下的评估值, 则可构建犹豫三角模糊评估矩阵  $B = [\tilde{b}_{ij}]_{m \times n}$ , 要求根据该决策评价信息确定最优方案. 基于广义犹豫三角模糊幂均算子的MADM方法的具体决策步骤如下.

**Step 1:** 将决策者给出的犹豫三角模糊评估信息进行标准化处理, 得到标准化犹豫三角模糊评估矩阵  $H = [\tilde{h}_{ij}]_{m \times n}$ , 其中

$$\tilde{h}_{ij} = \begin{cases} \bigcup_{\tilde{\gamma}_{ij} \in \tilde{b}_{ij}} \left\{ \left( \frac{\gamma_{ij}^L}{\max_{j \in N} \{\gamma_{ij}^U\}}, \frac{\gamma_{ij}^M}{\max_{j \in N} \{\gamma_{ij}^U\}}, \frac{\gamma_{ij}^U}{\max_{j \in N} \{\gamma_{ij}^U\}} \right) \right\}, & C_j \text{ is a benefit attribute;} \\ \bigcup_{\tilde{\gamma}_{ij} \in \tilde{b}_{ij}} \left\{ \left( \frac{\min_{j \in N} \{\gamma_{ij}^L\}}{\gamma_{ij}^R}, \frac{\min_{j \in N} \{\gamma_{ij}^L\}}{\gamma_{ij}^M}, \frac{\min_{j \in N} \{\gamma_{ij}^L\}}{\gamma_{ij}^L} \right) \right\}, & C_j \text{ is a cost attribute.} \end{cases} \quad (11)$$

**Step 2:** 计算对应于备选方案  $A_i$  的各评估值间的支持度

$$\text{Sup}(\tilde{h}_{ij}, \tilde{h}_{it}) = 1 - d(\tilde{h}_{ij}, \tilde{h}_{it}),$$

得到  $m$  个支持度矩阵

$$S_i = [\text{Sup}(\tilde{h}_{ij}, \tilde{h}_{it})]_{n \times n}, i \in N.$$

其中,  $d(\tilde{h}_{ij}, \tilde{h}_{it})$  为犹豫三角模糊集的Hamming距离.

**Step 3:** 计算对应于备选方案  $A_i$  的各评估值的总支持度

$$T(\tilde{h}_{ij}) = \sum_{t=1, t \neq j}^n \text{Sup}(\tilde{h}_{ij}, \tilde{h}_{it}),$$

并得到总支持度矩阵  $T = [T(\tilde{h}_{ij})]_{m \times n}$ .

**Step 4:** 计算对应于属性  $C_j$  的平均总支持度

$$MT_j = \sum_{i=1}^m T(\tilde{h}_{ij}) / m, j \in N.$$

**Step 5:** 将各属性所对应的平均总支持度进行排序, 使得  $MT_{\sigma(1)} \leq MT_{\sigma(2)} \leq \dots \leq MT_{\sigma(n)}$ , 并利用权重三角生成函数求得各属性所对应的权重

$$w_{\sigma(j)} = Q\left(\frac{j}{n}\right) - Q\left(\frac{j-1}{n}\right), j \in N. \quad (12)$$

**Step 6:** 计算带有参数  $\xi$  的广义犹豫三角模糊幂均权重

$$w_{\sigma(j)}(\xi) = \frac{(1 + MT_{\sigma(j)})^\xi}{\sum_{j=1}^n (1 + MT_{\sigma(j)})^\xi}, j \in N, \xi \geq 0.$$

**Step 7:** 根据权重信息的一致性, 利用式

$$\xi = \arg \min_{\xi \in [0, +\infty)} \sum_{j=1}^n |w_{\sigma(j)}(\xi) - w_{\sigma(j)}| \quad (13)$$

获得广义犹豫三角模糊幂均参数  $\xi$  的客观值.

**Step 8:** 结合由 Step 3 获得的各评估值的总支持度, 以及由 Step 7 获取的广义犹豫三角模糊幂均参数  $\xi$ , 利用广义犹豫三角模糊幂均算子计算各方案所对应的综合评估值  $\tilde{h}_i (i \in M)$ .

**Step 9:** 综合决策者的风险态度和犹豫三角模糊元的记分函数, 利用定义 2 对各方案所对应的综合评估值进行比较, 并据此对各方案进行排序.

事实上, 较传统MADM方法而言, 本文所提方法具有以下两方面的优势:

- 1) 充分利用决策者提供的评估信息, 客观地获取各属性的权重信息以及广义犹豫三角模糊幂均参数  $\xi$ , 进而避免了主观人为因素对决策结果的影响;
- 2) 在合理选取广义犹豫三角模糊幂均参数  $\xi$  的基础上, 利用广义犹豫三角模糊幂均算子对评估信息进行集结, 可以有效地弱化与整体偏离较大的数据的影响, 进而凸显重要评估信息在决策过程中的作用.

## 6 案例分析

实施供应链管理可以有效地提高企业的整体竞争力, 使其能够面对巨大的挑战, 供应商的选择则是构筑供应链的第一步, 也是关键的一步<sup>[26]</sup>. 假设某新兴企业(用户)为谋求发展需要为其选择一个合适的供应商, 因为初入市场, 对需求的供应商了解甚少, 所以依托该行业经验丰富的策划公司(决策者)为其辅助选择. 着眼于自身利益, 该企业要求策划公司重点考察供应商的以下 4 方面属性<sup>[26]</sup>: 服务能力( $C_1$ )、产品质量( $C_2$ )、创新与发展能力( $C_3$ )以及开发成本( $C_4$ ). 其中, 前 3 个为效益型属性, 最后 1 个为成本型属性. 当供应商需求信息通过正式渠道(公平竞争)发布后, 符合条件的 4 个供应商(方案提供者)根据需求提交方案  $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$ . 策划公司基于供应商所提供的方案以犹豫三角模糊元分别给出各个方案在各个属性下的评价值  $\tilde{b}_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4)$ , 如表 1 所示.

表 1 犹豫三角模糊评估矩阵  $B$

	$C_1$	$C_2$
$A_1$	{(0.2,0.3,0.5),(0.2,0.4,0.6)}	{(0.5,0.6,0.8)}
$A_2$	{(0.4,0.5,0.6)}	{(0.3,0.4,0.5),(0.7,0.8,0.9)}
$A_3$	{(0.1,0.4,0.9)}	{(0.3,0.6,0.7)}
$A_4$	{(0.2,0.3,0.4)}	{(0.2,0.3,0.4),(0.7,0.8,0.9)}
	$C_3$	$C_4$
$A_1$	{(0.2,0.4,0.6)}	{(0.3,0.4,0.7)}
$A_2$	{(0.4,0.5,0.6)}	{(0.3,0.4,0.5),(0.2,0.5,0.6)}
$A_3$	{(0.2,0.4,0.6),(0.3,0.5,0.7)}	{(0.5,0.6,0.7)}
$A_4$	{(0.1,0.2,0.3)}	{(0.1,0.5,0.9)}

假设决策者是厌恶风险的,且式(1)中的参数为  $\lambda = 0.4$ ,式(12)中的函数为  $Q(x) = x^2$ . 利用第6节提出的基于广义犹豫三角模糊幂均算子的MADM方

法对各方案进行排序.

Step 1: 利用式(11)计算标准化犹豫三角模糊评估矩阵  $H$ ,结果如表2所示.

表2 标准化犹豫三角模糊评估矩阵  $H$

	$C_1$	$C_2$
$A_1$	{(0.222 2, 0.333 3, 0.555 6), (0.222 2, 0.444 4, 0.666 7)}	{(0.555 6, 0.666 7, 0.888 9)}
$A_2$	{(0.444 4, 0.555 6, 0.666 7)}	{(0.333 3, 0.444 4, 0.555 6), (0.777 8, 0.888 9, 1.000 0)}
$A_3$	{(0.111 1, 0.444 4, 1.000 0)}	{(0.333 3, 0.666 7, 0.777 8)}
$A_4$	{(0.222 2, 0.333 3, 0.444 4)}	{(0.222 2, 0.333 3, 0.444 4), (0.777 8, 0.888 9, 1.000 0)}
	$C_3$	$C_4$
$A_1$	{(0.285 7, 0.571 4, 0.857 1)}	{(0.142 9, 0.252 0, 0.333 3)}
$A_2$	{(0.571 4, 0.714 3, 0.857 1)}	{(0.200 0, 0.250 0, 0.333 3), (0.166 7, 0.200 0, 0.500 0)}
$A_3$	{(0.285 7, 0.571 4, 0.857 1), (0.4286, 0.7143, 1.000 0)}	{(0.142 9, 0.166 7, 0.200 0)}
$A_4$	{(0.142 9, 0.285 7, 0.428 6)}	{(0.111 1, 0.200 0, 1.000 0)}

Step 2: 计算对应于备选方案  $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$  的各评估值间的支持度为

$$S_1 = \begin{bmatrix} - & 0.7037 & 0.8360 & 0.8347 \\ 0.7037 & - & 0.8677 & 0.5384 \\ 0.8360 & 0.8677 & - & 0.6706 \\ 0.8347 & 0.5384 & 0.6706 & - \end{bmatrix},$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} - & 0.7778 & 0.8413 & 0.7194 \\ 0.7778 & - & 0.7778 & 0.6083 \\ 0.8413 & 0.7778 & - & 0.5607 \\ 0.7194 & 0.6083 & 0.5607 & - \end{bmatrix},$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} - & 0.7778 & 0.8280 & 0.6302 \\ 0.7778 & - & 0.9021 & 0.5772 \\ 0.8280 & 0.9021 & - & 0.5270 \\ 0.6302 & 0.5772 & 0.5270 & - \end{bmatrix},$$

$$S_4 = \begin{bmatrix} - & 0.7222 & 0.9524 & 0.7333 \\ 0.7222 & - & 0.6746 & 0.6407 \\ 0.9524 & 0.6746 & - & 0.7704 \\ 0.7333 & 0.6407 & 0.7704 & - \end{bmatrix}.$$

Step 3: 计算对应于备选方案  $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$  的各评估值的总支持度为

$$T = \begin{bmatrix} 2.3743 & 2.1098 & 2.3743 & 2.0437 \\ 2.3385 & 2.1639 & 2.1798 & 1.8885 \\ 2.2360 & 2.2571 & 2.2571 & 1.7344 \\ 2.4079 & 2.0376 & 2.3974 & 2.1444 \end{bmatrix}.$$

Step 4: 计算各属性的平均总支持度为

$$MT_1 = 2.339, MT_2 = 2.142, \\ MT_3 = 2.302, MT_4 = 1.953.$$

Step 5: 将各属性所对应的平均总支持度按照从小到大进行排序,则

$$MT_{\sigma(1)} = MT_4, MT_{\sigma(2)} = MT_2,$$

$$MT_{\sigma(3)} = MT_3, MT_{\sigma(4)} = MT_1.$$

由式(12),属性  $C_4$  的三角权重为

$$w_{\sigma(1)} = Q\left(\frac{j}{n}\right) - Q\left(\frac{j-1}{n}\right) = \\ \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1-1}{4}\right)^2 = 0.0625.$$

同理,属性  $C_2$ 、 $C_3$  和  $C_1$  的三角权重分别为0.1875、0.3125和0.4375.

Step 6: 计算带有参数  $\xi$  的广义犹豫三角模糊幂均权重,并根据权重信息一致性,利用式(13)确定广义犹豫三角模糊幂均参数. 图2给出了  $\sum_{j=1}^n |w_{\sigma(j)}(\xi) - w_{\sigma(j)}|$  随  $\xi \geq 0$  的变化图,由图2可知  $\xi = 15.4940$ .

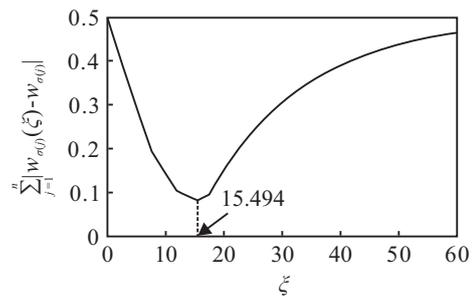


图2  $\sum_{j=1}^n |w_{\sigma(j)}(\xi) - w_{\sigma(j)}|$  随广义犹豫三角幂均参数  $\xi$  的变化

Step 7: 结合参数  $\xi = 15.4940$ ,利用GHTFPA算子求得各方案的综合评价价值如表3所示.

表3 各方案的综合评价价值

$\tilde{h}_1$	{(0.277 1, 0.516 1, 0.781 7), (0.277 1, 0.475 5, 0.752 0)}
$\tilde{h}_2$	{(0.450 3, 0.571 3, 0.701 4), (0.450 8, 0.571 9, 0.699 5), (0.548 7, 0.678 9, 1.000 0), (0.549 1, 0.679 3, 1.000 0)}
$\tilde{h}_3$	{(0.310 1, 0.629 7, 1.000 0), (0.254 5, 0.573 8, 1.000 0)}
$\tilde{h}_4$	{(0.215 5, 0.345 5, 1.000 0), (0.180 8, 0.303 7, 1.000 0)}

Step 8: 根据式(1), 假设  $p_{ij} = p(\tilde{h}_i \geq \tilde{h}_j, i, j = 1, 2, 3, 4)$ , 则各方案综合评价的可能度矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.1712 & 0.3067 & 0.6254 \\ 0.8288 & 0.5000 & 0.5475 & 0.7503 \\ 0.6933 & 0.4525 & 0.5000 & 0.7395 \\ 0.3746 & 0.2497 & 0.2605 & 0.5000 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

因而, 各方案综合评价的总可能度分别为

$$p_1 = 1.6033, p_2 = 2.6266, \\ p_3 = 2.3853, p_4 = 1.3848.$$

Step 9: 各方案的最终排序为

$$A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4,$$

即方案  $A_2$  最优.

在本算例中, 论文假设决策者是厌恶风险的, 且参数  $\lambda = 0.4$ . 更具一般地, 图3给出了各方案综合评价的总可能度随参数  $\lambda \in [0, 1]$  的变化情况. 可以看出, 随着决策者的风险态度由风险厌恶到风险中立, 再到风险追求的转变: 1) 方案  $A_1$  和  $A_2$  的总可能度越来越大, 而方案  $A_3$  和  $A_4$  的总可能度越来越小; 2) 当参数  $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$  时, 方案  $A_3$  最优, 且各方案的最终排序为  $A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$ ; 3) 当参数  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$  时, 方案  $A_2$  最优, 且各方案的最终排序为  $A_2 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1$ ; 4) 当参数  $\lambda_2 \leq \lambda \leq 1$  时, 方案  $A_2$  最优, 且各方案的最终排序为  $A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$ . 进而说明了, 决策者风险态度直接影响着决策结果. 此外, 图3亦可表明, 当决策者的风险态度为追求风险时 ( $0.5 < \lambda \leq 1$ ), 各方案的最终排序结果保持不变.

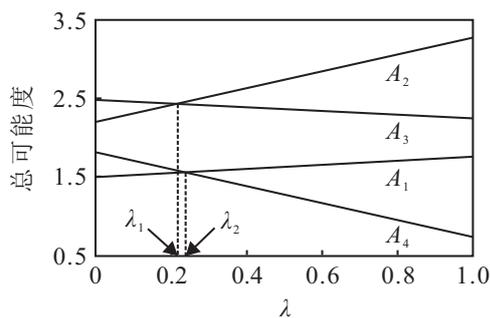


图3 各方案综合评价的总可能度随参数  $\lambda$  的变化

### 7 对比分析

对于上述案例, 以 Zhao 等<sup>[11]</sup> 提出的基于犹豫三角模糊 Einstein 加权几何 (HTFEWG) 算子的 MADM 方法对各方案进行排序, 则各方案的综合评价如表 4 所示. 其中属性权重向量由上述方法中 Step 5 的权重三角函数生成, 即

$$w = (0.4375, 0.1875, 0.3125, 0.0625).$$

表 4 Zhao 等的方法下各方案的综合评价

$\tilde{h}_1$	{(0.281 5, 0.504 7, 0.738 4), (0.281 5, 0.448 2, 0.685 8)}
$\tilde{h}_2$	{(0.433 0, 0.548 2, 0.690 1), (0.437 3, 0.554 5, 0.675 7), (0.511 2, 0.628 3, 0.773 1), (0.516 0, 0.635 0, 0.758 0)}
$\tilde{h}_3$	{(0.188 7, 0.494 2, 0.845 3), (0.216 7, 0.533 3, 0.889 4)}
$\tilde{h}_4$	{(0.244 1, 0.382 1, 0.556 1), (0.185 9, 0.308 1, 0.466 9)}

类似地, 各方案综合评价的可能度矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.1991 & 0.4184 & 0.8694 \\ 0.8009 & 0.5000 & 0.6229 & 1.0000 \\ 0.5816 & 0.3771 & 0.5000 & 0.8709 \\ 0.1306 & 0.0000 & 0.1291 & 0.5000 \end{bmatrix}.$$

因此, 各方案综合评价的总可能度分别为

$$p_1 = 1.9869, p_2 = 2.9238, \\ p_3 = 2.3296, p_4 = 0.7597,$$

则各方案的最终排序为  $A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$ , 即方案  $A_2$  最优.

可以看出, 本文所提出的基于广义犹豫三角模糊幂均算子的 MADM 方法与 Zhao 等<sup>[11]</sup> 提出的方法在处理上述案例时得到了相同的决策结果, 进而表明了本文所提方法的可行性. 此外, 由于广义幂均算子能够弱化与整体偏离较大的信息, 且第 6 节确定了广义犹豫三角模糊幂均参数  $\xi$  的方法能够对权重三角函数生成的权重进行修正, 本文所提方法更为合理.

### 8 结论

本文旨在构建广义犹豫三角模糊幂均算子, 研究其性质, 并将其应用于复杂环境下的 MADM 问题中. 为了将幂均算子拓展到以犹豫三角模糊信息为输入的决策环境中, 本文首先给出了标准化犹豫三角模糊 Hamming 距离的定义. 在此基础上, 定义了犹豫三角模糊幂均算子, 并研究了其相关性质. 广义犹豫三角模糊幂均算子的提出为有效地弱化与整体偏离较大的数据的影响, 凸显重要评估信息在决策过程中的作用提供了前提保障. 同时, 一种基于权重三角函数的最小偏差法被用于合理选取犹豫三角模糊幂均参数, 该方法充分利用了决策者提供的决策信息, 有效地避免了主观因素的影响. 在以 HTFE 为信息输入的复杂系统框架内, 本文提出了基于犹豫三角模糊幂均算子的 MADM 方法, 为解决各属性间均存在交互关联关系且权重信息完全未知的 MADM 问题提供了一类新思路. 在后续的研究中, 将重点关注本文所述决策方法与其他多学科融合而构建的新型复杂决策体系, 并探讨其在控制器设计、故障诊断以及模式识别等各个领域的应用, 以分析其合理性和可行性.

## 参考文献(References)

- [1] Zhang L Y, Li T, Xu X H. Consensus model for multiple criteria group decision making under intuitionistic fuzzy environment[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 57(2): 127-135.
- [2] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators[J]. Fuzzy Sets & Systems, 1994, 79(2): 175-190.
- [3] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. A model of consensus in group decision making under linguistic assessments[J]. Fuzzy Sets & Systems, 1996, 78(1): 73-87.
- [4] 熊升华, 陈振颂, 李延来. 基于IFN输入的复杂系统关联MCGDM方法研究[J]. 控制与决策, 2015, 30(6): 1065-1077.  
(Xiong S H, Chen Z S, Li Y L. Interdependent multiple criteria group decision making method for complex systems based on arguments with intuitionistic fuzzy numbers[J]. Control and Decision, 2015, 30(6): 1065-1077.)
- [5] Zadeh L A. Probability measures of fuzzy events[J]. J of Mathematical Analysis and Applications, 1968, 23(2): 421-427.
- [6] Wang G J, Li X P. The applications of interval-valued fuzzy numbers and interval-distribution numbers[J]. Fuzzy Sets & Systems, 1998, 98: 331-335.
- [7] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets & Systems, 1986, 20(1): 87-96.
- [8] Laarhoven P J M V, Pedrycz W. A fuzzy extension of Saaty's priority theory[J]. Fuzzy Sets & Systems, 1983, 11(3): 199-227.
- [9] Abbasbandy S, Hajjari T. A new approach for ranking of trapezoidal fuzzy numbers[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2009, 57(3): 413-419.
- [10] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2009, 25(6): 529-539.
- [11] Zhao X F, Lin R, Wei G W. Hesitant triangular fuzzy information aggregation based on Einstein operations and their application to multiple attribute decision making[J]. Expert Systems with Applications, 2014, 41(4): 1086-1094.
- [12] Yager R R. The power average operator[J]. IEEE Trans on Systems Man, Cybernetics Part A: Systems & Humans, 2001, 31(6): 724-731.
- [13] Bonferroni C. Sulle medie multiple di potenze[J]. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 1950, 5(3): 267-270.
- [14] Zhu B, Xu Z S, Xia M M. Hesitant fuzzy geometric Bonferroni means[J]. Information Sciences, 2012, 205(1): 72-85.
- [15] Yager R R. On generalized Bonferroni mean operators for multi-criteria aggregation[J]. Int J of Approximate Reasoning, 2009, 50(8): 1279-1286.
- [16] Xu Z S, Yager R R. Intuitionistic fuzzy Bonferroni means[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 2011, 41(2): 568-578.
- [17] Dutta B, Guha D, Mesiar R. A model based on linguistic 2-tuples for dealing with heterogeneous relationship among attributes in multi-expert decision making[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2015, 23(5): 1817-1831.
- [18] Chen Z S, Chin K S, Li Y L, et al. On generalized extended bonferroni means for decision making[J]. IEEE Trans on Fuzzy System, 2016, 24(6): 1525-1543.
- [19] Choquet G. Theory of capacities[J]. Annales Del Institut Fourier, 1954, 5: 131-295.
- [20] Xu Z S. Choquet integrals of weighted intuitionistic fuzzy information[J]. Information Sciences, 2010, 180(5): 726-736.
- [21] 陈岩, 李庭. 基于Choquet积分的直觉不确定语言信息集结算子及其应用[J]. 控制与决策, 2016, 31(5): 842-852.  
(Chen Y, Li T. Intuitionistic uncertain linguistic information aggregation operators based on Choquet integral and their application[J]. Control and Decision, 2016, 31(5): 842-852.)
- [22] Liu X, Tao Z, Chen H, et al. A new interval-valued 2-tuple linguistic bonferroni mean operator and its application to multiattribute group decision making[J]. Int J of Fuzzy Systems, 2017, 19(1): 86-108.
- [23] Xu Z S. Fuzzy harmonic mean operators[J]. Int J of Intelligent Systems, 2009, 24(2): 152-172.
- [24] Xiong S H, Chen Z S, Li Y L, et al. On extending power-geometric operators to interval-valued hesitant fuzzy sets and their applications to group decision making[J]. Int J of Information Technology & Decision Making, 2016, 15(5): 1055-1114.
- [25] Xu Z S, Xia M M. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2011, 181(11): 2128-2138.
- [26] 钱芝网. BP神经网络及其在供应商选择评价中的应用[J]. 工业工程与管理, 2011, 16(3): 1-7.  
(Qian Z W. On the BP neural network and its application in supplier selection and evaluation[J]. Industrial Engineering and Management, 2011, 16(3): 1-7.)

(责任编辑: 齐 霁)