文章编号: 1001-0920(2018)02-0366-05　　DOI: 10.13195/j.kzyjc.2016.1534

带有时滞的区间不确定正系统的约束控制

孙敏慧[1], 钟宁帆[2], 苏莹莹[1†]

(1. 中国海洋大学 数学科学学院，山东 青岛 266100；
2. 山东科技大学 电气与自动化工程学院，山东 青岛 266590)

摘　要: 研究具有时变时滞的连续不确定正系统的约束控制问题. 基于线性规划方法, 首先设计状态反馈控制器使得相应的闭环系统是正系统且渐近稳定; 然后建立在正性约束下有界的鲁棒状态反馈控制器存在的充分条件, 同时给出控制器的设计方法; 最后利用仿真算例验证所提出方法的有效性.

关键词: 约束控制；时变时滞；区间不确定系统；线性规划

中图分类号: TP273　　**文献标志码:** A

Constraint control of interval uncertain positive system with delays

SUN Min-hui[1], *ZHONG Ning-fan*[2], *SU Ying-ying*[1†]

(1. School of Mathematical Sciences，Ocean University of China，Qingdao 266100，China；2. College of Electrical Engineering and Automation, Shandong University of Science and Technology，Qingdao 266590，China)

Abstract: The constraint control problem is considered for the continuous interval system with time-varying delay. Firstly, a feedback controller is designed to guarantee the positivity and asympototic stability of the system. Then, sufficient conditions are given for the existing of bounded robust state feedback controllers. At the same time, the corresponding controller is also designed. Finally, a numerical example is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: constraint control；time-varying delays；interval uncertain system；linear programming

0 引　言

在物理、工程、经济以及生物的应用中, 约束控制都发挥着非常大的作用并且有着深刻的应用背景[1-3]. 事实上, 对于一个实际的控制系统而言, 它的状态、控制输入和输出都可以被事先指定的一组界所约束. 例如, 生活中使用的电子仪器, 通常会对频率、电流和电压设置上限和下限, 一旦超过这些限度系统不能正常工作, 严重则会导致系统损坏. 类似地, 因为控制信号会受到实际物理条件制约而不能使其无限制地大, 例如阀门的开度, 升降机的牵引力等只能在一定范围内取值, 于是对控制信号的幅度一般也都有约束[4-8]. 使一个具有约束控制的系统稳定并且具有良好的性质, 是一个持续性的热点话题, 近年来, 一些文献已经对一般系统的约束控制进行了研究并且取得了很多研究成果[1,9-14].

另一方面, 在现实生活的很多领域中, 存在着一类总取非负值的量. 例如, 物理学中的绝对温度和路程以及生物学中的虫口数量等, 这些量都可以用非负值描述, 相应的动力学行为可以采用正系统刻画. 在很多领域正系统都发挥着非常重要的作用[15-18]. 对于正系统, 文献 [3, 19] 利用线性规划的方法研究了区间不确定系统在无约束和有界控制下的正性及稳定性问题. 文献 [20] 给出了线性系统在正性约束下的状态反馈控制器存在的充要条件以及控制器的设计方法. 基于线性规划的方法, 文献 [21-22] 分别对具有时滞连续和离散正系统的约束控制问题进行了研究, 但是所提出的方法对于系统矩阵是区间不确定、具有未知时滞、具有时变时滞的系统并不适用. 文献 [1,23] 分别研究了具有未知时滞离散正系统和区间不确定离散正系统的有界控制以及镇定问题, 但所涉及的时滞均为常时滞. 文献 [24] 考虑了具有无界时变时滞正系统的稳定性问题. 文献 [25] 考虑了具有无界时变时滞的约束控制问题, 但对所设计的控制器仅为非负. 目前在正系统的约束控制方面已经取得了很多研究结果, 但对于系统矩阵为区间不确定具有时变时滞连续系统在正性约束下的有界控制问题却

收稿日期: 2016-12-01；**修回日期:** 2017-06-08.

作者简介: 孙敏慧 (1980−), 女, 副教授, 从事Markov跳变系统、模型降阶、正系统等研究；钟宁帆 (1979−)，男，讲师，从事奇异摄动系统等研究.

†通讯作者. E-mail: syy1029@163.com

较少见到. 本文将在已有研究结果的基础上,考虑区间不确定时滞系统的约束控制问题. 值得指出的是,所考虑系统的系统矩阵是区间未知的,首先考虑了具有无界时变时滞系统的鲁棒性问题;其次考虑了系统的约束控制问题,而且所设计的控制器也可适用于具有未知时滞、常时滞以及有界时变时滞正系统的约束控制问题.

本文研究带有时变时滞的连续区间不确定正系统的约束控制问题,即设计状态反馈控制器,使得对于任意满足条件的不确定参数,相应的闭环系统都是正的且稳定,且状态和输入均有界. 给出了基本定义和引理,并提出要研究的主要问题,解决了时滞不确定连续正系统的有界控制器的设计方法. 最后通过仿真实例表明了所提出方法的有效性.

1 问题描述

文中符号如下: M^{T}表示实矩阵的转置; $A(i,j)$表示矩阵第i行第j列的元素; $M\geqslant 0$表示非负的实矩阵(向量),即$M(i,j)\geqslant 0$; $M>0$表示正的实矩阵(向量),即$M(i,j)>0$; $A\geqslant B$表示矩阵$A-B\geqslant 0$; $R^n(R_+^n)$表示n维(非负)实列向量空间; $R^{m\times n}(R_+^{m\times n})$表示$m\times n$维(非负)实矩阵集合.

首先给出一些基本定义和引理. 考虑如下系统:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+A_1x(t-d(t)),\\ x(t)=\varphi(t),\ t\in[-\tau,0].\end{cases}\tag{1}$$

其中: $x(t)\in R^n$为状态向量; $A,A_1\in R^{n\times n}$为系统矩阵; $\varphi:[-\tau,0]\to R^n$为向量值初始函数. 时滞$d(t)$满足: 存在时刻t',使得

$$0\leqslant\sup_{t>t'}(d(t)/t)<1\tag{2}$$

成立,且

$$-\tau=\min\{\inf_{0\leqslant t\leqslant t'}(t-d(t)),\ \inf_{t>t'}(t-d(t))\}=\inf_{0\leqslant t\leqslant t'}(t-d(t)).$$

注1 不仅常时滞和有界的时变时滞均满足式(2),满足此条件的时滞也可为无界时滞.

定义1[24] 考虑系统(1),对于任意的初始条件$\varphi:[-\tau,0]\to R_+^n$,若对于所有的$t\geqslant 0$,相应的状态解均满足$x(t)\geqslant 0$,则称系统(1)为正系统.

定义2[26] 若矩阵$A\in R^{n\times n}$的非对角元素都为非负,则称矩阵A为Metzler矩阵.

引理1[22] 系统(1)为正系统,当且仅当矩阵A是Metzler矩阵且矩阵$A_1\geqslant 0$.

引理2[24] 设系统(1)为正系统,对于任意的初始条件$x(t)=\varphi(t)\in R_+^n,t\in[-\tau,0]$,若存在$\lambda\in R_+^n$使得$(A+A_1)\lambda<0$,则系统(1)渐近稳定.

引理3[25] 对任意给定的$\overline{x}>0$,若对于任意初始条件满足$0\leqslant\varphi(t)\leqslant\overline{x},t\in[-\tau,0]$,则系统(1)的解$x(t)$满足$0\leqslant x(t)\leqslant\overline{x},t\geqslant 0$,当且仅当$A$是Metzler矩阵, $A_1\geqslant 0$且$(A+A_1)\overline{x}<0$.

注2 若系统是正系统且时滞满足式(2),则系统的稳定性以及系统状态解的有界性与时滞无关,只与系统矩阵有关. 当时滞有界时,引理2中存在$\lambda\in R_+^n$,使得$(A+A_1)\lambda<0$为系统渐近稳定的充要条件.

考虑如下具有时变时滞的区间不确定系统:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+A_1x(t-d(t))+Bu(t),\\ x(t)=\phi(t)\in R_+^n,\ t\in[-\tau,0].\end{cases}\tag{3}$$

其中: $x(t)\in R^n$为状态向量; $u(t)\in R^m$为控制输入向量; $A,A_1\in R^{n\times n},B\in R^{n\times m}$为区间矩阵,且分别满足

$$A^-\leqslant A\leqslant A^+,\tag{4}$$

$$B^-\leqslant B\leqslant B^+,\tag{5}$$

$$0\leqslant A_1^-\leqslant A_1\leqslant A_1^+.\tag{6}$$

本文主要研究具有时变时滞的区间不确定系统(3)的约束控制问题,即对于任意给定的$\overline{u}\geqslant 0$,设计有界的鲁棒状态反馈控制器$0\leqslant u\leqslant\overline{u},t\geqslant 0$,使得对于任意满足条件(4)~(6)的不确定参数,其对应的闭环系统均为正系统且渐近稳定.

2 主要结果

对于系统(3), 有如下定理.

定理1 考虑系统(3),若存在向量$y_1,y_2,\cdots,y_n\in R^m,\overline{x}=[\overline{x}(1),\overline{x}(2),\cdots,\overline{x}(n)]^{\mathrm{T}}\in R^n$满足下列线性规划:

$$\overline{x}>0;\tag{7}$$

$$(A^++A_1^+)\overline{x}+\max\left\{B^+\sum_{i=1}^n y_i,\ B^-\sum_{i=1}^n y_i\right\}<0;\tag{8}$$

$$A^-(i,j)\overline{x}(j)+\min\{b_i^+y_j,b_i^-y_j\}\geqslant 0,\quad i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n.\tag{9}$$

则存在一个鲁棒状态反馈控制$u(t)=Kx(t)$,使得对于任意满足条件(4)~(6)的不确定参数,其相应的闭环系统均是正系统且渐近稳定. 其中: b_i^-为矩阵B^-的第i个行向量,增益为

$$K=[\overline{x}(1)^{-1}y_1,\cdots,\overline{x}(n)^{-1}y_n].\tag{10}$$

证明 由式(10)可知,式(9)等价于

$$A^-+\min\{B^+K,B^-K\}\geqslant 0,$$

即矩阵$A^-+\min\{B^+K,B^-K\}$是Metzler矩阵. 因为

$$A^- + \min\{B^+K, B^-K\} \leqslant A + BK,$$

矩阵$A+BK$亦为Metzler矩阵,再由$A_1 \geqslant 0$,由引理1可知系统(3)是正系统.

又因为

$$A + A_1 + BK \leqslant A^+ + A_1^+ + \max\{B^+K, B^-K\},$$

由式(10)可知,式(8)等价于

$$(A^+ + A_1^+ + \max\{B^+K, B^-K\})\overline{x} \leqslant 0.$$

因为$\overline{x} > 0$,则$(A + A_1 + BK)\overline{x} \leqslant 0$,由引理2可知系统(3)渐近稳定. □

注3 在定理1中,如果矩阵B是已知的且系统(3)为正系统,则线性规划

$$(A^+ + A_1^+)\overline{x} + B\sum_{i=1}^{n} y_i < 0 \tag{11}$$

等价于$(A^+ + A_1^+ + BK)\overline{x} \leqslant 0$仍然只是系统(3)渐近稳定的充分条件而不是充要条件. 如果系统(3)的时滞为常时滞或有界的时变时滞,则式(11)为系统(3)渐近稳定的充要条件.

定理2 考虑系统(3),任意给定$\overline{u} \geqslant 0$,若存在向量$\overline{x} = [\overline{x}(1), \overline{x}(2), \cdots, \overline{x}(n)]^{\mathrm{T}} \in R^n, y_1, y_2, \cdots, y_n \in R^m$,满足线性规划

$$\overline{x} > 0; \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \leqslant \overline{u},\ y_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, n; \tag{13}$$

$$(A^+ + A_1^+)\overline{x} + B^+\sum_{i=1}^{n} y_i < 0; \tag{14}$$

$$A^-(i,j)\overline{x}(j) + b_i^- y_j \geqslant 0,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{15}$$

则存在一个鲁棒状态反馈控制$u(t) = Kx(t)$,使得对于任意满足条件(4)~(6)的不确定参数,其相应的闭环系统均是正系统且渐近稳定,并且当任意的初始条件满足$0 \leqslant \phi(t) \leqslant \overline{x}$时,$x(t)$、$u(t)$满足如下约束:

$$0 \leqslant x(t) \leqslant \overline{x},\ t \geqslant 0; \tag{16}$$

$$0 \leqslant u(t) \leqslant \overline{u},\ t \geqslant 0. \tag{17}$$

其中: b_i^-为矩阵B^-的第i个行向量,增益为$K = [\overline{x}(1)^{-1}y_1, \cdots, \overline{x}(n)^{-1}y_n]$.

证明 因为$\overline{x} > 0, y_i \geqslant 0$,且有

$$K = [\overline{x}(1)^{-1}y_1, \cdots, \overline{x}(n)^{-1}y_n],$$

可知$K \geqslant 0$. 由式(15)可得$A^- + B^-K$是Metzler矩阵,由式(4)~(6)以及$K \geqslant 0$可知$A + BK$也是Metzler矩阵,又由A_1非负可知系统(3)是正系统.

下面证明渐近稳定性. 因为式(14)等价于

$$(A^+ + A_1^+ + B^+K)\overline{x} \leqslant 0,$$

由$K \geqslant 0$易知

$$A + A_1 + BK \leqslant A^+ + A_1^+ + B^+K,$$

又由$\overline{x} > 0$可得$(A + A_1 + BK)\overline{x} \leqslant 0$,由引理2可知系统(3)渐近稳定.

因为$A + BK$是Metzler矩阵,$A_1 \geqslant 0$且$(A + A_1 + BK)\overline{x} \leqslant 0$,由引理3可知$0 \leqslant x(t) \leqslant \overline{x}$, $t \geqslant 0$,即式(16)成立. 由$K \geqslant 0$以及式(10)和(13),有$0 \leqslant u(t) = Kx(t) \leqslant K\overline{x} \leqslant \overline{u}$,即式(17)成立. □

注4 若系统矩阵A、A_1、B是已知的,且时滞是有界的,则相应的线性规划变为闭环系统为正且渐近稳定的充要条件.

定理3 考虑系统(3),任意给定$\overline{u}_1 \geqslant 0, \overline{u}_2 \geqslant 0$,若存在向量$\overline{x} = [\overline{x}(1), \overline{x}(2), \cdots, \overline{x}(n)]^{\mathrm{T}} \in R^n$, $y_1, y_2, \cdots, y_n \in R^m, z_1, z_2, \cdots, z_n \in R^m$,满足线性规划

$$\overline{x} > 0; \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \leqslant \overline{u}_1;\ y_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, n; \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \leqslant \overline{u}_2,\ z_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, n; \tag{20}$$

$$(A^+ + A_1^+)\overline{x} + B^+\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i) < 0; \tag{21}$$

$$A^-(i,j)\overline{x}(j) + b_i^-(y_j - z_j) \geqslant 0,\quad i \neq j,\ i, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{22}$$

则存在一个鲁棒状态反馈控制$u(t) = Kx(t)$,使得对于任意满足条件(4)~(6)的不确定参数,其相应的闭环系统均是正系统且渐近稳定,并且当任意的初始条件满足$0 \leqslant \phi(t) \leqslant \overline{x}$时,$x(t)$、$u(t)$满足如下约束:

$$0 \leqslant x(t) \leqslant \overline{x},\ t \geqslant 0; \tag{23}$$

$$-\overline{u}_2 \leqslant u(t) \leqslant \overline{u}_1,\ t \geqslant 0. \tag{24}$$

其中: b_i^-为矩阵B^-的第i个行向量,增益为$K = [\overline{x}(1)^{-1}(y_1 - z_1), \cdots, \overline{x}(n)^{-1}(y_n - z_n)]$.

证明 只需注意

$$-\overline{u}_2 \leqslant -\sum_{i=1}^{n} z_i \leqslant u(t) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} y_i \leqslant \overline{u}_1$$

即可. 定理的证明方法同定理2,证明过程不再赘述. □

注5 定理3是定理2的一个推广. 定理2所设计的控制器$u(t)$的下界为零,保证了$u(t)$是正的. 在定理3中,控制器$u(t)$的下界为负上界为正,比定理2所设计的控制器更为一般化.

3 数值算例

例1　考虑系统(3),取参数分别为

$$A^+ = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 \\ 0.2 & -0.3 \end{bmatrix},\ A_1^+ = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 \end{bmatrix},$$
$$B^+ = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -1 \end{bmatrix},\ A^- = \begin{bmatrix} -0.55 & 0.18 \\ 0.1 & -0.3 \end{bmatrix},$$
$$A_1^- = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.18 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix},\ B^- = \begin{bmatrix} 0.05 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

时滞 $d(t) = \sqrt{t}, t' = 1, \tau = 0.5$. 初始条件 $\phi(t) = [0.1\ \ 0.2]^{\mathrm{T}}, \overline{u} = 10$. 利用线性规划(12)～(15)求得线性规划的一组可行解,得到

$$y_1 = 0.0845,\ y_2 = 5.0365,$$
$$\bar{x} = [\overline{x}(1), \overline{x}(2)] = [7.5932\ \ 1.9757]^{\mathrm{T}},$$
$$K = [\overline{x}(1)^{-1}y_1, \overline{x}(2)^{-1}y_2] = [0.0111\ \ 2.5493].$$

对系统(3)不加控制,即令 $u(t) = 0$,系统矩阵 A、A_1 分别取 A^+、A_1^+ 和 A^-、A_1^- 时,系统(3)的状态响应应分别如图1和图2所示.

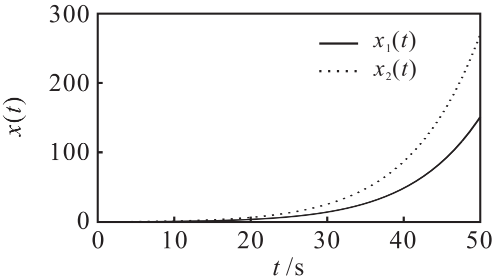

图1　系统(3)的状态响应(A、A_1 分别取 A^+、A_1^+)

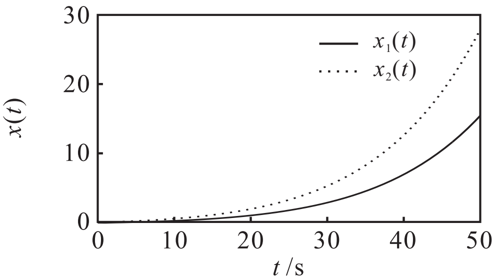

图2　系统(3)的状态响应(A、A_1 分别取 A^-、A_1^-)

由图1和图2可见,这两个开环系统都是不稳定的. 对系统(3)施加控制,相应的闭环系统状态响应如图3和图4所示.

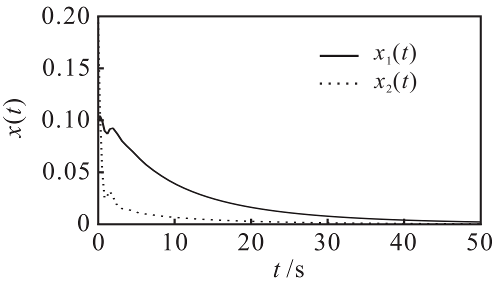

图3　系统(3)的状态响应(A、A_1、B 分别取 A^+、A_1^+、B^+)

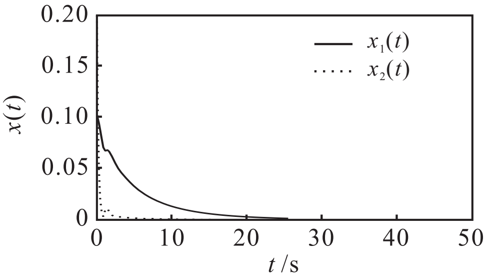

图4　系统(3)的状态响应(A、A_1、B 分别取 A^-、A_1^-、B^-)

因为系统(3)是区间不确定系统,选取

$$A = \frac{A^+ + A^-}{2},$$
$$A_1 = \frac{A_1^+ + A_1^-}{2},$$
$$B = \frac{B^+ + B^-}{2}.$$

状态响应如图5所示.

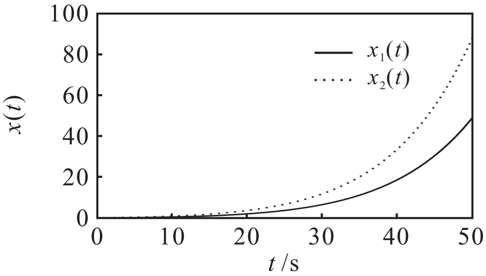

图5　开环系统(3)的状态响应

由图5可见,系统是不稳定的. 对系统(3)施加控制后,相应闭环系统的状态响应如图6所示.

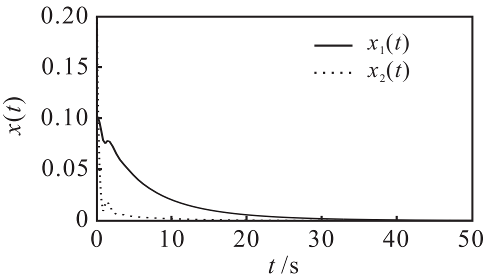

图6　闭环系统(3)的状态响应

由图3、图4和图6可以看出这3个闭环系统都是正的且渐近稳定,且 $u(t) \leqslant K\overline{x} = 5.1209 < \overline{u} = 10$. 通过该算例可以得知本文所提出方法是有效的.

4 结　论

本文考虑了具时变时滞的区间不确定连续系统的约束控制问题. 借助线性规划方法,设计有界的鲁棒状态反馈控制器,能够保证相应的闭环系统的正性、鲁棒稳定性、系统状态解和控制器的有界性.

参考文献(References)

[1] Hmammed A, Benzaouia A, Rami M A, et ak. Positive stabilization of discrete time systems with unknown delay and bounded controls[C]. European Control Conf.

Greece, 2015: 5616-5622.

[2] Liu X W. Constrained control of discrete time positive systems with delays[C]. IEEE Conf. Milpitas: IEEE, 2009: 898-902.

[3] Rami M A, Tadeo F, Benzaouia A. Control of constrained positive discrete systems[C]. Proc of the American Control Conf. New York, 2007: 5851-5856.

[4] Hmamed A, BenZaoula A, Bensalall H. Regulator problem for linear continuous time delay systems with non-symmetrical constrained control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1995, 40(9): 1615-1619.

[5] BemPorad A, Morari M, Dua V, et al. The explicit linear quadratic regulator for constraint systems[J]. Automatic, 2001, 38(l): 3-20.

[6] Yu M, Wang L, Chu T. Sampled-data stabilization of networked control systems with non-linearity[J]. IEEE Proc of Control Theory and Applications, 2005, 152(6): 609-614.

[7] Ching S, Kabamba P T, Meerkov S M. Root locus for random reference tracking in systems with saturating actuators[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(1): 79-91.

[8] Tu W, Sreenan C J, Jia W. Worst-case delay control in multigroup overlay network[J]. IEEE Trans on Parallel and Distributed Systems, 2007, 18(10): 1407-1419.

[9] Benzaouia A, Burgat E. Regulator problem for linear discrete time systems with non-symmetrical constrained control[J]. Int J of Control,1988, 48(6): 441-451.

[10] Blanchini F. Set invariance in control[J]. Automatic, 1999, 35(11): 1747-1767.

[11] Mesquine F, Tadeo F, Benzaouia A. Regulator problem for linear systems with constraints on control and its increment or rate[J]. Automatic, 2004, 40(8): 1387-1395.

[12] Tahir M, Mazumder S K. Delay constraint optimal resource utilization of wireless network for distributed control systems[J]. IEEE Communications Letters, 2008, 12(4): 289-291.

[13] Henrion D, Tarbouriech S, Kucera V. Control of linear systems subject to input constraints: A polynomial approach[J]. Automatic, 2001, 36(4): 597-604.

[14] Marchand N, Hably A, Chemori A. Global stabilization with low computational cost of the discrete time chain of integrator by means of bounded controls[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(5): 948-952.

[15] Johnson C. Sufficient conditions for stability[J]. J of Economic Theory, 1974, 9(1): 53-62.

[16] Jacquez J, Simon C. Qualitative theory of compartmental systems[J]. Siam Review, 1993, 35(1): 43-79.

[17] Foschini Q, Miljanic Z. A simple distributed autonomous power control algorithm and its convergence[J]. IEEE Trans on Vehicular Technology, 1993, 42(4): 641-646.

[18] Shorten R, Wirth F, Leith D. A positive systems model of TCP-like congestion control: Symptotic results[J]. IEEE Trans on Networking, 2006, 14(3): 616-629.

[19] Rami M A, Tadeo F. Controller synthesis for positive linear systems with dounded controls[J]. IEEE Trans Circuits System, 2007, 54(2): 151-155.

[20] Gao H J, Lam J, Wang C, et al. Control for stability and positivity: Equivalent conditions and computation[J]. IEEE Trans Circuits System, 2005, 52(9): 540-544.

[21] Liu X W. Constrained control of positive systems with delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(7): 1596-1600.

[22] Liu X W, Wang L, Yu W. Constrained control of positive discrete time systems with delays[J]. IEEE Trans Circuits System, 2008, 55(2): 193-197.

[23] Hmamed A, Rami M A, Benzaouia A. Stabilization under constrained states and controls of positive systems with time delays[J]. European J of Control, 2012(18): 182-190.

[24] Liu X W, Dang C Y. Stability analysis of positive switched linear system with delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2011, 56(7): 1684-1690.

[25] Shen J, Lam J. Constrained control of switched positive system with discrete and distributed delays[C]. Proc of the 33th Chinese Control Conf. Nanjing, 2014: 6031-6036.

[26] Rantzer A. Scalable control of positive systems[J]. European J of Control, 2015, 24: 72-80.

（责任编辑：郑晓蕾）