

## 挠性系统基于相位控制的 $H_\infty$ 鲁棒设计

孟范伟<sup>1</sup>, 吕晓永<sup>1†</sup>, 刘胤圻<sup>1</sup>, 沙晓鹏<sup>1</sup>, 庞爱平<sup>2</sup>

(1. 东北大学秦皇岛分校 控制工程学院, 河北 秦皇岛 066004; 2. 哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001)

**摘 要:** 提出一种加权的  $H_\infty$  优化设计方法来设计挠性系统的鲁棒控制器, 以解决采用  $H_\infty$  回路成形法设计时控制器不稳定且鲁棒性差的问题. 利用挠性模态所对应闭环极点的配置来实现相位控制思想, 同时允许高频部分的闭环极点与期望极点有一定差别, 弱化严格正实的约束. 将相位控制与  $H_\infty$  优化求解相结合, 通过所求得的控制器的实现期望的闭环极点. 所提出的设计方法灵活且设计过程物理意义明确. 最后通过两个仿真算例验证所提出方法的可行性.

**关键词:** 挠性系统; 相位控制;  $H_\infty$  优化; 鲁棒性; 局部正实性

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## $H_\infty$ robust design of flexible systems based on phase control

MENG Fan-wei<sup>1</sup>, LV Xiao-yong<sup>1†</sup>, LIU Yin-qi<sup>1</sup>, SHA Xiao-peng<sup>1</sup>, PANG Ai-ping<sup>2</sup>

(1. School of Control Engineering, Northeastern University at Qinhuangdao, Qinhuangdao 066004, China; 2. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

**Abstract:** A weighted  $H_\infty$  optimization method is proposed to design a robust controller for the flexible system, which solves the problem of unstable characteristics of controller and poor robustness that happens during the design of  $H_\infty$  loop shaping method. The idea of phase control is realized by the configuration of the closed-loop poles corresponding to the flexible modes and the closed-loop poles of the high-frequency parts are allowed to differ from the expected poles, which weakens the strict positive real constraints. Combined with the phase control and  $H_\infty$  optimization, the desired closed-loop poles can be realized by the controller. The proposed method has the advantage of flexibility, and a clear physical meaning in the design process. The feasibility of the proposed method is verified by two simulation examples.

**Keywords:** flexible systems; phase control;  $H_\infty$  optimization; robustness; local positivity

## 0 引 言

具有挠性结构的系统在自动控制中已得到广泛的应用. 大到航天器, 小至计算机硬驱中的读写头都是挠性的, 如具有大型空间桁架结构的卫星<sup>[1]</sup>、带有太阳帆板或天线等附件的航天器<sup>[2-3]</sup>、磁悬浮结构的轴承<sup>[4]</sup>和硬盘中携带读写磁头的驱动臂<sup>[5-6]</sup>等带有长杆结构的系统, 以及用于空间捕获或工业生产的柔性机械臂<sup>[7]</sup>等均属于挠性系统.

挠性系统的模型不确定性包括参数摄动和未建模动态, 因此所设计的控制器应保证对这两类不确定性具有鲁棒性. 最初 McFarlane 发表了经典著作文献 [8], 提出了一种新的控制方法, 即  $H_\infty$  回路成形法. McFarlane 在文献 [8] 中列举了 3 个应用实例, 其中两个例子是挠性系统. 目前, 人们在挠性系统的控制

设计理论研究中常用此法, 在实际系统中也得到了广泛应用<sup>[9]</sup>. 互质因子摄动是  $H_\infty$  回路成形法的基础, 用来描述系统的不确定性. 已有的研究中关于互质因子摄动的分析大都列举简单的例子来说明其优点, 且特别说明互质因式摄动更适合描述弱阻尼模态的参数摄动<sup>[10-11]</sup>. 而就能查阅到的有关  $H_\infty$  回路成形法的研究而言, 都接受了互质因子摄动这一描述方式, 大都未进行更深入的讨论.

然而, 近年来, 随着控制技术要求的提高, 挠性系统逐渐体现了弱阻尼特性. 就频率特性角度而言, 弱阻尼特性是指被控对象的开环传递函数多次穿越 0 dB 线, 即开环对象的奈奎斯特曲线包围临界稳定点的情况更复杂. 文献 [12] 进行了弱阻尼挠性系统的  $H_\infty$  回路成形设计研究, 研究结果表明, 挠性模态的

收稿日期: 2016-12-14; 修回日期: 2017-01-19.

基金项目: 河北省高等学校科学技术研究项目 (ZD2016203); 东北大学秦皇岛分校博士启动基金项目 (XNB201608, XNB201609, XNB201610, XNB201411).

作者简介: 孟范伟 (1981—), 男, 讲师, 博士, 从事控制系统设计与鲁棒控制的研究; 吕晓永 (1985—), 男, 讲师, 博士, 从事微机械陀螺的设计与应用的研究.

†通讯作者. E-mail: mengfanwei@neuq.edu.cn

参数(频率)摄动范围因弱阻尼存在而大大压缩,导致 $H_\infty$ 回路成形设计方法失去鲁棒性.为此,文献[13]提出了将 $H_\infty$ 回路成形与 $\mu$ 综合结合起来解决参数摄动下的鲁棒设计问题.文献[14]通过实例分析表明,两者结合并未达到预期效果,在回路成形设计中加进 $\mu$ 综合后只是对稳定裕度的值有影响,并不能改善允许摄动的范围,所以弱阻尼是挠性系统采用 $H_\infty$ 设计的难点.文献[15]对 $H_\infty$ 回路成形法进行全面分析,说明了 $H_\infty$ 回路成形法中的鲁棒性、性能和 $H_\infty$ 范数的真实意义.

弱阻尼挠性系统在采用 $H_\infty$ 回路成形法设计时,除了上述的鲁棒性变差外,还存在不稳定控制器的问题. $H_\infty$ 控制设计主要是结构问题和权函数的选取问题,其结构问题包括二块、四块问题和 $\mu$ 综合等,但是不论什么结构,对弱阻尼挠性系统而言都会产生一个不稳定的 $H_\infty$ 控制器<sup>[4,8,13,15]</sup>,即闭环系统是稳定的,但所设计的 $H_\infty$ 控制器却是不稳定的.目前,关于不稳定控制器的研究相对较少,实际上不稳定的控制器的投入是很困难的<sup>[4]</sup>,如文献[15]中略去高频分量后的 $H_\infty$ 控制器式(20)就是一不稳定控制器.本文主要针对上述挠性系统在采用 $H_\infty$ 设计时发生的不稳定控制器和鲁棒性差的问题进行研究.

## 1 挠性系统的数学模型

挠性系统的数学模型可用式(1)所示的无穷维传递函数来表示<sup>[16]</sup>,即

$$G(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{s^2 + 2\zeta_i\omega_i s + \omega_i^2}, \quad (1)$$

其中对应于 $i=0$ 时的第1项为刚体模型, $i=1$ 之后为各阶挠性模态.通常,频率高的挠性模态幅值较小,因此设计中往往用前几次低频模态表示挠性系统的名义模型.本文所选取的被控对象来自文献[17]中的挠性臂模型,其传递函数如下:

$$G(s) = \frac{1.26}{s^2} - \frac{2.5527}{s^2 + 0.713s + 27.9} + \frac{3}{s^2 + 0.4s + 100} + \frac{3}{s^2 + 0.8s + 400}. \quad (2)$$

图1为挠性臂(2)对应的Bode图.

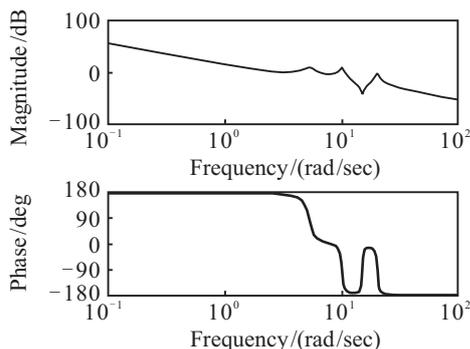


图1 被控对象的Bode图

从被控对象的传递函数式(2)和图1易知,该挠性臂具有弱阻尼模态,弱阻尼比为 $\zeta = 0.02$ .在Bode图上可以清晰地看出,多个模态并未重叠,而是根据自己的频率分布,这样的模态分布特点为挠性系统的鲁棒控制提供了一种新的设计方法——对多个挠性模态分别进行设计.

## 2 相位控制原理

$H_\infty$ 设计中描述对象的不确定性为范数有界的传递函数,因而相应的设计方法以小增益定理为基础. $H_\infty$ 鲁棒控制研究大多沿着该方向进行,因而忽视了系统中相位信息的重要性.在回路成形设计中,绘制Bode图时仅考虑了幅频特性,从未关注奈奎斯特图.参照文献[15]绘制McFarlane法的开环奈奎斯特图可知,不稳定控制器通过逆时针绕 $(-1, j0)$ 一圈而保证系统闭环稳定.当谐振频率稍有摄动,包围 $(-1, j0)$ 的圈将上移或者下移,直至不包围而使闭环系统不稳定,因此采用McFarlane的 $H_\infty$ 回路成形法的弱阻尼挠性系统的鲁棒性较差,所允许的参数摄动范围较小.而本文的相位控制就是针对改变系统的相频特性而进行的 $H_\infty$ 设计研究.

相位控制是近年来新出现的适合挠性系统的一种设计思想.以含有一个挠性模态的系统为例,在系统的Bode图上,由于弱阻尼的存在,挠性系统的幅频特性剧烈变化,可多次穿越0dB线,如图1所示.反映在奈奎斯特曲线上,弱阻尼模态的对应的曲线是一个大圆,参数摄动时,容易改变大圆包围 $(-1, j0)$ 点的情况.相位控制要求与弱阻尼模态对应的那部分奈奎斯特曲线的顶点都落在正实轴上,那么参数摄动时系统具有较好的鲁棒性,其原理如图2所示,称之为严格正实设计<sup>[5]</sup>.该控制思想的简单性和有效性已经在硬盘存储系统中得到了很好的运用<sup>[5]</sup>.相位控制思想实质上与早期的正位置反馈控制(设计正位置滤波器)的思路是一致的<sup>[18]</sup>.关于这一设计思想,在文献[19]中就有体现,即将这种相位控制思想与 $H_\infty$ 设计相结合.但是图2所示的正实要求对于系统的稳定性要求而言过于保守,而且所用到的 $H_\infty$ 设计要求需要丰富的 $H_\infty$ 设计经验,且设计出的控制器阶次高.因此,本文在设计中将这一条件放宽,设计后只要使弱阻尼模态对应的奈奎斯特曲线的顶点(见图3中\*所在的位置)处在右半平面就满足要求.图3中弱阻尼所对应的圆的顶点在右半平面,但却不在正实轴上.即使模型的参数 $(\zeta_i, \omega_i)$ 有摄动,也不会使开环特性越过临界点而造成不稳定,其被称之为局部正实设计.本文通过极点配置和 $H_\infty$ 加权优化设计使奈奎

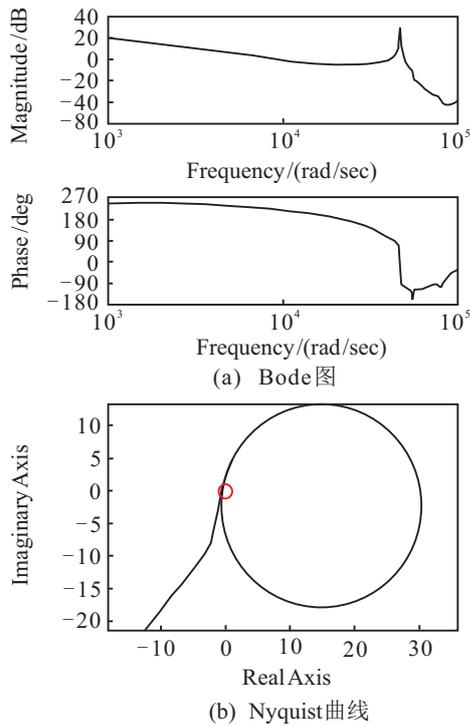


图2 严格正实

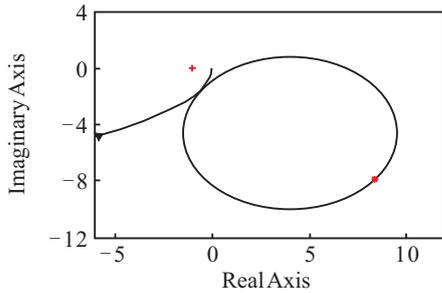


图3 局部正实

斯特图达到图3所示的形式. 这里的  $H_\infty$  加权优化设计方法相对于文献[19]更为直接、更为系统, 物理概念清楚, 且控制器阶次不高.

### 3 $H_\infty$ 加权优化设计方法

设挠性系统的模型为  $G(s) = n_g(s)/d_g(s)$ , 一般  $d_g(s)$  的阶次高于  $n_g(s)$  的阶次. 将被控对象的传递函数  $G(s)$  表示成互质因子的形式, 即

$$G(s) = \frac{N_g(s)}{D_g(s)} = \frac{n_g(s)/d_f(s)}{d_g(s)/d_f(s)}. \quad (3)$$

其中:  $N_g(s)$  和  $D_g(s)$  都是稳定的有理函数, 多项式  $d_f(s)$  与系统的特征方程式是有关的, 且第1项  $s^n$  的系数是1<sup>[12]</sup>. 注意这里大小写字母的区分, 分别为有理函数和多项式. 同样, 控制器  $K(s)$  也写成如式(3)的形式, 即

$$K(s) = \frac{N_k(s)}{D_k(s)} = \frac{n_k(s)/d_c(s)}{d_k(s)/d_c(s)}. \quad (4)$$

其中:  $d_c(s)$  的第1项  $s^n$  的系数是1,  $d_c(s)$  与系统的特征方程式也是有关的. 根据式(3)和(4)计算出闭环传递函数  $T(s)$  为

$$T(s) = \frac{N_g(s)N_k(s)}{D_g(s)D_k(s) + N_g(s)N_k(s)}. \quad (5)$$

$T(s)$  的分母用  $P(s)$  表示, 即

$$P(s) = D_g(s)D_k(s) + N_g(s)N_k(s) = \frac{d_g(s)d_k(s) + n_g(s)n_k(s)}{d_f(s)d_c(s)}. \quad (6)$$

其中:  $P(s)$  的分子和分母分别是对应系统的闭环特征方程和期望的特征方程, 为此, 设计时使  $P(s) = 1$  才能让两者相等. 那么若设计时式(6)中设定了期望极点, 则可由  $P(s) = 1$  这一条件来求解控制器  $K(s) = n_k(s)/d_k(s)$ , 但这个条件不能在全频率段上都能满足, 因此本文提出了加权设计的思路解决如下  $H_\infty$  的优化问题:

$$\min_{K(s)} \|W(s)(1 - P(s))\|_\infty. \quad (7)$$

其中  $W(s)$  是满足低频特性的加权函数. 取

$$W(s) = \frac{1}{(10s + 1)^2}. \quad (8)$$

根据上述的分析可知, 对于式(7)与(8)构成的优化求解问题, 可以使低频挠性模态对应的主导极点与期望的极点相等, 而高频挠性模态存在不同, 这样就可以实现在主导极点的频段上使  $P(j\omega) \rightarrow 1$ . 可见这样的设计比经典控制理论中的极点配置方法要灵活许多, 而且能够将极点配置与优化求解相结合.

在图2所示的严格正实设计中采用的是正实引理<sup>[19]</sup>. 而在本文的局部正实设计中, 式(7)优化问题可根据  $H_\infty$  控制理论中的有界实引理来求解. 用  $[A_{wp}, B_{wp}, C_{wp}, 0]$  表示  $W(s)(1 - P(s))$  的状态空间形式, 则由有界实引理可知,  $\|W(s)(1 - P(s))\|_\infty \leq \gamma$  的充要条件是存在  $X = X^T > 0$ , 使下列矩阵不等式成立, 证明过程见文献[20]的引理5.3:

$$\begin{bmatrix} A_{wp}^T X + X A_{wp} & X B_{wp} & C_{wp}^T \\ B_{wp}^T X & -\gamma I & 0 \\ C_{wp} & 0 & \gamma \end{bmatrix} < 0. \quad (9)$$

当把传递函数  $W(s)(1 - P(s))$  转换为状态的形式时, 可发现控制器式(4)中的  $n_k(s)$  和  $d_k(s)$  的每项系数只包含在  $C_{wp}$  中, 并且是线性的, 因此式(9)是一个线性矩阵不等式(LMI), 式(7)的优化等价于线性矩阵不等式(9)限制下  $\gamma$  的求解, 即

$$\gamma_m = \min_{K(s)} \gamma. \quad (10)$$

上述的优化可借助 Matlab 中现成的函数来求解.

以上分析主要考虑的是挠性系统中低频上的弱阻尼模态, 设计的目标是使弱阻尼模态对应的闭环极点具有负实部, 并提高阻尼比. 高频极点的配置要求可以通过  $H_\infty$  优化中的加权来放宽, 而闭环系统其余

极点配置策略是过零分贝线以后,使开环特性远离临界稳定点至右半平面,只有这样,以上的设计思想才是可行的.设计的具体内容如下.

确定期望的极点,即  $d_f(s)d_c(s) = 0$  的根.其中  $d_f(s)$  表示被控对象的极点通过反馈形成的那部分闭环极点.被控对象式(2)的第1项是双积分,对应的是闭环系统的主导极点,余下的3个挠性模态影响系统的稳定性,因此可将主导极点对应的阻尼比设置为  $\zeta = 1$ .由文献[17]中的设计指标需要可知,主导极点可选择为  $(s + 1)^2$ .传递函数中余下的3个弱阻尼模态对应的极点位于虚轴附近,闭环后应避免进入右半平面,但结合控制设计的理论可知,若将它们设置成向左更远的位置,控制输入又将过大.综合考虑,选择  $d_f(s)$  如下:

$$d_f(s) = (s + 1)^2(s^2 + 1.2s + 25.36) \times (s^2 + s + 100.3)(s^2 + s + 400.3). \quad (11)$$

由式(11)和(2)可以看出,闭环极点提高了阻尼比.

式(6)中的  $d_c(s)$  是控制器式(4)对应的闭环极点,因此  $d_c(s)$  的阶次由控制器决定.将式(2)通分相加会发现,该挠性臂传递函数存在非最小相位零点  $(s^2 - 7.932s + 36.54)$ ,非最小相位零点可使相角滞后,利于奈奎斯特曲线进入右半平面,有助于正实设计.而式(2)中的零点  $(s^2 + 9.038s + 36.64)$  则完全相反,可设置适当的控制器极点进行补偿.稳定零极点对消与系统的性能优劣无关.不管是精确对消还是粗略对消,闭环传递函数都会存在与  $(s^2 + 9.038s + 36.64)$  相当的极点,所以  $d_c(s)$  可取为

$$d_c(s) = (s^2 + 9s + 36)(s + 2.5), \quad (12)$$

其中  $(s + 2.5)$  也是为使奈奎斯特线相角滞后而设置的.由此式可知设计的控制器为3阶.

确定  $d_f(s)$  和  $d_c(s)$  之后,式(8)和(9)的优化问题可求.求得的控制器的

$$K(s) = \frac{3.7145(s + 0.3753)(s^2 + 0.6289s + 46.39)}{(s + 5.652)(s^2 + 8.821s + 36.17)}. \quad (13)$$

由式(13)可知,该控制器是稳定的控制器,说明该设计能够解决回路成形设计中的不稳定控制器问题.

### 4 仿真分析和验证

被控对象(2)与控制器(10)组成的闭环系统的传递函数为

$$T(s) = \frac{17.6124(s + 0.3753)(s^2 + 9.038s + 36.64)(s^2 - 7.932s + 36.54)}{(s + 2.467)(s + 1.02)(s + 0.9823)(s^2 + 9.038s + 36.64)(s^2 + s + 100.3)(s^2 + s + 400.3)} \rightarrow$$

$$\leftarrow \frac{7.932s + 36.54)(s^2 + 0.6289s + 46.39)(s^2 + 9.038s + 36.64)}{8.707s + 35.24)(s^2 + 1.109s + 407.8)(s^2 + 0.4288s + 223.1)} \rightarrow$$

$$\leftarrow \frac{0.4288s + 223.1)}{0.8979s + 101.4)(s^2 + 1.203s + 25.43)}. \quad (14)$$

从式(14)可以看出,闭环极点与期望的  $d_f(s)d_c(s)$  未精确吻合,这种差别是通过权函数  $W(s)$  引入的.这正体现了本文所提方法的灵活性.

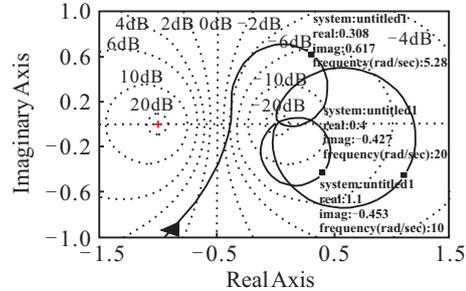


图4 系统的开环特性

图4为设计后系统的开环特性.从图4中可以看出,3个挠性模态相应的3个圆形的顶点都在右半平面,满足了弱化后的局部正实性的设计要求.图4中与挠性模态对应的曲线没有进入闭环幅值  $M$  圆图的  $M = 0$  dB 的左侧.也可以通过绘制闭环传递函数的频率特性发现,挠性模态对应的幅值也均低于 0 dB.这表明通过配置挠性系统中弱阻尼模态所对应的闭环极点使得系统的开环特性远离临界稳定点,从而提高稳定性.上述的设计方法与限制峰值的设计思路是相同的.

接下来试看闭环系统的鲁棒性.现将被控对象中的阻尼和频率分别变化 10%.图5(a)中点线对应被控对象(2),实线对应各个模态阻尼摄动增加 10%,虚线对应各阻尼摄动减小 10%.可以看出,无论阻尼增加还是减小,摄动后开环特性中各模态所对应的圆分布不变,仅是大小有所改变.频率摄动时曲线如图5(b)所示,图中显示摄动后开环特性仍然远离临界稳定点,即本文所提设计方法具有一定的鲁棒性.

以文献[12]中式(10)的具有挠性结构的卫星姿态控制系统为例可知,当采用回路成形法时,得到的是难以投入的不稳定控制器,而且允许的参数摄动范围仅为 3.5%.采用本文方法得到的控制器为如下稳定控制器:

$$K_1(s) = \frac{230089(s + 0.3242)(s^2 + 0.1153s + 0.7518)}{(s + 36.14)(s^2 + 115.5s + 3575)}. \quad (15)$$

对照文献[12]中图4的仿真,通过绘制系统摄动后的阶跃响应曲线可知,频率摄动百分之百后,系统仍然是稳定的.综上所述,本文所提出的极点配置下的  $H_\infty$  优化设计方法在保证鲁棒性的同时,获得了一个

稳定的控制器。

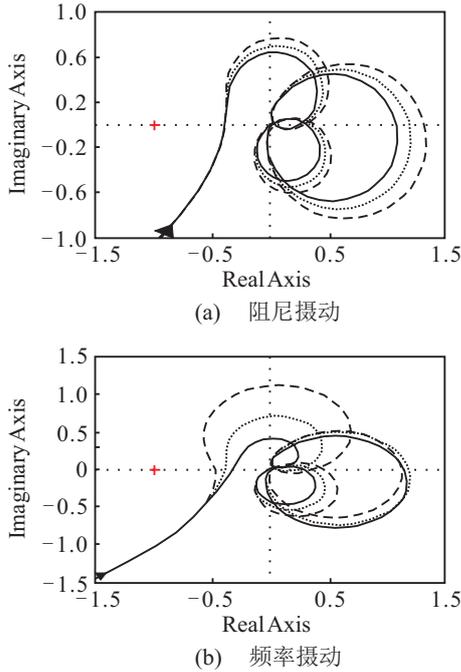


图5 参数变化时系统的奈奎斯特图

## 5 结论

已有的 $H_\infty$ 设计都是以增益控制为基础展开研究的,而本文在 $H_\infty$ 设计中用相位条件来保证闭环系统的稳定性和控制性能.本文针对正实相位控制如何采用 $H_\infty$ 理论进行设计的问题,给出了极点配置配合加权函数的 $H_\infty$ 优化方法,放松了严格正实的要求,且利用非最小相位零点的优势,使得设计更为灵活.仿真结果表明,控制器是稳定的,且闭环系统的鲁棒性明显优于 $H_\infty$ 回路成形法.

### 参考文献(References)

- [1] Ding S H, Zheng W X. Nonsmooth attitude stabilization of a flexible spacecraft[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2014, 50(2): 1163-1181.
- [2] 朱良宽, 马广富, 胡庆雷. 挠性航天器鲁棒后步滑模姿态跟踪及主动振动控制[J]. 控制与决策. 2008, 23(5): 530-534.  
(Zhu L K, Ma G F, Hu Q L. Active vibration control and attitude tracking of flexible spacecraft via robust backstepping sliding mode technique[J]. Control and Decision, 2008, 23(5): 530-534.)
- [3] Wu Y L, Li J L, Zeng H B, et al. Robust  $H_\infty$  control design for spacecrafts with large flexible netted antennas[J]. Control Theory & Applications, 2013, 30(3): 365-371.
- [4] Balini H, Scherer C W, Witte J. Performance enhancement for AMB systems using unstable  $H_\infty$  controller crossovers[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2011, 19(6): 1479-1492.
- [5] Cherubini G, Chung C C, Messner W C, et al. Control methods in data-storage systems[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2012, 20(2): 296-322.
- [6] Lu Y S. Internal model control of lightly damped systems subject to periodic exogenous signals[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2010, 8(3): 699-704.
- [7] Pradhan S K, Subudhi B. Nonlinear adaptive model predictive controller for a flexible manipulator: An experimental study[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2014, 22(5): 1754-1768.
- [8] McFarlane D, Glover K. Robust controller design using normalized coprime factor plant descriptions[M]. Lecture Notes in Control and Information Sciences. New York: Springer Verlag, 1989: 138-140.
- [9] 王晓燕, 陈晓. 基于MOGA算法的 $H_\infty$ 回路成形直升机姿态控制器设计[J]. 控制与决策. 2016, 31(1): 59-65.  
(Wang X Y, Chen X. Design of helicopter attitude controller of  $H_\infty$  loop-shaping method based on MOGA algorithm[J]. Control and Decision, 2016, 31(1): 59-65.)
- [10] McFarlane D C, Glover K. A loop shaping design procedure using  $H_\infty$  synthesis[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1992, 37(6): 759-769.
- [11] Glover K, McFarlane D. Robust controller design using normalized coprime factor plant descriptions[M]. Lecture Notes in Control and Information Sciences. New York: Springer-Verlag, 1990: 203-208.
- [12] He Z, Meng F W, Liu W, et al. Robustness of  $H_\infty$  loop shaping design[J]. Acta Automatica Sinica, 2010, 36(6): 890-893.
- [13] Lanzon A, Tsiotras P. A combined application of  $H_\infty$  loop shaping and  $\mu$ -synthesis to control high-speed flywheels[J]. IEEE Control Systems Technology, 2005, 13(5): 766-777.
- [14] 何朕, 姜晓明, 孟范伟, 等.  $H_\infty$ 回路成形中的 $\mu$ 综合法[J]. 控制理论与应用, 2012, 29(3): 347-352.  
(He Z, Jiang X M, Meng F W, et al.  $\mu$ -synthesis in  $H_\infty$  loop-shaping design[J]. Control Theory & Applications. 2012, 29(3): 347-352.)
- [15] Meng F W, He Z, Wang G X, et al. Control design of flexible systems and  $H_\infty$  loop-shaping method [J]. Control Theory & Applications, 2013, 30(8): 1014-1020.
- [16] Franklin G F, Powell J D, Abbas E N. Feedback control of dynamic system[M]. Fourth Edition Pearson Education, 2003: 270-272.
- [17] Doyle J C, Francis B A, Tannenbaum A R. Feedback control theory[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1993: 208-213.
- [18] Mahmoodi S N, Ahmadian M, Inman D J. Adaptive modified positive position feedback for active vibration control of structures[J]. J of Intelligent Material Systems and Structures, 2010, 21(4): 571-580.
- [19] Coustal P, Michelin J M. Industrial application of an  $H$ -infinity design method for flexible structures[J]. IEEE Control System, 1994, 14(4): 49-54.
- [20] Wang G X, He Z. Applied  $H_\infty$  control[M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2010: 88-90.

(责任编辑: 闫妍)