文章编号: 1001-0920(2018)02-0301-08　　**DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2016.1604

基于提前支付的非瞬时变质产品批量订货定价策略

曹　裕, 李业梅†, 李青松

(中南大学 商学院，长沙 410083)

摘　要: 当供应商处于供应链节点的买方市场时,通常要求零售商提前支付一定比例购置成本作为订金. 针对该问题研究零售商促销努力下存在随机需求的非瞬时变质产品批量订货定价策略,考虑零售商提前支付策略,允许部分缺货. 在一定条件下可得零售商最优补货周期和局部最优定价策略,随之提出相应的求解算法. 数值计算结果表明: 若提前支付购置成本占比或利率增大,则零售商利润将显著减少;提前支付期限和期数均对最优利润产生消极影响;零售商采取积极促销策略可有效提升自身利润.

关键词: 库存控制；提前支付；非瞬时变质产品；随机需求

中图分类号: F253.4　　**文献标志码:** A

Research on pricing and inventory lot-size policies for non-instantaneous deteriorating items with stochastic demand and promotional efforts based on advance payments

CAO Yu, LI Ye-mei†, LI Qing-song

(Business School，Central South University，Changsha 410083，China)

Abstract: For perishable products, when a supplier is in the buyer’s market of a supply chain node, it usually requires retailers to pay a certain proportion of purchase cost in advance as a deposit. The pricing and inventory lot-size policies for non- instantaneous deteriorating items with stochastic demand and promotional efforts are studied. The payment policy and shortage are considered. Under certain conditions, retailers get the optimal replenishment cycle and local optimal pricing strategy, and the corresponding solving algorithm is proposed. Numerical results show that, with the increase of the interest rate and proportion of advanced purchase cost payments, retailers’ profits will be reduced, the prepayment period and prepayments number both have negative influence on the optimal profit, actively promote sales strategies can effectively enhance retailers’ profits.

Keywords: inventory control；advance payments；non-instantaneous deteriorating product；stochastic demand

0　引　言

供应商、零售商是供应链的重要节点,也是连接生产与消费的桥梁和纽带,其间资金及产品安排直接影响零售商的销售环节,进而影响到消费者需求. 当供应商处于供应链节点的买方市场时,其通常要求零售商提前支付一定比例的购置款作为产品需求保证和周转资金安排生产. 对于零售商而言,虽然一定比例的提前支付资金可为其提供购置成本折扣及进货保证,但流动资金的部分搁置会产生信用成本,也为其资金周转及生产运作带来一定的风险. 因而,零售商为供应商预付订金金额占比及支付方式便成为零售商在批量订货决策中考虑的一个重要问题.

建立随机需求函数 $D(p)+\varepsilon$,假设随机干扰项 ε 独立于时间且分布确定. 文献 [1-7] 已采用随机需求函数建立了定价及库存控制模型,其共同点是库存变质率设置为产品到达零售商处即开始变质,而实际中,大多数产品在一定时长内无变质发生,Wu 等[8] 称此现象为“非瞬时变质”. 忽略非瞬时变质特性会使得零售商高估总相关成本,从而制定不合理的补货策略. 因此,库存管理中,考虑部分产品的非瞬时变质性非常重要. 目前,已有大量文献研究了非瞬时变质产品批量订货库存问题[9-12].

收稿日期: 2016-12-17；**修回日期:** 2017-03-31.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (71573281)；湖南省社会科学成果评审委员会重大课题 (XSP17ZDA011)；中南大学创新驱动项目 (2016CX040).

作者简介: 曹裕 (1985−), 女, 副教授, 博士, 从事食品安全社会治理、企业可持续运作管理、风险管理等研究；李业梅 (1994−), 女, 硕士生, 从事食品安全社会治理、企业可持续运作管理、风险管理的研究.

†通讯作者. E-mail: liyemei9496@csu.edu.cn

零售商的促销活动在商业界普遍存在,于零售商而言,促销策略相当重要,文献[13]研究发现,促销策略对利润产生显著影响,其在研究中分析了易变质商品的动态定价、促销努力下的补货策略. 本文中促销努力PE的成本函数即来自文献[13]. 在文献[13]的基础上, Maihami等[14]将促销成本函数扩展到随机需求角度. 在国内研究方面,文献[15]针对低碳背景下的供应链研发问题,探讨了促销与定价策略,文献[16]通过考虑零售商公平偏好而对促销努力激励机制进行了设计,从而求解相应的促销努力程度.

随着社会的不断进步,商品交易支付方式不断更新,零售商对供应商的不同支付方式决定了其资金成本的大小及融资能力. 目前,在易腐产品供应链研究中,以供应商交货为界,零售商支付购置款主要存在3种形式:一是零售商即时支付全部货款;二是零售商延迟付款[17-19];三是零售商预付部分货款. 本文研究与第3种情形相关,因而对此方面文献进行阐述. Zhang[20]认为,支付大量金额提前分期付款是非常有用的,并且提出了固定预付费用下的最优提前支付方案; Maiti等[21]研究了预付款对利润和库存决策的影响; Taleizadeh[22]主要针对易变质产品建立了EOQ模型,考虑了供应商在等量的多个分期获得部分购置款,零售商在交货期补充剩余货款,同时假设产品变质率恒定并考虑了完全缺货状态. 在上述研究的基础上,又构建了部分缺货及多期预付款并存的EOQ模型[23]. 之后, Teng等[24]将文献[22-23]提出的EOQ模型进行了改进,考虑允许部分延期及销售损失存在的提前支付问题,获得了最优补货策略.

综上所述,单独考虑支付方式,随机需求的瞬时变质产品EOQ研究已取得大量成果,本文主要在文献[13-14]的基础上,将提前支付因素及非瞬时变质产品特性考虑在内,探究促销努力与随机需求基础上的最优定价订货策略. 为契合实际,创新性地以复利形式计算资金时间价值,探讨零售商最优批量订货策略. 建立模型,对模型进行求解分析并得到相应的理论结果,提供相应的数值算例及敏感性分析并得出结论及政策建议.

1 模型设定

本节主要对本文用到的符号与假设进行说明.

1.1 符号说明

本文主要使用的符号如下所示: $O \geqslant 0$为单位订单定货成本; α为提前支付购置成本占比, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$; $b \geqslant 0$为单位失销成本; $s \geqslant 0$为单位缺货等待成本; $c \geqslant 0$为单位产品购置成本; $h \geqslant 0$为单位库存持有成本; r为资本成本年利率, $0 \leqslant r \leqslant 1$; $\theta(t)$为与时间有关的变质率, $0 \leqslant \theta(t) \leqslant 1$; $I(t)$为t时刻库存水平; $D(p)+\varepsilon$为市场需求函数; ρ为促销努力; S为最大积压需求; TP为单位时间总利润; Q为周期订货量; t_1为非缺货时长; T为订货周期, $T \geqslant t_1$; p为零售价格.

1.2 模型假设

本文在经典的EOQ模型基础上,考虑一类非瞬时变质产品批量订货定价决策、促销努力及零售商提前支付问题,因此在经典EOQ模型假设之上提出本文模型基本假设.

假设1 不考虑交货前置期和补货受限的情形,即零售商可以在任意时刻,以任意数量补货且交货前置期为0.

假设2 在补货周期$[0,T]$内,零售商不对易变质品进行更换或处理.

假设3 区分缺货积压和失销,且积压比例与补货等待时长呈负相关.

假设4 需求为$D(p)+\varepsilon$ (其中$D'(p)<0$,$D''(p) \leqslant 0$, $E(\varepsilon)=0$), ε为分布已知且独立于时间的随机变量[3,7].

假设5 促销时需求函数为$\rho(D(p)+\varepsilon)(\rho \geqslant 1)$,促销成本为$\mathrm{PE}=k(\rho-1)^2\Big(\int_0^T(D(p)+\varepsilon)\mathrm{d}t\Big)^\eta$. 其中: $k>0$, η为常数. 该形式描述了促销努力市场基础及促销努力成本的一般相关关系[13].

假设6 假设零售商在L年分n期等额支付α部分的购置成本,剩余的$1-\alpha$部分交货时支付.

2 模型建立

本节对非瞬时变质产品批量订货定价决策问题进行建模. 具体供应链上下游企业之间的关系如图1所示,零售商以周期T于供应商处进货,单位周期进货量Q,提前支付情形下,零售商L年n期向供应商支付等额金额AcQ/n,产生资本成本. 非瞬时变质品由供应商处到达零售商处,此时库存成本开始计算. 随之,非瞬时变质品进入销售环节,消费者以p的价格于零售商处购买商品. 销售阶段初期,产品不发生变质,需求介入,库存减少. 销售阶段中期,产品存在变质. 库存在需求及变质双重作用下减少,直至减少为0,此时零售商若未及时进货,则产生缺货成本,直至本周期结束,进入下一轮进货周期. 根据EOQ模型的基本建模思路,本文首先计算相应库存水平,之后构建利润函数,最终得到最优解.

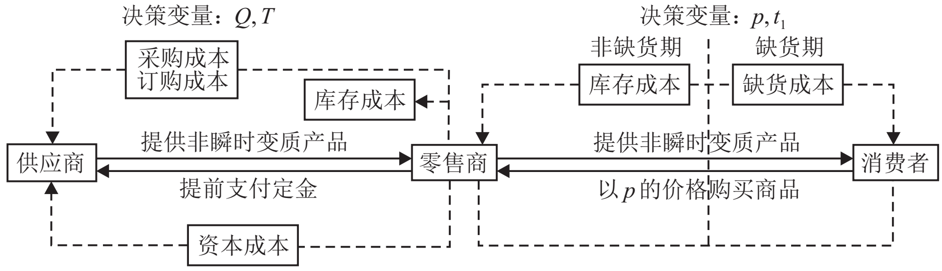

图1　基于提前支付的二级供应链决策流程

2.1　库存水平

基于文献[25],每周期进货量因需求及变质因素降低至0,之后发生缺货直至此周期结束进入下一补货周期. 假设无缺货时长大于不发生变质时长,即$t_1 > t_d$,在$[0,t_d]$内,库存水平仅仅因需求而降低. 之后,在$[t_d,t_1]$内,库存水平由需求及产品变质原因降低. 最终,在t_1后发生缺货,此时需求进入,部分失销,部分被积压,需求积压占比随等待时长的变化而变化,即缺货积压占比满足函数$\beta(x)=1/(1+\delta x)$(其中δ为正常数,x为下次补货前的等待时长).

在$[0,t_d]$时间内,库存随需求进入的变化如下:

$$\frac{\mathrm{d}I_1(t)}{\mathrm{d}t}=-\rho(D(p)+\varepsilon),\ 0\leqslant t\leqslant t_d. \tag{1}$$

取I_0为最大库存水平,有$I_1(0)=I_0$,则有

$$I_1(t)=-\rho(D(p)+\varepsilon)t+I_0. \tag{2}$$

在$[t_d,t_1]$时间间隔内,库存受到需求和变质率变化的微分方程如下:

$$\frac{\mathrm{d}I_2(t)}{\mathrm{d}t}+\theta I_2(t)=-\rho(D(p)+\varepsilon),t_d\leqslant t\leqslant t_1. \tag{3}$$

根据$I_2(t_1)=0$解得上式为

$$I_2(t)=\frac{\rho(D(p)+\varepsilon)}{\theta}(\mathrm{e}^{\theta(t_1-t)}-1). \tag{4}$$

又由$I_1(t_d)=I_2(t_d)$,可得

$$I_1(t)=\rho(D(p)+\varepsilon)\Big(\frac{[\mathrm{e}^{\theta(t_1-t)}-1]}{\theta}+t_d-t\Big),\quad 0\leqslant t\leqslant t_d. \tag{5}$$

在$[t_1,T]$间隔内,缺货发生,需求部分积压,此时库存变化的微分方程如下:

$$\frac{\mathrm{d}I_3(t)}{\mathrm{d}t}=-\rho(D(p)+\varepsilon)\beta(T-t)=-\frac{\rho(D(p)+\varepsilon)}{1+\delta(T-t)},\quad t_1\leqslant t\leqslant T. \tag{6}$$

由$I_3(t_1)=0,t=T$可得

$$S=-I_3(T)=-\frac{\rho(D(p)+\varepsilon)}{\delta}\ln[1+\delta(T-t_1)], \tag{7}$$

则总订货量Q为

$$Q=S+I_0=\rho(D(p)+\varepsilon)\Big\{\frac{1}{\theta}(\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}-1)+\frac{1}{\delta}\ln(1+\delta(T-t_1))+t_d\Big\}. \tag{8}$$

2.2　总利润函数

由库存水平可得库存成本及单周期销售收入,成本相关构成函数如下.

期望持有成本为

$$\mathrm{HC}=\mathrm{E}\Big[h\Big(\int_0^{t_d}I_1(t)\mathrm{d}t+\int_{t_d}^{t_1}I_2(t)\mathrm{d}t\Big)\Big]. \tag{9}$$

由需求积压引致的期望缺货成本为

$$\mathrm{SC}=\mathrm{E}\Big[s\Big(\int_{t_1}^{T}(-I_3(t))\mathrm{d}t\Big)\Big]. \tag{10}$$

由失销引致的期望机会成本为

$$\mathrm{OC}=\mathrm{E}\Big[b\Big(\int_{t_1}^{T}\rho(D(p)+\varepsilon)(1-\beta(T-t))\mathrm{d}t\Big)\Big]. \tag{11}$$

期望购货成本为

$$\mathrm{PC}=\mathrm{E}[cQ]. \tag{12}$$

如图2所示,零售商L年n期向供应商支付等额金额AcQ/n,周期长度L/n,则单位周期资本成本为

$$\mathrm{CC}=\frac{\alpha}{rL}\Big[\Big(1+\frac{rL}{n}\Big)^n-1\Big]\mathrm{PC}. \tag{13}$$

期望销售收入为

$$\mathrm{SR}=\mathrm{E}\Big[p\Big(\int_0^{t_1}\rho(D(p)+\varepsilon)\mathrm{d}t+S\Big)\Big]. \tag{14}$$

期望促销成本为

$$\mathrm{PE}=\mathrm{E}\Big[k(\rho-1)^2\Big(\int_0^{T}(D(p)+\varepsilon)\mathrm{d}t\Big)^{\eta}\Big]. \tag{15}$$

因此单位时间的总利润函数为

$$\begin{aligned}&\mathrm{TP}(p,t_1,T)=\\&\frac{\mathrm{SR}-O-\mathrm{HC}-\mathrm{SC}-O\mathrm{C}-\mathrm{PC}-\mathrm{CC}}{T}=\\&\frac{1}{T}\Big\{\rho D(p)\Big\{(p+h+s+b)t_1-\Big[h\Big(\frac{1}{2}t_d+1\Big)+\\&c\Big(1+\frac{\alpha}{rL}\Big(\Big(1+\frac{rL}{n}\Big)^n-1\Big)\Big)\Big]t_d-(s+b)T-\\&\frac{1}{\theta}(\mathrm{e}^{(t_1-t_d)}-1)\Big[h(t_d+1)+\\&c\Big(1+\frac{\alpha}{rL}\Big(\Big(1+\frac{rL}{n}\Big)^n-1\Big)\Big)\Big]+\end{aligned}$$

$$\frac{p+s+b-c\Big(1+\dfrac{\alpha}{rL}\Big(\Big(1+\dfrac{rL}{n}\Big)^n-1\Big)\Big)}{\delta}\times$$
$$\ln[1+\delta(T-t_1)]\Big\}-k(\rho-1)^2[D(p)T]^\eta-O\Big\}. \tag{16}$$

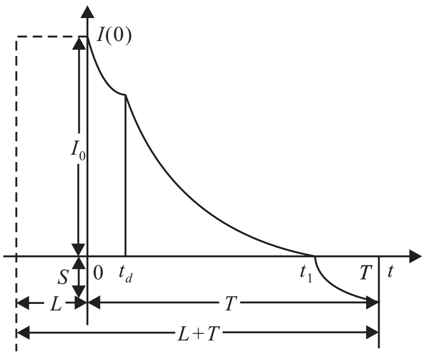

图 2 库存系统模型

3 模型求解

3.1 补货策略

第2节建立的总利润函数TP(p,t_1,T)是关于p, t_1,T的函数,为求得函数TP(p,t_1,T)的最优解,首先固定产品价格p,得到缺货时长与订货周期,使得总利润达到最大,即满足

$$\frac{\partial \mathrm{TP}(p,t_1,T)}{\partial t_1}=0,\ \frac{\partial \mathrm{TP}(p,t_1,T)}{\partial T}=0.$$

计算可得

$$\frac{\partial \mathrm{TP}(p,t_1,T)}{\partial t_1}=$$
$$\frac{\rho D(p)}{T}\Big\{(p+h+s+b)-\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}\Big[h(t_d+1)+$$
$$c\Big(1+\frac{\alpha}{rL}\Big(\Big(1+\frac{rL}{n}\Big)^n-1\Big)\Big)\Big]-$$
$$\frac{p+s+b-c\Big(1+\dfrac{\alpha}{rL}\Big(\Big(1+\dfrac{rL}{n}\Big)^n-1\Big)\Big)}{1+\delta(T-t_1)}\Big\}=0. \tag{17}$$

$$\frac{\partial \mathrm{TP}(p,t_1,T)}{\partial T}=$$
$$\frac{\rho D(p)}{T^2}\Big\{-(p+h+s+b)t_1+$$
$$\Big[h\Big(\frac{1}{2}t_d+1\Big)+c\Big(1+\frac{\alpha}{rL}\Big(\Big(1+\frac{rL}{n}\Big)^n-1\Big)\Big)\Big]t_d+$$
$$\frac{1}{\theta}(\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}-1)\Big[h(t_d+1)+$$
$$c\Big(1+\frac{\alpha}{rL}\Big(\Big(1+\frac{rL}{n}\Big)^n-1\Big)\Big)\Big]+$$
$$\Big[p+s+b-c\Big(1+\frac{\alpha}{rL}\Big(\Big(1+\frac{rL}{n}\Big)^n-1\Big)\Big)\Big]\times$$
$$\Big[\frac{T}{1+\delta(T-t_1)}-\frac{1}{\delta}\ln(1+\delta(T-t_1))\Big]\Big\}+$$
$$\frac{1}{T^2}[k(\rho-1)^2(1-\eta)(D(p)T)^\eta+O]=0. \tag{18}$$

令$M=c\Big(1+\dfrac{\alpha}{rL}\Big(\Big(1+\dfrac{rL}{n}\Big)^n-1\Big)\Big)$, $N=h(t_d+1)+M$,由式(17)可得

$$T=t_1+\frac{N\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}-(h+M)}{\delta[(p+h+s+b)-N\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}]}. \tag{19}$$

由于$T>t_1$,则$\dfrac{N\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}-(h+M)}{(p+h+s+b)-N\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}}>0$,又知$N\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}-(h+M)=h[(t_d+1)\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}-1]>0$,即只需$(p+h+s+b)-N\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}>0$即可,则有

$$t_1<t_d+\frac{1}{\theta}\ln\frac{p+h+s+b}{N}\equiv t_2, \tag{20}$$

即此时有$t_d\leqslant t_1<t_2$.

将式(19)代入(18)可得

$$\rho D(p)\Big\{-Nt_1\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}+\frac{N}{\theta}(\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}-1)+$$
$$\Big[h\Big(\frac{1}{2}t_d+1\Big)+M\Big]t_d+\frac{1}{\delta}\Big[\mathrm{N}\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}-(h+M)\Big]-$$
$$\frac{p+s+b-M}{\delta}\ln\frac{p+s+b-M}{p+s+b+h-N\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}}\Big\}+$$
$$O+k(\rho-1)^2(1-\eta)\Big[D(p)\Big(t_1+$$
$$\frac{N\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}-(h+M)}{\delta((p+h+s+b)-N\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)})}\Big)\Big]^\eta=0, \tag{21}$$

令

$$f(t_1)=$$
$$\rho D(p)\Big\{-Nt_1\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}+\frac{N}{\theta}(\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}-1)+$$
$$\Big[h\Big(\frac{1}{2}t_d+1\Big)+M\Big]t_d+\frac{1}{\delta}[N\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}-(h+M)]-$$
$$\frac{p+s+b-M}{\delta}\ln\frac{p+s+b-M}{p+s+b+h-N\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}}\Big\}+$$
$$O+k(\rho-1)^2(1-\eta)\Big[D(p)\Big(t_1+$$
$$\frac{N\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}-(h+M)}{\delta((p+h+s+b)-N\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)})}\Big)\Big]^\eta, \tag{22}$$

则当$t_d\leqslant t_1<t_2$时,有

$$f'(t_1)=$$
$$-\rho D(p)\theta Nt_1\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}\Big[t_1+$$
$$\frac{N\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}-(h+M)}{\delta((p+h+s+b)-N\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)})}\Big]+$$
$$k(\rho-1)^2(1-\eta)\eta\times D(p)\Big[D(p)\Big(t_1+$$
$$\frac{N\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}-(h+M)}{\delta((p+h+s+b)-N\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)})}\Big)\Big]^{\eta-1}\times$$
$$\Big[1+\frac{(p+s+b-M)\theta N\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}}{\delta((p+h+s+b)-N\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)})^2}\Big]. \tag{23}$$

由于$\eta\geqslant 1$,当$t_1\in[t_d,t_2)$时,有$f'(t_1)<0$,即可知$f(t_1)$在$[t_d,t_2)$上单调递减.

又知 $\lim\limits_{t_1\to t_2} f(t_1)=-\infty$,故

$$f(t_d)=\rho D(p)\Big\{-\frac{h}{2}t_d^2+\frac{h}{\delta}t_d-\frac{p+s+b-M}{\delta}\times\ln\frac{p+s+b-M}{p+s+b-M-ht_d}\Big\}+k(\rho-1)^2(1-\eta)\Big[D(p)t_d+\frac{ht_d}{\delta(p+s+b-M-ht_d)}\Big]^\eta+O. \quad (24)$$

令 $g(p)=f(t_d)$,则可得到如下结论.

定理1 对于任意给定的产品价格p,有:

1) 如果$g(p)\geqslant 0$,则总利润$\mathrm{TP}(p,t_1,T)$是凹函数,并且存在唯一满足方程(17)和(18)的解,使得$\mathrm{TP}(p,t_1,T)$在(t_1^*,T^*)获得局部最大值;

2) 如果$g(p)<0$,则存在$t_1^*=t_d,T^*=t_d+\dfrac{ht_d}{\delta(p+s+b-M-ht_d)}$,使得$\mathrm{TP}(p,t_1,T)$在$(t_1^*,T^*)$获得局部最优解.

3.2 价格策略

在3.1节中,对于任意给定的产品价格,可得无缺货时长t_1^*和最优补货周期T^*.下面讨论给定t_1^*、T^*,最优销售价格p^*存在的条件.

对于任意给定的t_1^*、T^*, $\mathrm{TP}(p,t_1^*,T^*)$对价格求一阶导可得

$$\frac{\partial \mathrm{TP}(p,t_1^*,T^*)}{\partial p}=\frac{\rho D'(p)}{T^*}\Big\{(p+h+s+b)t_1^*-\Big[h\Big(\frac{1}{2}t_d+1\Big)+M\Big]t_d-(s+b)T^*-\frac{N}{\theta}(\mathrm{e}^{\theta(t_1^*-t_d)}-1)+\frac{p+s+b-M}{\delta}\ln(1+\delta(T^*-t_1^*))\Big\}+\frac{\rho D(p)}{T^*}\Big\{\Big[t_1^*+\frac{1}{\delta}\ln(1+\delta(T^*-t_1^*))\Big]-k(\rho-1)^2\eta T^*D(p)D'(p)\Big\}=0. \quad (25)$$

$\mathrm{TP}(p,t_1^*,T^*)$对价格求二阶导可得

$$\frac{\partial \mathrm{TP}^2(p,t_1^*,T^*)}{\partial p^2}=\frac{1}{T^*}[\rho(p+h+s+b)D''(p)+2\rho D'(p)]\times[t_1^*+\ln(1+\delta(T^*-t_1^*))]+\frac{\rho D''(p)}{T^*}\Big\{-\frac{h+M}{\delta}\times\ln(1+\delta(T^*-t_1^*))-\Big[h\Big(\frac{1}{2}t_d+1\Big)+M\Big]t_d-(s+b)T^*-\frac{N}{\theta}(\mathrm{e}^{\theta(t_1-t_d)}-1)\Big\}-k(\rho-1)^2\eta(D(p))^{\eta-2}\times T^{*\eta}[(\eta-1)(D'(p))^2+D(p)D''(p)], \quad (26)$$

其中$D'(p)$和$D''(p)$分别表示需求函数$D(p)$的一阶导数和二阶导数. 根据已知参数的假设条件可判断$\dfrac{\partial \mathrm{TP}^2(p,t_1^*,T^*)}{\partial p^2}<0$,可知$\mathrm{TP}(p,t_1^*,T^*)$为凹函数,则有如下结论.

定理2 对于任意给定的产品价格(t_1^*,T^*),存在唯一最优销售价格p^*满足式(22).

证明 因为$\mathrm{TP}(p,t_1^*,T^*)$对p的二阶导数小于零,所以$\mathrm{TP}(p,t_1^*,T^*)$为凹函数,因此存在唯一的p满足方程(22). □

通过解方程(22)即可得到p^*. 下面结合定理1和定理2,提出一个简单的求解算法来获得p^*,t_1^*,T^*.

Step 1: 令初值$p_j=p_1$.

Step 2: 对于给定的p_j,计算

$$g(p_j)=\rho D(p_j)\Big\{-\frac{h}{2}t_d^2+\frac{h}{\delta}t_d-\frac{p_j+s+b-M}{\delta}\times\ln\frac{p_j+s+b-M}{p_j+s+b-M-ht_d}\Big\}+k(\rho-1)^2(1-\eta)\times\Big[D(p_j)t_d+\frac{ht_d}{\delta(p_j+s+b-M-ht_d)}\Big]^\eta+O. \quad (27)$$

1) 如果$g(p_j)\geqslant 0$,则计算式(17)和(18)得到(t_1^*,T^*),将(t_1^*,T^*)代入式(22)得到p_{j+1},转到Step 3;

2) 如果$g(p_j)<0$,则存在$t_1^*=t_d,T^*=t_d+\dfrac{ht_d}{\delta(p_j+s+b-M-ht_d)}$,将$(t_1^*,T^*)$代入式(25)得到$p_{j+1}$,转到Step 3.

Step 3: 如果p_j,p_{j+1}之差绝对值足够小,不妨取$|p_j-p_{j+1}|\leqslant 1.0\times 10^{-4}$,则$p^*=p_{j+1}$,即得到最优解$p^*,t_1^*,T^*$,停止;否则$j=j+1$,转到Step 2.

通过上述算法可得利润函数最优解(p^*,t_1^*,T^*),从而根据式(8)得到最优Q^*,根据式(16)得到最优TP^*.

定理3 (p^*,t_1^*,T^*)是总利润函数$\mathrm{TP}(p,t_1,T)$的唯一最优解.

证明 反证法. 如果(p^*,t_1^*,T^*)只是利润函数$\mathrm{TP}(p,t_1,T)$的局部最优解,则$\mathrm{TP}(p,t_1,T)$存在全局最优解(p^{**},t_1^{**},T^{**}),其中$p^{**}\neq p^*$,或者$t_1^{**}\neq t_1^*$,或者$T^{**}\neq T^*$. 对于p^{**},若$g(p^{**})\geqslant 0$,则有最优缺货时长t_1^{**}及最优订货周期T^{**}满足二阶条件是负定的,由定理1中1)的唯一性可知$t_1^{**}=t_1^*$且$T^{**}=T^*$,再由定理2可知$p^{**}=p^*$,与假设矛盾;若$g(p^{**})<0$,则$\mathrm{TP}(p,t_1,T)$是关于p的一元函数,由定理1中2)和定理2可知(p^*,t_1^*,T^*)是唯一最优解. 因此(p^*,t_1^*,T^*)是全局唯一的最优解. □

4 数值分析

本节根据第3节模型最优解计算算法对本文提出的模型进行数值分析. 根据文献[14]的设置并结合本文研究,选取单位订单定货成本$O = 5$元,单位产品购置成本$c = 4$元,单位库存持有成本$h = 1$元,单位需求积压成本$s = 1.5$元,单位失销成本$b = 3.5$元,促销努力$\rho = 2$,产品变质率$\theta = 0.5$,产品非变质时长$t_d = 0.2$年,提前支付购置成本占比$\alpha = 0.8$,资本成本年利率$r = 0.3$,提前支付等额付款期数$n = 5$,预付款支付的时间长度$L = 2$年,随机需求函数$D(p) = 40 - 0.8p + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0,1), k = 2, \eta = 1$,缺货积压占比$\beta(x) = 1/(1 + 0.2x)$.

4.1 提前支付因素对决策变量及最优利润的影响

根据模型求解算法,设置产品初始价格$p_1 = 20$元,根据定理1～定理3可得,最优库存无缺货时间$t_1^* = 0.499\,7$年,最优补货周期$T^* = 0.598\,0$年,最优销售价格$p^* = 29.639\,8$元,最优订货量$Q^* = 19.597\,3$单位,最优利润$\mathrm{TP}^* = 670.560\,5$元.

图3为利率变化对决策变量的影响趋势. 由图3可知,随着资本回报率由10％递增,零售商最优价格上升,其最优非缺货时长、补货周期、订货量及最优总利润均呈下降趋势. 利率的提升直接影响到提前支付零售商主体提前支付资金的机会成本,因而在提前支付成本代价提高之时,零售商倾向于缩短补货周期及减少订货量,加快资金及存货的流动,以降低预付账款的机会成本. 由于成本的上升,零售商不得不提高产品价格以弥补成本对其利润带来的消极影响. 由于产品性质,外界促销条件等并未发生改变,消费者并不认可其价格的上涨,因而,此时最优价格的上涨并不能完全弥补资本成本提升对其总利润的消极影响,价格上涨引致的需求量的下降对总利润的影响更为显著. 由此,利率上升对零售商的利润影响重大.

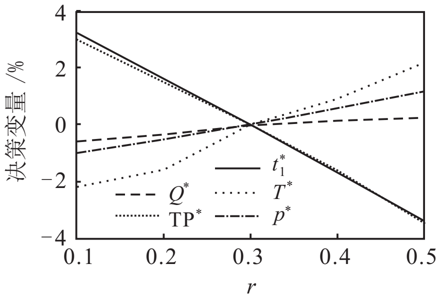

图 3 利率对决策变量的影响趋势

图4显示了不同提前支付购置成本占比给零售商决策带来的影响. 由图4可知,随着提前支付购置成本占比的递增,产品最优零售价格递增,产品销售数量减少,零售商库存无缺货时长和补货周期缩短,总利润减少. 究其原因,在于提前支付购置成本占比的递增,一定程度上增加了零售商的资本成本,其不得不提高零售价格以弥补成本上升带来的损失,但价格上升引致需求量的下降,由于产品需求的价格弹性较大,涨价引致的需求量的显著下降对利润的负效应超过价格上升带来的正效应,从而带来了利润的下降. 在此情形下,零售商应尽可能地减少非缺货时长、订货周期、订货量,以最大可能地限制库存成本、缺货成本上升引致的负效应.

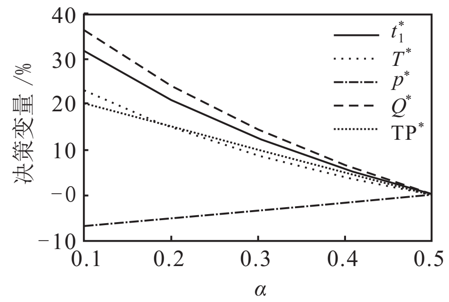

图 4 提前支付占比对决策变量的影响趋势

图5显示了不同预付款支付时长变化对零售商最优决策的影响. 由图5可知,随着预付款时长的延长,零售商总利润逐渐减小,产品销售价格上升,订购量减小,库存无缺货时间和补货周期缩短. 表明提前支付期限越长,零售商为此而产生的资本成本越高,其引致价格上升所带来的需求量的锐减将影响整体收益,因此在选取提前支付期限时,应尽可能根据实际情况,在保证正常运营的前提下缩短支付期限.

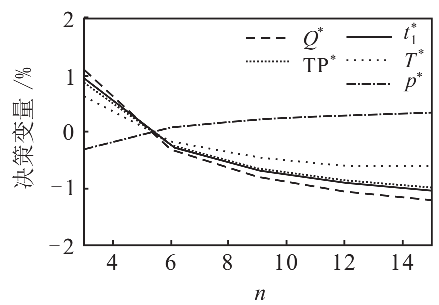

图 5 提前支付时长对决策变量的影响趋势

图6描述了预付款期数对决策变量的影响趋势,随着预付款期数的增加,零售商总利润逐渐减小,产品销售价格上升,订购量减小,库存非缺货时长和补货周期缩短. 预付款期数的增加意味着供应链系统对零售商的流动资金要求提高,零售商不得不持有大量流动资金以准时在每期末缴纳部分预付款. 流动资金持有量的增加意味着资金机会成本的增加,因而零售商不得不抬高价格以应对系统对其资金的流动

性要求. 未建立于产品改良基础的价格提高,势必引致销售量的下降,即订购量减少,进而引致总利润的下降. 资金成本的提高也对缺货水平控制提出了新的要求,此种情形下,最优非缺货时长及补货周期随预付款期数增加呈下降趋势,以控制库存损耗成本.

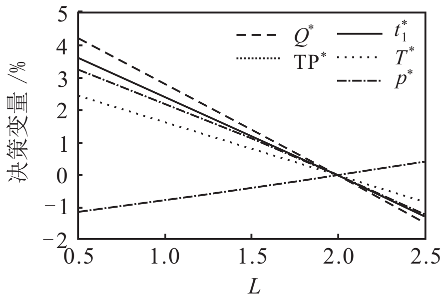

图 6　预付款期数对决策变量的影响趋势

4.2　促销努力对决策变量及最优利润的影响

本小节基准数据取值与上一小节相同,以下将对促销努力系数变化对决策变量及最优利润的影响进行分析.

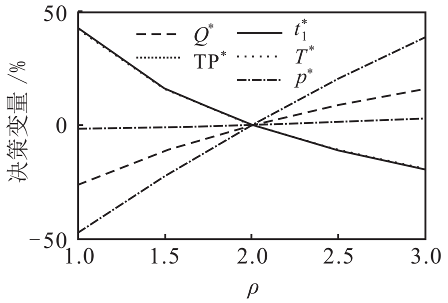

图 7　促销努力系数对决策变量的影响趋势

图7描述了促销努力系数对决策变量的影响趋势,随着产品促销努力的不断提升,零售商总利润逐渐上升,且产品销售价格和订购量总体逐渐增大,同时零售商库存无缺货时间和补货周期缩短. 由促销成本的函数形式可知,促销成本增加率随促销努力的增加逐渐变大,因此,在促销初期,促销成本可忽略不计的前提下,其带来的需求量的微增及需求的价格弹性系数的增大会带动最优价格的下降,此时价格下降引致的需求量递增所带来的利润增加显著大于价格下降对利润的消极影响. 随着促销努力逐渐增加,促销努力引致的成本上升使得零售商不得不提高价格以弥补促销成本的上升,然而由于促销努力上升引致的消费者意愿支付价格的上升,加之促销努力引致消费者对产品所形成的锚定效应,一定程度上降低了产品需求的价格弹性,使得消费者此时对产品的需求并不会因价格的上升而减少,因此,销售量、订货量、非缺货时长、订货周期都呈现下降趋势,利润显著上升. 由此可得,促销在零售商经营活动中至关重要,适当的促销可显著增加零售商的经营利润.

5　结　论

本文主要研究了随机市场需求环境下,非瞬时变质产品的最优定价和补货策略,考虑了零售商提前支付和促销策略,文中随机需求依赖于产品价格,允许部分缺货. 研究结果表明,在一定条件下,由利润最大化策略可得零售商最优补货策略和最优决策价格,并提出了相应的求解算法. 数值计算结果表明,零售商采取积极促销策略可有效提升自身利润,提前支付购置成本占比增大或资本利率提高,则零售商利润显著减少. 提前支付期限和期数均对其最优利润产生影响. 零售商的提前支付不仅会给其带来一定的运营风险,还在一定程度上增加其资本成本,基于此,零售商应采取积极灵活的策略,与供应商开展战略合作伙伴关系,通过库存质押等不同的融资创新方式,尽可能减少资本成本对利润的负面影响. 另外,零售商应重视促销努力的积极作用,其不仅因触发消费者对产品积极评价的锚定效应,显著提高了消费者的意愿支付价格,还在一定程度上增加了消费者的总需求. 以上两点共同作用下,显著增加了零售商的销售收入,减少了库存成本,进而引致其利润的大幅上升. 本文中,由零售商升级库存水平引致的非变质时长的延长在一定程度上增加了零售商的成本,降低了其利润. 因此,市场竞争环境下,难以激励零售商对库存技术进行升级,市场失灵. 然而,由库存升级所带来的正外部性对整个社会福利的提升意义重大,因此,建议政府通过升级补贴或相关产业减税等方式,激励正的外部性行为,使得社会向卡希改进方向发展,避免出现优质产品被劣质产品取代的格雷欣现象. 进一步研究可考虑延期支付方式下非瞬时变质产品批量订购模型,以及供应链中供应商与零售商之间的协调问题.

参考文献(References)

[1] Federgruen A, Heching A. Combined pricing and inventory control under uncertainty[J]. Operations Research, 1999, 47(3): 454-475.

[2] Wee H M. Joint pricing and replenishment policy for deteriorating inventory with declining market[J]. Int J of Production Economics, 1995, 40(2/3): 163-171.

[3] Chen X, Simchi-Levi D. Coordinating inventory control and pricing strategies with random demand and fixed ordering cost: The finite horizon case[J]. Operations Research, 2004, 52(6): 887-896.

[4] Song H, Ran L, Shang J. Multi-period optimization with loss-averse customer behavior: Joint pricing and

inventory decisions with stochastic demand[J]. Expert Systems with Applications, 2017, 72: 421-429.

[5] Li Y, Zhang S, Han J. Dynamic pricing and periodic ordering for a stochastic inventory system with deteriorating items[J]. Automatica, 2017, 76: 200-213.

[6] Bakker M, Riezebos J, Teunter R H. Review of inventory systems with deterioration since 2001[J]. European J of Operational Research, 2012, 221(2): 275-284.

[7] Chao X, Yang B, Xu Y. Dynamic inventory and pricing policy in a capacitated stochastic inventory system with fixed ordering cost[J]. Operations Research Letters, 2012, 40(2): 99-107.

[8] Wu K S, Ouyang L Y, Yang C T. An optimal replenishment policy for non-instantaneous deteriorating items with stock-dependent demand and partial backlogging[J]. Int J of Production Economics, 2006, 101(2): 369-384.

[9] Chang C T, Teng J T, Goyal S K. Optimal replenishment policies for non-instantaneous deteriorating items with stock-dependent demand[J]. Int J of Production Economics, 2010, 123(1): 62-68.

[10] Dye C Y. The effect of preservation technology investment on a non-instantaneous deteriorating inventory model[J]. Omega, 2013, 41(5): 872-880.

[11] Zhang J, Wang Y, Lu L, et al. Optimal dynamic pricing and replenishment cycle for non-instantaneous deterioration items with inventory-level-dependent demand[J]. Int J of Production Economics, 2015, 170: 136-145.

[12] Ghoreishi M, Weber G W, Mirzazadeh A. An inventory model for non-instantaneous deteriorating items with partial backlogging, permissible delay in payments, inflation-and selling price-dependent demand and customer returns[J]. Annals of Operations Research, 2015, 226(1): 221-238.

[13] Tsao Y C, Sheen G J. Dynamic pricing, promotion and replenishment policies for a deteriorating item under permissible delay in payments[J]. Computers & Operations Research, 2008, 35(11): 3562-3580.

[14] Maihami R, Karimi B. Optimizing the pricing and replenishment policy for non-instantaneous deteriorating items with stochastic demand and promotional efforts[J]. Computers & Operations Research, 2014, 51: 302-312.

[15] 游达明, 朱桂菊. 低碳供应链生态研发、合作促销与定价的微分博弈分析[J]. 控制与决策, 2016, 31(6): 1047-1056.
(You D M, Zhu G J. Differential game analysis of ecological R&D, cooperative promotion and pricing in the low-carbon supply Chain[J]. Control and Decision, 2016, 31(6): 1047-1056.)

[16] 浦徐进, 龚磊, 张兴. 考虑零售商公平偏好的促销努力激励机制设计[J]. 系统工程理论与实践, 2015, 35(9): 2271-2279.
(Pu X J, Gong L, Zhang X. The incentive mechanism design for promotion effort considering the retailer’s fairness preference[J].Systems Engineering—Theory & Practice, 2015, 35(9): 2271-2279.)

[17] Jaggi C, Sharma A, Tiwari S. Credit financing in economic ordering policies for non-instantaneous deteriorating items with price dependent demand under permissible delay in payments: A new approach[J]. Int J of Industrial Engineering Computations, 2015, 6(4): 481-502.

[18] 刚号, 唐小我, 慕银平. 延期支付下考虑应收帐款率目标的供应商最优运作策略与协调研究[J]. 管理工程学报, 2014(2): 114-119.
(Gang H, Tang X W, Mu Y P. Research on supplier’s optimal operation strategy and co-ordination under delay in payment considering setting account receivable ratio[J]. J of Industrial Engineering and Engineering Management, 2014 (2): 114-119.)

[19] Ting P S. Comments on the EOQ model for deteriorating items with conditional trade credit linked to order quantity in the supply chain management[J]. European J of Operational Research, 2015, 246(1): 108-118.

[20] Zhang A X. Optimal advance payment scheme involving fixed per-payment costs[J]. Omega, 1996, 24(5): 577-582.

[21] Maiti A K, Bhunia A K, Maiti M. Some inventory problems via genetic algorithms[D]. West Bengal: Department of Mathematics, Vidyasagar University, 2007.

[22] Taleizadeh A A. An economic order quantity model for deteriorating item in a purchasing system with multiple prepayments[J]. Applied Mathematical Modelling, 2014, 38(23): 5357-5366.

[23] Taleizadeh A A. An EOQ model with partial backordering and advance payments for an evaporating item[J]. Int J of Production Economics, 2014, 155: 185-193.

[24] Teng J T, Cárdenas-Barrón L E, Chang H J, et al. Inventory lot-size policies for deteriorating items with expiration dates and advance payments[J]. Applied Mathematical Modelling, 2016, 40(19): 1-12.

[25] Yang C T, Ouyang L Y, Wu H H. Retailer’s optimal pricing and ordering policies for non-instantaneous deteriorating items with price-dependent demand and partial backlogging[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2009, 2009: 1-18.

（责任编辑：闫　妍）