

基于正交变换的改进CKF算法

秦 康, 董新民, 陈 勇[†], 刘棕成, 李洪波

(空军工程大学 航空航天工程学院, 西安 710038)

摘 要: 为了解决容积卡尔曼滤波(CKF)算法在处理高维问题时出现的非局部采样问题, 提出基于采样点正交变换的改进CKF算法(TCKF). 从数值积分近似角度导出无迹卡尔曼滤波(UKF)和CKF两种近似滤波算法, 并指出CKF只是UKF的一个特例; 基于多元Taylor级数展开分析, 揭示CKF在克服UKF数值不稳定性问题的同时, 引入非局部采样问题; 对Cubature点集进行正交变换得到TCKF算法, 并从理论上证明, 在高维、强非线性等非局部采样问题突出的滤波模型中, TCKF具有比CKF更高的估计精度. 仿真实例验证了所提出算法的有效性.

关键词: 非局部采样; 数值积分准则; 正交变换; 容积卡尔曼滤波

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Modified CKF algorithm based on orthogonal transformation

QIN Kang, DONG Xin-min, CHEN Yong[†], LI Zong-cheng, LI Hong-bo

(College of Aeronautics and Astronautics Engineering, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

Abstract: In order to solve the nonlocal sampling problem inherent in the cubature kalman filter(CKF) algorithm for high dimensional problems, a methodology based on orthogonal transformation on the cubature points is proposed. Firstly, the unscented Kalman filter(UKF) algorithm and CKF algorithm are deduced from the perspective of numerical integration in the gaussian filtering framework, and it is pointed out that the CKF is virtually a special case of the UKF. Then, the performance of the unscented transform(UT) is analyzed based on the multi-dimensional Taylor series, it reveals that the problem of numerical instability of the UKF can be solved by using the CKF, meanwhile the nonlocal sampling problem is introduced. Finally, through the orthogonal transformation of the sampling point in the CKF algorithm, the TCKF algorithm is derived. It is proved theoretically that the TCKF algorithm has higher estimation accuracy than the CKF algorithm in the high-dimensional and strongly nonlinearity situation where local sampling problems are prominent. simulation examples verify the effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords: nonlocal sampling; numerical integration formulas; orthogonal transformation; CKF

0 引 言

高斯滤波算法通过对递归贝叶斯估计中各概率密度的高斯分布进行近似, 并采用线性卡尔曼滤波框架对各类数值积分进行近似, 实现了对状态均值和方差的估计. 基于“对概率分布进行近似要比对非线性函数进行近似容易”的认识, 发展出包括高斯-埃尔米特卡尔曼滤波(GHKF)^[1]、无迹卡尔曼滤波(UKF)^[2]、差分滤波(DDF)^[3]、容积卡尔曼滤波(CKF)^[4]在内的多种次优非线性滤波方法.

为扑捉无迹变换(UT)传递均值和方差中更多的高阶矩信息, 基于对称采样的UKF算法可调参数 κ 往往设置为 $\kappa = 3 - n$, n 表示系统状态维数. 但是, 对

于高维系统($n > 3$), κ 为负值, 这容易引起UT传递方差的非正定问题, 导致滤波算法的数值不稳定. 为了解决这一问题, Arasaratnam从数值积分角度导出了基于容积变换(CT)的CKF算法, 证明了CKF较传统UKF具有更高的滤波精度和理论上的严格性^[4]. 实际上, 将基于对称采样的UKF算法中的可调参数置为零, 即可得到CKF算法, 这说明CKF是基于对称采样的UKF算法的一个特例.

CKF保证能够传递方差阵的正定性, 但采样时需要对方差矩阵乘以系数 \sqrt{n} , 随着 n 的增大, 采样点距中心点的距离增大, 易出现非局部采样问题, 进而影响滤波算法的精度. 即, CKF虽然解决了传统

收稿日期: 2016-12-03; 修回日期: 2017-03-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61304120, 61473307, 61603411); 航空科学基金项目(20155896026).

作者简介: 秦康(1992—), 男, 博士生, 从事多导航、制导与控制的研究; 董新民(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事飞行器控制理论及运用等研究.

[†]通讯作者. E-mail: chen_y043@163.com

UKF的数值不稳定问题,但同时引入了非局部采样问题.那么,是否有一种方法既可以克服UKF算法的数值不稳定问题,同时又能够避免非局部采样问题呢?

本文从数值积分角度出发,对现有CKF算法中的采样点进行正交变换,导出一组新的采样点,将这组新的采样点应用于高斯滤波框架中既不存在数值不稳定问题,也不存在非局部采样问题.所得到的滤波算法在非局部采样问题影响明显的系统模型中具有更高的估计精度,且算法的计算量与传统CKF算法相当.

1 CKF的数值积分导出

考虑如下基于单位高斯分布权函数的数值积分公式^[5-6]:

$$I[g(\mathbf{x})] = \int (\mathbf{x}) \cdot N(\mathbf{x}; 0, \mathbf{I}) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N w_i g(\xi_i). \quad (1)$$

假设用以下 $2n$ 个加权采样点构造 $I[g(\mathbf{x})]$ 的3阶精度的数值积分近似:

$$\begin{cases} \xi^{(1,j)} = \xi_{1,j} \mathbf{e}_1 w_{1,j}, \\ \xi^{(2,j)} = \xi_{2,j} \mathbf{e}_2 w_{2,j}, \\ \vdots \\ \xi^{(n,j)} = \xi_{n,j} \mathbf{e}_n w_{n,j}, \end{cases} \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

其中 \mathbf{e}_i 表示除第 i 个分量为1外,其他分量全为零的 n 维向量.式(2)满足以下关系:

$$I[\mathbf{x}_i^m] = w_{i,1}(\xi_{i,1})^m + w_{i,2}(\xi_{i,2})^m, \quad m = 1, 2, 3; \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n (w_{i,1} + w_{i,2}) = 1. \quad (4)$$

其中标量 \mathbf{x}_i 表示向量 \mathbf{x} 的第 i 个分量.式(4)可以进一步写为

$$w_{i,1} + w_{i,2} = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (5)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1. \quad (6)$$

积分的欧几里得空间和高斯权函数都是完全对称的,因此由式(1)可得

$$m_{i,1} = I[\mathbf{x}_i^1] = \int \mathbf{x}_i^1 \cdot N(\mathbf{x}; 0, \mathbf{I}) d\mathbf{x} = 0, \quad (7)$$

$$m_{i,2} = I[\mathbf{x}_i^2] = \int \mathbf{x}_i^2 \cdot N(\mathbf{x}; 0, \mathbf{I}) d\mathbf{x} = 1, \quad (8)$$

$$m_{i,3} = I[\mathbf{x}_i^3] = \int \mathbf{x}_i^3 \cdot N(\mathbf{x}; 0, \mathbf{I}) d\mathbf{x} = 0. \quad (9)$$

由式(3)、(7)和(8)可得

$$w_{i,1} = \frac{m_{i,2} - m_{i,1}\xi_{i,2}}{\xi_{i,1}^2 - \xi_{i,1}\xi_{i,2}} = \frac{1}{\xi_{i,1}^2 - \xi_{i,1}\xi_{i,2}}, \quad (10)$$

$$w_{i,2} = \frac{m_{i,2} - m_{i,1}\xi_{i,1}}{\xi_{i,2}^2 - \xi_{i,1}\xi_{i,2}} = \frac{1}{\xi_{i,2}^2 - \xi_{i,1}\xi_{i,2}}. \quad (11)$$

令 $m_{i,0} = \lambda_i$,并定义如下函数:

$$L_i(\mathbf{x}_i^k) = m_{i,k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (12)$$

则对应于 L_i 的2阶正交多项式可以表示为

$$p_i(\mathbf{x}_i) = \begin{bmatrix} m_{i,0} & 0 & 1 \\ 0 & m_{i,2} & \mathbf{x}_i \\ m_{i,2} & m_{i,3} & \mathbf{x}_i^2 \end{bmatrix} = m_{i,0}m_{i,2}\mathbf{x}_i^2 - m_{i,3}m_{i,0}\mathbf{x}_i - m_{i,2}^2. \quad (13)$$

由式(3)可知,式(13)的两个根即为(3)中两个采样点的值,即

$$\xi_{i,1} = \frac{m_{i,0}m_{i,3} + \sqrt{(m_{i,0}m_{i,3})^2 + 4m_{i,0}m_{i,2}^3}}{2m_{i,0}m_{i,2}}, \quad (14)$$

$$\xi_{i,2} = \frac{m_{i,0}m_{i,3} - \sqrt{(m_{i,0}m_{i,3})^2 + 4m_{i,0}m_{i,2}^3}}{2m_{i,0}m_{i,2}}. \quad (15)$$

将式(7)~(9)以及 $m_{i,0}$ 的值代入(14)和(15)可得

$$\xi_{i,1} = 1/\sqrt{\lambda_i}, \quad (16)$$

$$\xi_{i,2} = -1/\sqrt{\lambda_i}. \quad (17)$$

将式(16)和(17)代入(10)和(11)可得

$$w_{i,1} = w_{i,2} = \lambda_i/2. \quad (18)$$

一个很自然的选择是对每一个 i 都令 $\lambda = 1/n$,则结合式(16)~(18)可知,用于近似单位高斯分布权函数的3阶精度数值积分的加权采样点为

$$\begin{cases} \xi^{(i,j)} = (-1)^{j+1} \sqrt{n} \mathbf{e}_i, \\ w_{i,j} = 1/2n, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2. \quad (19)$$

由文献[4]可知,式(19)正是CKF中的Cubature点.当然,可以令 λ_i 取其代值,如 $\lambda_i = 1/(n + \kappa)$, κ 是一可调参数.为了保证各点权重之和为1,需要额外一个采样点 κ ,其对应的权重为

$$w_0 = 1 - \sum_{i=1}^n (w_{i,1} + w_{i,2}) = \frac{\kappa}{n + \kappa}. \quad (20)$$

将 $\lambda_i = 1/(n + \kappa)$ 代入式(16)~(18),可以得到一组新的用于近似单位高斯分布权函数的3阶精度数值积分的加权采样点,即

$$\begin{cases} \xi_0 = 0_{n \times 1}, \quad \xi^{(i,j)} = (-1)^{j+1} \sqrt{n + \kappa} \mathbf{e}_i; \\ w_0 = \kappa/n + \kappa, \quad w_{i,j} = 1/2(n + \kappa); \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2. \quad (21)$$

式(21)正是人们所熟悉的基于对称采样的传统UKF中的Sigma点.

2 CKF算法的局限性分析

在UKF算法中,可调参数 κ 取为 $3 - n$ 可以使传递的均值和方差捕获部分真实4阶矩信息.容易看

出,对于维数大于3的非线性滤波问题, Sigma点在中心点处的权重为负值,这容易导致传递的方差非正定,进而导致滤波算法的数值不稳定.出于对这个问题的认识, Arasaratnam提出了CKF算法,并指出CKF在高维问题中较UKF具有更高的精度和稳定性.

CKF虽然能够有效解决UKF算法数值不稳定性的问题,但同时又引入了非局部采样问题.非局部采样问题是指,对于基于采样点传递均值和方差的非线性滤波算法,如果所使用的采样点偏离中心点(均值处)很大,则可能引起滤波精度的下降. UKF中采样点与中心点的距离与 $\sqrt{n+\kappa}$ 成比例,而在UKF中, κ 一般取 $3-n$,因此维数增加对非局部采样的贡献被抵消了.对于CKF而言,由于没有可调参数对状态扩张的抵消,其每一个采样点与中心点的距离是与 n 成比例的,因此随着维数的增加会产生非局部采样问题.

分析一个典型的UT过程:

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (22)$$

其中 \mathbf{x} 是均值为 $\hat{\mathbf{x}}$ 、方差为 \mathbf{P}_x 的 $n \times 1$ 维随机向量. UT的具体过程如下:

根据下式产生Sigma点 $\{\boldsymbol{\xi}_i\}$ 及其权重 $\{w_i\}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}_0 = \hat{\mathbf{x}}, w_0 = \kappa/(n+\kappa); \\ \boldsymbol{\xi}_i = \hat{\mathbf{x}} + [\sqrt{(n+\kappa)\mathbf{P}_x}]_i, w_i = 1/2(n+\kappa); \\ \boldsymbol{\xi}_{i+n} = \hat{\mathbf{x}} - [\sqrt{(n+\kappa)\mathbf{P}_x}]_i, w_{i+n} = 1/2(n+\kappa). \end{cases} \quad (23)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, n$, $[\sqrt{\mathbf{P}_x}]_i$ 表示方差 \mathbf{P}_x 平方根的第 i 列. 将每个Sigma点经非线性变换进行传递,

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}_i), i = 0, 1, \dots, 2n. \quad (24)$$

则传递后 \mathbf{y} 的均值和方差分别为

$$\hat{\mathbf{y}} = \sum_{i=0}^{2n} w_i \mathbf{y}_i, \quad (25)$$

$$\mathbf{P}_y = \sum_{i=0}^{2n} w_i (\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}})^T. \quad (26)$$

为了对UT变换的精度进行分析,采用多元Taylor级数展开的方法. 首先定义如下变量:

$$\boldsymbol{\sigma}_{x_i} = [\sqrt{(n+\kappa)\mathbf{P}_x}]_i, \quad (27)$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}_{x_{i,j}}$ 是 $\boldsymbol{\sigma}_{x_i}$ 的第 j 个分量. 对式(24)中任意一传递Sigma点在 $\hat{\mathbf{x}}$ 处进行Taylor级数展开,有

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}_i) = \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} D^l_{\boldsymbol{\sigma}_{x_i}} \mathbf{g}. \quad (28)$$

其中

$$D^l_{\boldsymbol{\sigma}_{x_i}} \mathbf{g} = \left[\sum_{j=1}^n \boldsymbol{\sigma}_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right]^l \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}}, \quad (29)$$

$\frac{\partial}{\partial x_j}$ 表示对应于 $x_j(\mathbf{x}$ 的第 j 个分量)的偏导数. 当 $l=1$ 时,式(29)可以表示为 $D_{\boldsymbol{\sigma}_{x_i}} \mathbf{g} = [(\boldsymbol{\sigma}_{x_i} \nabla) \mathbf{g}(\mathbf{x})^T] \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}}$. 由于Sigma点关于均值处是对称的,式(28)中所有奇次幂项都是零. 根据式(25)和(28), UT传递后的均值为

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} (\nabla^T \mathbf{P}_x \nabla) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} + \frac{1}{2(n+\kappa)} \sum_{i=1}^{2n} \left[\sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} D^{2l}_{\boldsymbol{\sigma}_{x_i}} \mathbf{f} \right]. \quad (30)$$

根据Julier和Merwe的分析^[7-8],传递后的均值可以精确到3阶,而误差只在4阶及其以上的信息中引入. 对于UT传递均值的任一第 j 个分量,其4阶及以上信息可以表示为

$$\begin{aligned} \text{hom}(\kappa) &= \frac{1}{2(n+\kappa)} \sum_{i=1}^{2n} \left[\sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} [\boldsymbol{\sigma}_{x_{i,j}}]^{2l} \right] = \\ &= (n+\kappa)^{l-1} \sum_{l=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(2l)!} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{P}_x^l(i,j) \right], \forall j. \end{aligned} \quad (31)$$

其中 $\text{hom}(\kappa)$ 表示这些高阶信息是可调参数 κ 的函数. 对CKF而言, $\kappa=0$,因此式(31)可进一步表示为

$$\text{hom}_{\text{CKF}} = n^{l-1} \sum_{l=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(2l)!} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{P}_x^l(i,j) \right], \forall j. \quad (32)$$

从式(32)可以看出,CKF传递均值的高阶信息是随着维数的增大而增加的. 实际系统中,真实值的高阶信息是未知的,因此使用UKF或CKF计算的均值的高阶信息可能更接近真实信息,也可能偏离真实信息^[9]. 实际应用中,相对于算法最优表现,人们更关心的是其最差表现,因此对于基于采样点的非线性滤波算法,最实际的选择是使其高阶信息趋于0. 显然,CKF算法不能达到这一要求.

3 TCKF的导出

为了同时解决UKF的数值不稳定问题和CKF的非局部采样问题,本节提出一种新的Sigma点采样方法,相关研究是基于如下两个定理展开的.

定理1 假设 $\boldsymbol{\xi}$ 是3阶精度数值积分公式中所采用的一组采样点集, \mathbf{C} 是与 $\boldsymbol{\xi}$ 行维数一致的正交矩阵,则 $\mathbf{C}\boldsymbol{\xi}$ 也是3阶精度数值积分公式中所采用的一组相同权重的采样点集.

证明 由式(2)可知

$$\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\xi}^{(1,j)} | \boldsymbol{\xi}^{(2,j)} | \dots | \boldsymbol{\xi}^{(n,j)}], j = 1, 2, \quad (33)$$

其中 $\boldsymbol{\xi}$ 表示3阶精度数值积分公式中所采用的一组采样点集. 由式(7)和(8)可知,其满足如下关系式:

$$\sum_{k=1}^{2n} w_k \boldsymbol{\xi}_{k,i} = 0, i \in \{1, 2, \dots, n\}; \quad (34)$$

$$\sum_{k=1}^{2n} w_k \xi_{k,i_1} \xi_{k,i_2} = \delta_{i_1,i_2}, i \in \{1, 2, \dots, n\}; \quad (35)$$

$$\sum_{k=1}^{2n} w_k \xi_{k,i_1} \xi_{k,i_2} \xi_{k,i_3} = 0, i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (36)$$

其中: ξ_k 表示 ξ 点集中的第 k 个向量, $\xi_{k,i}$ 表示向量 ξ_k 第 i 个元素. 在数值积分公式中, 一般都是研究等权重对称分布的采样点, 如果 ξ 中每个采样点都是等权重对称分布, 则式(34)和(36)是自然满足的. 因此, 在构造3阶精度数值积分公式中等权重对称分布采样点时, 只需考虑式(35).

式(35)对应的矩阵形式为

$$\sum_{k=1}^{2n} w_k \xi_k \xi_k^T = I_n. \quad (37)$$

对一组采样点进行正交变换不会改变其对称性, 因此 $C\xi$ 满足式(34)和(36). 将式(37)中的 ξ 替换为 $C\xi$, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} w_k C\xi_k (C\xi_k)^T &= \sum_{k=1}^{2n} w_k C\xi_k \xi_k^T C^T = \\ C \left(\sum_{k=1}^{2n} w_k \xi_k \xi_k^T \right) C^T &= I_n. \end{aligned} \quad (38)$$

因此, $C\xi$ 也是3阶精度数值积分公式中所采用的一组采样点, 定理得证. \square

定理2 $n \times n$ 矩阵 B 列集的形式为

$$B = [B_1 | B_2 | \dots | B_n]; \quad (39)$$

$$B_k = (\beta_{k,1}, \beta_{k,2}, \dots, \beta_{k,n})^T, k = 1, 2, \dots, n; \quad (40)$$

$$\beta_{k,2r-1} = \sqrt{2/n} \cos((2r-1)k\pi/n); \quad (41)$$

$$\beta_{k,2r} = \sqrt{2/n} \sin((2r-1)k\pi/n). \quad (42)$$

其中 $r = 1, 2, \dots, [2/n]$, $[2/n]$ 为不大于 $2/n$ 的最大整数. 如果 n 是奇数, $\beta_{k,n} = (-1)^k / \sqrt{n}$, 则 B 是一正交矩阵.

证明 1) 首先假设 n 是偶数, 则

$$B_i^T \cdot B_i = \sum_{r=1}^{n/2} \frac{2}{n} \left(\cos^2 \frac{(2r-1)i\pi}{n} + \sin^2 \frac{(2r-1)i\pi}{n} \right) = 1, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} B_i^T \cdot B_j &= \sum_{r=1}^{n/2} \frac{2}{n} \left(\cos \frac{(2r-1)i\pi}{n} \cdot \cos \frac{(2r-1)j\pi}{n} + \right. \\ &\left. \sin \frac{(2r-1)i\pi}{n} \cdot \sin \frac{(2r-1)j\pi}{n} \right) = \\ &\sum_{r=1}^{n/2} \frac{2}{n} \left(\cos \left(\frac{(2r-1)(i-j)\pi}{n} \right) \right), \end{aligned} \quad (44)$$

其中 $i \neq j = 1, 2, \dots, n$. 令 $t = (i-j)\pi/n$, 则

$$B_i^T \cdot B_j = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n 2 \cos(st) - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n/2} 2 \cos(2st). \quad (45)$$

因为 $(i-j) \neq 0, (i-j) < n$, 所以 $\sin((i-j)\pi/n) \neq 0$, 且 $\sin(t/2) \neq 0$, 记

$$\begin{aligned} n \cdot B_i^T \cdot B_j &= \\ \frac{1}{\sin(t/2)} \sum_{s=1}^n 2 \cos(st) \sin(t/2) - \\ \frac{1}{\sin t} \sum_{s=1}^{n/2} 2 \cos(2st) \sin t &= \\ \frac{-\sin(t/2) + \sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)} - \\ \frac{-\sin t + \sin((n+1)t)}{\sin t} &= \\ \frac{2 \cos(t/2) \sin((2n+1)t/2) - \sin((n+1)t)}{\sin t} &= \\ \frac{2 \cos^2(t/2) \sin(nt) - \sin(nt) \cos t}{\sin t}, \end{aligned} \quad (46)$$

其中 $nt = n(i-j)\pi/n = (i-j)\pi$. 因此, $\sin(nt) = \sin((i-j)\pi) = 0$, 则

$$B_i^T \cdot B_j = 0, i \neq j = 1, 2, \dots, n. \quad (47)$$

综合式(43)和(47)可知, $B_i^T \cdot B_j = I_n$, 因此 B 是正交矩阵.

2) 当 n 为奇数时, $\beta_{k,n} = (-1)^k / \sqrt{n}$, 则

$$\begin{aligned} B_i^T \cdot B_i &= \\ \frac{1}{n} + \sum_{r=1}^{(n-1)/2} \frac{2}{n} \left(\cos^2 \frac{(2r-1)i\pi}{n} + \sin^2 \frac{(2r-1)i\pi}{n} \right) &= 1, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} B_i^T \cdot B_j &= \\ \frac{(-1)^{i+j}}{n} + \sum_{r=1}^{(n-1)/2} \frac{2}{n} \left(\cos \frac{(2r-1)i\pi}{n} \cdot \cos \frac{(2r-1)j\pi}{n} + \right. \\ &\left. \sin \frac{(2r-1)i\pi}{n} \cdot \sin \frac{(2r-1)j\pi}{n} \right), \end{aligned} \quad (49)$$

其中 $i \neq j = 1, 2, \dots, n$. 记

$$\begin{aligned} J &= \sum_{r=1}^{(n-1)/2} \frac{2}{n} \left(\cos \frac{(2r-1)i\pi}{n} \cdot \cos \frac{(2r-1)j\pi}{n} + \right. \\ &\left. \sin \frac{(2r-1)i\pi}{n} \cdot \sin \frac{(2r-1)j\pi}{n} \right). \end{aligned} \quad (50)$$

令 $t = (i-j)\pi/n$, 利用式(49)中同样的方法可以得出

$$J = \frac{2 \cos^2(t/2) \sin(nt) - \sin t \cos t - \sin(nt)}{n \cdot \sin t}, \quad (51)$$

其中 $nx = n(i-j)\pi/n = (i-j)\pi$. 因此, $\sin(nx) = \sin((i-j)\pi) = 0$, 则

$$J = \cos(nt)/n = -\cos((i-j)\pi)/n = -(-1)^{i+j}/n. \quad (52)$$

因此,

$$\mathbf{B}_i^T \cdot \mathbf{B}_j = 0, i \neq j = 1, 2, \dots, n. \quad (53)$$

综合式(48)和(53)可得, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{I}_n$. 综上, 定理得证. \square

由定理1和定理2可知, 可以利用式(39)~(42)中的正交矩阵 \mathbf{B} 对CKF中的采样点进行正交变换, 得到一组新的满足3阶精度数值积分公式的采样点. 为了使得到的新采样点不存在数值不稳定问题, 利用 \mathbf{B} 对式(19)中的cubature点进行正交变换.

首先将式(19)中的cubature点表示成矩阵形式

$$\boldsymbol{\xi} = [\sqrt{n}\mathbf{e}_k \quad -\sqrt{n}\mathbf{e}_k], k = 1, 2, \dots, n. \quad (54)$$

则 $\boldsymbol{\xi}$ 经 \mathbf{B} 正交变换后为

$$\boldsymbol{\chi} = [\chi_1 | \chi_2 | \dots | \chi_n]; \quad (55)$$

$$\boldsymbol{\chi}_k = (\chi_{k,1}, \chi_{k,2}, \dots, \chi_{k,n})^T, k = 1, 2, \dots, 2n; \quad (56)$$

$$\chi_{k,2r-1} = \sqrt{2} \cos((2r-1)k\pi/n); \quad (57)$$

$$\chi_{k,2r} = \sqrt{2} \sin((2r-1)k\pi/n). \quad (58)$$

其中 $r = 1, 2, \dots, [n/2]$. n 为奇数时, $\chi_{k,n} = (-1)^k$.

将式(55)~(58)中的采样点称之为transformed Sigma点. 对应于任意高斯分布权函数 $N(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{P}_x)$ 的transformed Sigma点, 可以表示为

$$\boldsymbol{\zeta} = \hat{\mathbf{x}} + \sqrt{\mathbf{P}_x} \boldsymbol{\chi}. \quad (59)$$

将CKF中的Sigma点用所提出的transformed Sigma点替换, 即可得到一种新的高斯滤波算法——TCKF(Transformed CKF).

下面定量分析TCKF是如何解决CKF中非局部采样问题的. 根据式(30), 对于transformed Sigma点传递均值的高阶矩信息, 可以表示为

$$\text{hom}_{\text{TCKF}} = \frac{2^l}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \psi^{2l} \left(\frac{(2r-1)i\pi}{n} \right) \times \sum_{i=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(2l)!} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{P}_x^l(i, j) \right], \forall j; \quad (60)$$

$$\psi = \sin \text{ or } \cos \text{ or } \psi((2r-1)ik\pi/n) = (-1)^i. \quad (61)$$

由式(60)和(61)很容易得出

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \psi^{2l} \left(\frac{(2r-1)i\pi}{n} \right) \leq 1. \quad (62)$$

综合式(32)和(62)可得

$$\text{hom}_{\text{TCKF}}/\text{hom}_{\text{CKF}} \leq n(2/n)^l \rightarrow 0 \text{ for large } n. \quad (63)$$

因此, TCKF传递均值的高阶信息远远小于CKF, 其实TCKF传递均值的高阶矩信息比传统UKF还要

小, 这是因为对于UKF, $\kappa = 3 - n$, 有 $\frac{\text{hom}_{\text{TCKF}}}{\text{hom}_{\text{UKF}}} \leq 3(2/3)^l \ll 1$ for $l \geq 4$.

因为传统的UKF一般不存在非局部采样问题, 所以本文提出的TCKF更不会存在^[10].

值得强调的是, 提高算法精度的平方根滤波^[11-12]、增强算法稳定性的自适应滤波^[13-14]、应对复杂量测噪声条件下的鲁棒滤波^[15-16]等各种改进方法都可与本文所提出的新采样点方法相结合, 进而拓宽相关的改进算法在高维问题中的应用空间. 同时, TCKF只是针对CKF的采样点进行了正交变化, CKF的时间更新过程和量测更新过程没有变化, 不会增加CKF算法的计算负荷.

4 仿真实验

4.1 维数可变的强非线性模型

考虑如下维数可变的强非线性系统模型:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = 2 \sin \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \\ \mathbf{y}_k = \sqrt{1 + \mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k} + \mathbf{v}_k, \end{cases} k = 1, 2, \dots, K.$$

其中: \mathbf{x}_k 为 n 维高斯随机变量, n 可变; 系统噪声 $\mathbf{w}_{k-1} \sim N(\mathbf{w}; 0_{n \times 1}, \mathbf{I}_n)$, 观测噪声为 $\mathbf{v}_k \sim N(\mathbf{v}; 0, 1)$. 为了比较不同维数条件下CKF和TCKF算法的性能, 维数 n 的变化范围选取为 $1 \sim 50$. 仿真时间 $K = 500$, 仿真时用于产生仿真数据的初始真值 $\mathbf{x}_0 = 0.1 \times 1_{n \times 1}$, 其中 $1_{n \times 1}$ 表示 $n \times 1$ 维矩阵的每一个元素都为1. 仿真的初始滤波条件设置为 $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = 0_{n \times 1}$, $\mathbf{P}_{0|0} = \mathbf{I}_n$. 各滤波算法的性能采用如下定义的评价指标进行比较:

$$\text{MRMSE}(n) = \text{mean}(\text{RMSE}(1 : M)).$$

其中

$$\text{RMSE}(1 : m) = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\mathbf{x}_k(1) - \hat{\mathbf{x}}_k(1))^2},$$

$m = 1, 2, \dots, M, M = 50$ 表示Monte Carlo仿真次数, $\mathbf{x}_k(1)$ 表示 \mathbf{x}_k 的第1个元素. 图1给出了不同维数下, EKF、CKF和TCKF三种滤波算法的MRMSE.

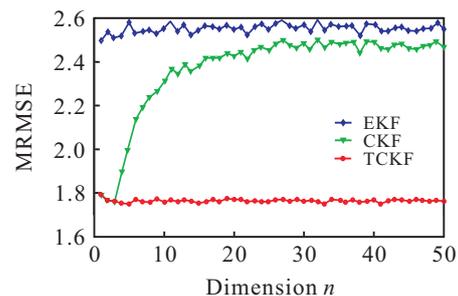


图1 不同维数下, 滤波的MRMSE

从图1可以看出,CKF和TCKF的滤波精度始终优于EKF,这是因为CKF和TCKF所使用的CT方法可以精确到3阶,而EKF所使用的线性传递方法只能精确到1阶. CKF算法的性能随着维数的增加而逐渐降阶,这说明CKF中通过cubature点传递所捕捉的高阶矩信息与真实值之间逐渐偏离. 相反,TCKF算法中通过transformed Sigma点传递所捕捉的高阶矩信息基本为0,因此基本不受维数变化的影响. 同时,在维数 $n > 20$ 后,一方面由于 \sqrt{n} 随着 n 的增大,其增长趋势放缓,减弱了非局部采样点的影响;另一方面,随着维数 n 增加,采样点的个数增加,也抵消了非局部采样点的部分影响,导致CKF精度降低不明显.

为了充分说明TCKF相对于CKF的精度优势,图2给出了 $n = 30$ 时,3种滤波算法50次Monte Carlo仿真的RMSE. 图3给出了RMSE的均值和标准差.

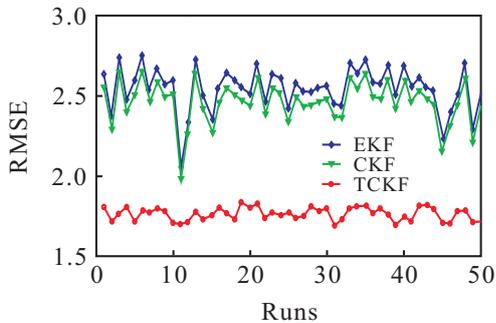


图2 $n = 30$ 时,50次Monte Carlo仿真的RMSEs

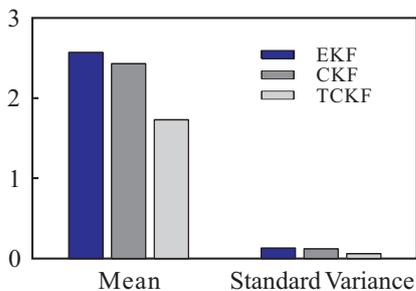


图3 50次Monte Carlo仿真的RMSEs均值和标准差

从图中可以明显看出,在高维、强非线性滤波问题中,TCKF相对于CKF具有更高的精度,从而验证了本文所研究的TCKF算法的有效性.

4.2 目标跟踪模型

将TCKF算法应用到经典的5维目标跟踪系统中,并与CKF进行对比. 定义地面坐标系 $o-xyz$ 的原点位于地面, ox 指向东向, oy 指向北向, oz 指向天向. 假设目标以未知角速度 Ω 等高度机动飞行,飞行高度 $h = 10\ 000\text{ m}$,目标的运动由如下模型描述:

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(\Omega T)}{\Omega} & 0 & -\frac{1 - \cos(\Omega T)}{\Omega} & 0 \\ 0 & \cos(\Omega T) & 0 & -\sin(\Omega T) & 0 \\ 0 & \frac{1 - \cos(\Omega T)}{\Omega} & 1 & \frac{\sin(\Omega T)}{\Omega} & 0 \\ 0 & \sin(\Omega T) & 1 & \cos(\Omega T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}.$$

其中: $\mathbf{X}_k = [x, \dot{x}, y, \dot{y}, \Omega]^T$ 为 k 时刻目标状态; $[x, y]^T$ 和 $[\dot{x}, \dot{y}]^T$ 为目标的位置和速度矢量; Ω 为未知的目标转弯角速度;高斯白噪声 $\mathbf{w}_{k-1} \sim N(0, \mathbf{Q}_k)$;协方差矩阵 $\mathbf{Q}_k = \text{diag}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)$, $\mathbf{M}_1 = q_1 T [T^2/3, T/2; T/2, 1]$, $\mathbf{M}_2 = q_2 T \mathbf{I}$, $q_1 = 0.1\text{ m}^2\text{s}^{-3}$ 和 $q_2 = 1.75 \times 10^{-4}\text{ s}^{-3}$ 为过程噪声强度参数; $T = 1\text{ s}$ 为量测时间间隔.

地面坐标系原点的测量雷达获取目标斜距 η 和方位角 θ 的信息. 测量向量为 $\mathbf{y}_k = [\eta_k \ \theta_k]^T$,满足

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \eta_k \\ \theta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + h_k^2} \\ \arctan(y_k/x_k) \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k. \quad (64)$$

其中: $\mathbf{v}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k)$ 为量测噪声, $\mathbf{R}_k = \text{diag}(\sigma_\eta^2, \sigma_\theta^2)$ 为其协方差阵, $\sigma_\eta = 10\text{ m}$ 和 $\sigma_\theta = \sqrt{10}\text{ mrad}$ 为雷达斜距量测噪声和方位角量测噪声的标准差.

设初始时刻 $t_0 = 1\text{ s}$,进行100次蒙特卡洛打靶实验,打靶时间为100 s. 初值 $\mathbf{X}_0 = [1\ 000\text{ m}, 300\text{ ms}^{-1}, 1\ 000\text{ m}, 0\text{ ms}^{-1}, -3^\circ\text{s}^{-1}]^T$, $\mathbf{P}_{0|0} = \text{diag}[100\text{ m}^2, 10\text{ m}^2\text{s}^{-2}, 100\text{ m}^2, 10\text{ m}^2\text{s}^{-2}, 100\text{ mrad}^2\text{s}^{-2}]$,角速度设置为 $\Omega = -3^\circ/\text{s}$. 每次实验的初始状态估计 $\hat{\mathbf{X}}_{0|0}$ 由满足均值为 $\hat{\mathbf{X}}_0$ 、协方差为 $\mathbf{P}_{0|0}$ 的高斯正态分布 $N(\hat{\mathbf{X}}_{0|0}; \hat{\mathbf{X}}_0, \mathbf{P}_{0|0})$ 随机生成. 分别采用TCKF和CKF对目标进行跟踪.

定义位置均方根误差和均方根误差均值分别为

$$\text{RMSE}_{\text{pos}}(k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(x_k^i - \hat{x}_k^i)^2 + (y_k^i - \hat{y}_k^i)^2]},$$

$$\text{MRMSE}_{\text{pos}} = \frac{1}{N} \sum_{k=50}^{100} \text{RMSE}_{\text{pos}}(k).$$

其中: (x_k^i, y_k^i) 和 $(\hat{x}_k^i, \hat{y}_k^i)$ 分别为第 i 次打靶时,第 k 时刻的目标真实位置分量和估计值; N 为打靶次数. 同理,可以定义速度均方根误差 RMSE_{vel} 和均方根误差均值 $\text{MRMSE}_{\text{vel}}$ 以及转速均方根误差 RMSE_{omg} 和均方根误差均值 $\text{MRMSE}_{\text{omg}}$.

图4~图6为TCKF和CKF两种滤波方法对目标位置、速度和转速的均方根误差的对比结果,选取了区分度较大的50~100 s时间区间.

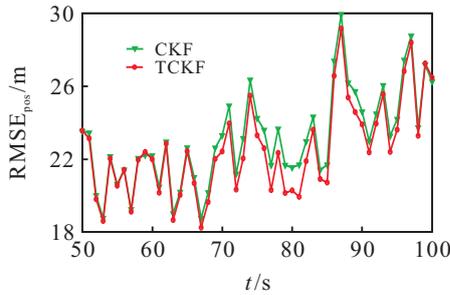


图4 目标位置的估计均方根误差

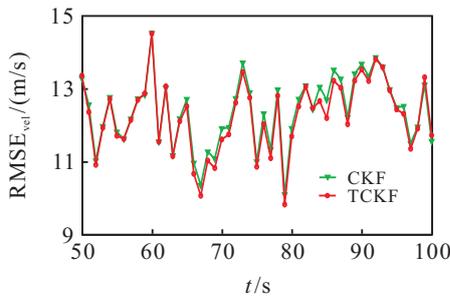


图5 目标速度的估计均方根误差

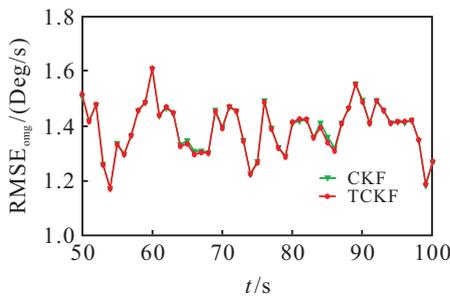


图6 目标转速的估计均方根误差

由图4~图6可知,对于5维的目标跟踪模型,在滤波精度上,TCKF具有较CKF更优的滤波性能。

表1定量分析了两种方法对目标位置、速度和转速的滤波均方根误差均值MRMSE和使用的容积点个数,进一步验证了TCKF具有比CKF更良好的滤波性能。

表1 均方根误差均值MRMSE和容积点个数

	位置	速度	角速度	容积点个数
CKF	12.5427	6.6008	0.7589	10
TCKF	11.9132	6.3505	0.7291	10

通过以上两个仿真实例,验证了在处理高维问题时,相对于CKF,所提出的TCKF算法在滤波精度上具有更优的估计性能。

5 结论

本文提出了一种新的基于采样点正交变换的TCKF算法。由于只是对采样点进行变换,采样点的权值与传统CKF相同,保证了算法的滤波稳定性;经过正交变换后的采样点传递真实均值和方差的高阶矩信息基本为0,进一步提高了CKF算法在高维估计问题中的滤波性能;将此方法与现有的各种改进

CKF算法结合,可以取得更好的估计效果。

参考文献(References)

- [1] Ito K, Xiong K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(5): 910-927.
- [2] Julier S J, Uhlman J K, Durrant-Whyte H F. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(3): 477-482.
- [3] Norgaard M, Poulsen N K, Ravn O. New developments in state estimation for nonlinear systems[J]. Automatica, 2000, 36(11): 1627-1638.
- [4] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(6): 1254-1269.
- [5] Lerner U N. Hybrid bayesian networks for reasoning about complex systems[D]. San Francisco: Department of Computer Science, Stanford University, 2002.
- [6] Xiu D X. Numerical integration formulas of degree two[J]. Applied Numerical Mathematics, 2008, 58(10): 1515-1520.
- [7] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation[J]. Proc of the IEEE, 2004, 92(3): 401-422.
- [8] Van der Merwe R. Sigma-point Kalman filters for probabilistic inference in dynamic state-space models[D]. Portland: Oregon Health Sciences University, Department of Computer Science, 2004.
- [9] Gustafsson F, Hendeby G. Some relations between extended and unscented Kalman filters[J]. IEEE Trans on Signal Process, 2012, 60(2): 545-555.
- [10] Julier S J, Uhlmann J K. The scaled unscented transformation[C]. Proc of the 2002 American Control Conf. Anchorage: IEEE, 2002: 4555-4559.
- [11] Potnuru D, Chandra K P B, Arasaratnam I. Derivative-free square-root cubature Kalman filter for nonlinear brushless DC motors[J]. IET Electric Power Applications, 2016, 10(5): 419-429.
- [12] Zhan A, Bao S D, Bi W H. Low-cost adaptive square-root cubature Kalman filter for systems with process model uncertainty[J]. J of Systems Engineering and Electronics, 2016, 27(5): 945-953.
- [13] Liu M, Lai J Z, Li Z M. An adaptive cubature kalman filter algorithm for inertial and land-based navigation system[J]. Aerospace Science and Technology, 2016, 51: 52-60.
- [14] Teng C H, Lin S F, Jwo D J. Fuzzy adaptive cubature Kalman filter for integrated navigation systems[J]. Sensors, 2016, 16(8): 1167.
- [15] Zhang W J, Wang S Y, Feng Y L. Huber-based high-degree cubature kalman tracking algorithm[J]. Acta Physica Sinica, 2016, 65(8): 354-362.
- [16] Wu H, Chen S X, Yang B F. Robust range-parameterized cubature Kalman filter for bearings-only tracking[J]. J of Central South University, 2016, 23(6): 1399-1405.

(责任编辑: 齐 霖)