第 33 卷 第 3 期
2018 年 3 月

控 制 与 决 策
Control and Decision

Vol.33 No.3
Mar. 2018

文章编号: 1001-0920(2018)03-0542-07 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2016.1614

基于Zhenyuan积分的直觉模糊多属性决策方法

曾守桢[1†], 穆志民[2]

(1. 宁波大学 商学院，浙江 宁波 315211；2. 天津农学院 基础科学学院，天津 300384)

摘 要: 针对属性之间具有相互关联关系的直觉模糊多属性决策问题, 提出一种基于 Zhenyuan 积分的决策方法. 首先提出直觉模糊 Zhenyuan 积分平均 (IFZA) 算子; 然后探讨 IFZA 算子的优良性质以及与现有直觉模糊集成算子的关系, 研究表明, IFZA 算子可以改进现有直觉模糊奇异积分算子的缺陷, 能够全面度量属性之间的相互关联关系; 最后提出一种基于 IFZA 算子的属性间具有相互关联关系的直觉模糊多属性决策方法, 并通过实例验证所提出方法的有效性和可行性.

关键词: 直觉模糊集；Zhenyuan 积分；多属性决策；关联

中图分类号: C943 **文献标志码:** A

Method based on Zhenyuan integral for intuitionistic fuzzy multiple attribute decision making

ZENG Shou-zhen[1†], *MU Zhi-min*[2]

(1. School of Business，Ningbo University，Ningbo 315211，China；2. College of Basic Science，Tianjin Agricultural University，Tianjin 300384，China)

Abstract: With regard to intuitionistic fuzzy multiple attribute decision making with interaction between attributes, a method based on the Zhenyuan integral is presented. The intuitionistic fuzzy Zhenyuan averaging(IFZA) operator is developed, and some of its desirable properties are studied. The research shows that the IFZA operator can fully consider the importance of interactions among different attributes and improve the intuitionistic fuzzy Choquet integral operator. Finally, a method based on the IFZA for intuitionistic fuzzy multiple attribute decision making is introduced, and a numerical example is provided to illustrate the effectiveness and applicability of the presented method.

Keywords: intuitionistic fuzzy set；Zhenyuan integral；multiple attribute decision making；interaction

0 引 言

自从Zadeh[1]于1965年提出模糊集理论以来, 数学的理论与应用研究范围便从精确问题拓展到模糊现象的领域, 模糊集理论已在现代社会的各个领域得到广泛应用. 传统模糊集的隶属函数值仅是一个单一的值, 因而其实际应用受到越来越多的制约和挑战. Atanassov[2] 对Zadeh的模糊集进行了拓展, 提出了可同时考虑隶属度、非隶属度和犹豫度的直觉模糊集. 与传统模糊集相比, 直觉模糊集在处理不确定性和模糊性方面更具有优势, 更加灵活和实用. 近年来, 人们对直觉模糊集的研究产生了浓厚的兴趣, 广大研究者从不同角度对直觉模糊集的运算法则、集成方法、测度方法、拓扑结构等基础理论进行了深入研究, 相应的成果也较为丰富[3-9].

在很多实际的多属性决策问题中, 属性 (指标) 之间相互独立的情形比较少见, 往往存在某种关联性. 以研究型高校引进教师为例, 一般需要考虑候选者的科研水平、教学水平和教育背景等, 这些指标往往不是独立的. 一般情况下, 教育背景和科研水平是关联的, 教育背景好的教师科研水平也较高, 反之亦然. 属性间存在的这种关联性往往使属性权重的可加性遭到破坏, 导致常用的加权平均算子失效. 例如, 以代数、统计学和概率论3门课程对学生进行评估考核. 一般来说, 统计学课程学习好的同学其概率论课程也不会差, 反之亦然, 即统计学和概率论两门课程存在一定程度的相关性. 若使用加权算术平均算子

收稿日期: 2016-12-20；**修回日期:** 2017-02-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (71671165)；浙江省自然科学基金项目 (LYG010007)；教育部人文社科基金项目 (14YJC910006)；国家统计局科学研究项目 (2016LZ43, 2017LY100).

作者简介: 曾守桢 (1981−), 男, 副教授, 博士, 从事统计评价与决策分析等研究；穆志民 (1982−), 男, 讲师，硕士, 从事决策分析的研究.

†通讯作者. E-mail: zszzxl@163.com

对学生成绩进行评估,则会高估统计学和概率论成绩都好的学生[10]. 因此,在决策过程中有必要考虑属性之间的关联性,这样才能提高结论的科学性.

Choquet积分[11]是处理属性之间存在关联关系的一种重要工具,目前国内外学者已将Choquet积分广泛应用于信息集成、决策和对策等问题中. 如Tan[12]、Tan等[13]、Xu[14]和Wu等[15]研究了基于Choquet积分的直觉模糊信息集成方法,提出了一系列的直觉模糊Choquet积分算子. 然而,经典的Choquet积分及其上述各种拓展形式并不能对所有属性间的关联作用进行分析,只能度量部分属性的关联度.

为了改进Choquet积分的这种缺陷,本文提出一种直觉模糊环境下处理属性间具有关联作用的新方法,为此通过引入Zhenyuan积分概念[16],提出基于Zhenyuan积分的直觉模糊集成算子,即直觉模糊Zhenyuan积分平均(IFZA)算子,并研究IFZA算子的优良性质及其在直觉模糊多属性决策问题中的应用,进而为处理直觉模糊环境下属性存在关联关系的决策问题提供一种有效的途径.

1 直觉模糊集理论

Atanassov[2]于1986年提出了直觉模糊集的概念,定义如下:

定义1 设X是一个非空集合,则称

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),v_A(x)\rangle|x\in X\} \tag{1}$$

为直觉模糊集,其中$\mu_A(x)$和$v_A(x)$分别为X中元素x属于A的隶属度和非隶属度,即$\mu_A: X\to[0,1]$, $v_A: X\to[0,1]$,且$0\leqslant\mu_A(x)+v_A(x)\leqslant 1,\forall x\in X$. 此外

$$\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-v_A(x) \tag{2}$$

表示X中元素x属于A的犹豫度或不确定度. 特别地,若$\forall x\in X$,有$\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-v_A(x)=0$,则$A$退化为Zadeh的模糊集[1]. 为方便起见,称$\alpha=(\mu_\alpha,v_\alpha)$为直觉模糊数[3],其中

$$\mu_\alpha\in[0,1],\ v_\alpha\in[0,1],\ \mu_\alpha+v_\alpha\leqslant 1, \tag{3}$$

且设$\varOmega$为全体直觉模糊数的集合.

通过得分函数S和精确度函数H可以对直觉模糊数$\alpha=(\mu_\alpha,v_\alpha)$进行评估[17-18],即

$$S(\alpha)=\mu_\alpha-v_\alpha,\ H(\alpha)=\mu_\alpha+v_\alpha. \tag{4}$$

其中: $S(\alpha)\in[-1,1]$, $H(\alpha)\in[0,1]$. 基于直觉模糊数的得分函数S和精确度函数H,文献[3]介绍了直觉模糊数α_1和α_2的一种排序方法:

1) 若$S(\alpha_1)<S(\alpha_2)$,则$\alpha_1<\alpha_2$.

2) 若$S(\alpha_1)=S(\alpha_2)$,则: 当$H(\alpha_1)<H(\alpha_2)$时,$\alpha_1<\alpha_2$; 当$H(\alpha_1)=H(\alpha_2)$时,$\alpha_1=\alpha_2$.

对于任意3个直觉模糊数$\alpha=(\mu_\alpha,v_\alpha)$, $\alpha_1=(\mu_{\alpha_1},v_{\alpha_1})$和$\alpha_2=(\mu_{\alpha_2},v_{\alpha_2})$,其运算规则可定义如下[3]:

1) $\alpha_1\oplus\alpha_2=(\mu_{\alpha_1}+\mu_{\alpha_2}-\mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2},v_{\alpha_1}v_{\alpha_2})$;

2) $\alpha_1\otimes\alpha_2=(\mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2},v_{\alpha_1}+v_{\alpha_2}-v_{\alpha_1}v_{\alpha_2})$;

3) $\lambda\alpha=(1-(1-\mu_\alpha)^\lambda,{v_\alpha}^\lambda)$;

4) $\alpha^\lambda=(\mu_\alpha^\lambda,1-(1-v_\alpha)^\lambda)$.

信息集成是直觉模糊集理论研究中的一个重要领域, Xu[6]对直觉模糊信息的集成方式进行了深入研究,给出直觉模糊加权平均(IFWA)和直觉模糊有序加权平均(IFOWA)这两个最常用的直觉模糊集成算子.

定义2 设$\alpha_j=(\mu_{\alpha_j},v_{\alpha_j})(j=1,2,\cdots,n)$为一组直觉模糊数,且设IFWA: $\varOmega^n\to\varOmega$,若

$$\mathrm{IFWA}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=w_1\alpha_1\oplus\cdots\oplus w_n\alpha_n=\Big(1-\prod_{j=1}^n(1-\mu_{\alpha_j})^{w_j},\prod_{j=1}^n v_{\alpha_j}^{w_j}\Big), \tag{5}$$

则称IFWA为n维直觉模糊加权平均算子,其中$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm T}$为$\alpha_j(j=1,2,\cdots,n)$的权向量,满足$w_j\in[0,1]$和$\sum\limits_{j=1}^n w_j=1$.

定义3 设$\alpha_j=(\mu_{\alpha_j},v_{\alpha_j})(j=1,2,\cdots,n)$为一组直觉模糊数,直觉模糊有序加权平均(IFOWA)算子是一个映射: IFOWA: $\varOmega^n\to\varOmega$,使得

$$\mathrm{IFOWA}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=w_1\alpha_{\sigma(1)}\oplus\cdots\oplus w_n\alpha_{\sigma(n)}=\Big(1-\prod_{j=1}^n(1-\mu_{\alpha_{\sigma(j)}})^{w_j},\prod_{j=1}^n v_{\alpha_{\sigma(j)}}^{w_j}\Big). \tag{6}$$

其中: $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm T}$为与IFOWA算子相关联的权向量,满足$w_j\in[0,1]$和$\sum\limits_{j=1}^n w_j=1$; $(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n))$是$(1,2,\cdots,n)$的一个置换,使得对于任意的$j$,有$\alpha_{\sigma(j-1)}\geqslant\alpha_{\sigma(j)}$.

2 Choquet积分与Zhenyuan积分

经典测度是线段长度、平面图形面积等概念的推广,其典型特征是可加性. 例如,两个不相交的平面区域之和的面积等于这两个区域的面积之和. 但是在很多现实情况下可加性往往无法满足,如两个人合作的工作效率往往大于或小于两个人各自工作效率之和. 非可加测度(nonadditive measure),或称模糊测度(fuzzy measure),或称Choquet容度(Choquet capacity),以关于集合包含关系的单调性这一较弱的约束条件取代了经典测度可加性的刚性约束. Wang

等[19]引入了非可加测度(以下简称测度)的概念:

定义4 设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为一个非空有限集,$P(X)$为X的幂集,μ是定义在$P(X)$集上的测度,$\mu:P(X)\to[0,1]$满足如下条件:

1) $\mu(\varnothing)=0,\ \mu(X)=1$;

2) 对于所有的$A,B\subseteq X$,若$A\subseteq B$,则有$\mu(A)\subseteq\mu(B)$;

3) 对于所有的$A,B\subseteq X$,若$A\bigcap B=\varnothing$,则有$\mu(A\bigcup B)=\mu(A)+\mu(B)+\rho\mu(A)\mu(B),\rho\in(-1,+\infty)$.

特别地,若$\rho=0$,则定义4中的条件3)将退化为$\mu(A\bigcup B)=\mu(A)+\mu(B)$,表示$A$和$B$是独立的;若$\rho>0$,则$\mu(A\bigcup B)>\mu(A)+\mu(B)$,表示$A$和$B$具有相互辅助的作用;若$-1<\rho<0$,则$\mu(A\bigcup B)<\mu(A)+\mu(B)$,表示$A$和$B$具有相互削弱的作用.

Choquet积分是一种非常重要且应用广泛的模糊积分,是普通积分和多种模糊积分的扩展延伸. Choquet积分是从主观的角度衡量事物之间联系的有效工具,其在信息集成领域的应用成果也较为丰富[20]. 下面给出实值函数上Choquet积分的定义.

定义5 设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为一个非空有限集,$P(X)$为X的幂集,μ是定义在$P(X)$集上的测度,函数$f:X\to R$关于非可加测度μ的Choquet积分定义为

$$(\mathrm{C})\int f\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{n}\mu(X_{(i)})[f(x_{(i)})-f(x_{(i-1)})],\quad(7)$$

或等价表示为

$$(\mathrm{C})\int f\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{n}f(x_{(i)})[\mu(X_{(i)})-\mu(X_{(i+1)})].\quad(8)$$

其中:$X_{(\cdot)}$为集合X上一个置换,使得$f(x_{(1)})\leqslant f(x_{(2)})\leqslant\cdots\leqslant f(x_{(n)}),f(x_{(0)})=0,X_{(i)}=\{x_{(1)},\cdots,x_{(n)}\},X_{(n+1)}=\varnothing$.

例1 设$X=\{x_1,x_2,x_3\}$,μ是定义在$P(X)$集上的测度,有$\mu(\varnothing)=0,\mu(\{x_1\})=0.2,\mu(\{x_2\})=0.3,\mu(\{x_3\})=0.4,\mu(\{x_1,x_3\})=0.5,\mu(\{x_2,x_3\})=0.8,\mu(\{x_1,x_2,x_3\})=1$. 函数$f:P(X)\to[0,1]$,有$f(x_1)=0.7,f(x_2)=0.6,f(x_3)=0.8$. 因$f(x_2)<f(x_1)<f(x_3)$,所以有$X_{(1)}=\{x_2,x_1,x_3\},X_{(2)}=\{x_1,x_3\},X_{(3)}=\{x_3\}$. 由定义5可得

$$\begin{aligned}&(\mathrm{C})\int f\mathrm{d}\mu=\\&\mu(X_{(1)})[f(x_{(1)})-f(x_{(0)})]+\\&\mu(X_{(2)})[f(x_{(2)})-f(x_{(1)})]+\\&\mu(X_{(3)})[f(x_{(3)})-f(x_{(2)})]=\\&[0.6-0]\mu(\{x_1,x_2,x_3\})+\\&[0.7-0.6]\mu(\{x_1,x_3\})+[0.8-0.7]\mu(\{x_3\})=\\&0.6\times1+0.1\times0.5+0.1\times0.4=0.69.\end{aligned}$$

从例1的集成过程和结果可以看出,在实际计算过程中Choquet积分只考虑了$\{x_1\},\{x_1,x_3\}$和$\{x_1,x_2,x_3\}$之间的关联测度,并不能全面反映所有指标间的关联性,如$\{x_1,x_2\}$与$\{x_2,x_3\}$等之间的关联性就无法在计算中体现.

针对Choquet积分存在的上述缺陷,Wang等[16]提出了一种改进的模糊积分方法,即Zhenyuan积分,其优点是能反映所有指标间的关联性质. 目前,该积分已广泛应用于模式识别、信息融合等领域[20]. 其定义如下:

定义6 给定一个函数集$\mu:F\to[0,+\infty)$,满足$\mu(\varnothing)=0,A\in F$,函数$f:X\to[0,+\infty)$,则$A$上$f$关于$\mu$的积分用符号(W)$\int_{(A)}\mathrm{d}\mu$来表示,即

$$(\mathrm{W})\int_{(A)}f\mathrm{d}\mu=\sup\Big\{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\mu(E_j)|f\geqslant\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\chi_{E_j}\Big\}.\quad(9)$$

其中:$E_j\in F\bigcap A=\{E\bigcap A|E\subset F\},k\geqslant0,\lambda_j\geqslant0,\ j=1,2,\cdots,k,\chi$表示特征函数.

一般当X有限时,如$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,取其幂集$P(X)$为F, 则上确界一定在等式$f=\sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j\chi_{E_j}$成立时达到,此时,Zhenyuan积分可用如下简化形式表示[16,20]:

$$(\mathrm{W})\int_{(A)}f\mathrm{d}\mu=\max\Big\{\sum_{j=1}^{2^n-1}\lambda_j\mu(E_j\bigcap A)|f=\sum_{j=1}^{2^n-1}\lambda_j\chi_{E_j\bigcap A}\Big\}.\quad(10)$$

其中:$\lambda_j(j=1,2,\cdots,2^n-1)$可以是零,并且满足

$$E_j=\Big\{x_j\Big|\frac{j}{2^i}-\Big[\frac{j}{2^i}\Big]\geqslant\frac{1}{2},1\leqslant i\leqslant n\Big\}\subset X.$$

下面通过例子说明Zhenyuan积分与Choquet积分的区别.

例2 设某公司考虑对汽车产业(x_1)、计算机行业(x_2)和食品行业(x_3)这3个行业进行投资. 假设每个行业可投资的金额分别为10亿元、15亿元和8亿元. 公司既可单独对某一行业投资,也可进行组合投资,假设各种投资的收益情况如表1所示.

表1 投资收益表 亿元

投资组合	收益	投资组合	收益
$\varnothing$	0	$\{x_1,x_2\}$	1.3
$\{x_1\}$	0.4	$\{x_1,x_3\}$	0.8
$\{x_2\}$	0.6	$\{x_2,x_3\}$	1.5
$\{x_3\}$	0.7	$\{x_1,x_2,x_3\}$	1.8

这里可以将收益看成是定义在投资方案集 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ 的非空测度函数 μ, 且 $\mu(\varnothing)=0$ (此时表示不投资将得不到任何收益). 由表1可以看出: $\mu(x_1,x_2)>\mu(x_1)+\mu(x_2)$, 意味着 x_1 和 x_2 是一个良好的组合投资方案; 而 $\mu(x_1,x_3)<\mu(x_1)+\mu(x_3)$ 表示对 x_1 和 x_3 组合投资将降低收益. 设 f 是定义在投资方案 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ 上的投资额函数, 且 $f(x_1)=10$, $f(x_2)=15$ 和 $f(x_3)=8$. 假设投资者可以随意选择投资组合方案及金额, 下面计算投资的最大收益. 首先利用Choquet积分来计算投资总收益TR, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{TR}=&\sum_{i=1}^{3}f(x_{(i)})[\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})]=\\&8(\mu(\{x_1,x_2,x_3\})-\mu(\{x_1,x_2\}))+\\&10(\mu(\{x_1,x_2\})-\mu(\{x_2\}))+15\mu(\{x_2\})=\\&(15-10)\mu(\{x_2\})+(10-8)\mu(\{x_1,x_2\})+\\&8\mu(\{x_1,x_2,x_3\})=20.\end{aligned}$$

从而可以得到投资的最大总收益是20亿元.

如果利用Zhenyuan积分计算最大投资总收益, 则可得

$$\begin{cases}\mathrm{TR}=\max\{\lambda_1\mu(\{x_1\})+\lambda_2\mu(\{x_2\})+\\\quad\lambda_3\mu(\{x_1,x_2\})+\lambda_4\mu(\{x_3\})+\lambda_5\mu(\{x_1,x_3\})+\\\quad\lambda_6\mu(\{x_2,x_3\})+\lambda_7\mu(\{x_1,x_2,x_3\})\};\\\text{s.t. }\lambda_1+\lambda_3+\lambda_5+\lambda_7=10,\\\quad\lambda_2+\lambda_3+\lambda_6+\lambda_7=15,\\\quad\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7=8.\end{cases}$$

求解该方程, 得到最大总收益是22.6亿元, 比基于Choquet积分计算的最大总收益20亿元要大.

事实上, 这是一个投资组合优化问题, 可以用线性规划方法求解其最大投资收益, 即

$$\begin{cases}\mathrm{TR}=\max\{0.4k_1+0.6k_2+1.3k_3+0.7k_4+\\\quad0.8k_5+1.5k_6+1.8k_7\};\\\text{s.t. }k_1+k_3+k_5+k_7=10,\\\quad k_2+k_3+k_6+k_7=15,\\\quad k_4+k_5+k_6+k_7=8.\end{cases}$$

其中 k_i 表示不同的投资组合. 求解上述问题, 得到最大总收益是22.6亿元, 与上面用Zhenyuan积分求解的结果一致, 比通过Choquet积分来计算投资总收益大. 其原因是: Choquet积分在集成过程中没有全面反映出属性指标之间的关联度, 从而导致对方案作出过低的评价; 而Zhenyuan积分充分考虑了各投资方案之间的收益关联, 因此比Choquet积分更适合处理属性间具有关联关系的多属性决策问题.

3　直觉模糊Zhenyuan积分平均算子

本节研究基于Zhenyuan积分的直觉模糊信息集成集成方法, 首先提出直觉模糊Zhenyuan积分平均(IFZA)算子.

定义7　设 $\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},v_{\alpha_i})(i=1,2,\cdots,n)$ 是一组直觉模糊数, μ 是定义在非空有限集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的测度, 满足 $\mu(\varnothing)=0$, 若

$$\begin{aligned}&(\mathrm{W})\int_{(A)}f\mathrm{d}\mu=\mathrm{IFZA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\\&\max\Big\{\bigoplus_{j=1}^{2^n-1}\lambda_j\mu(E_j)|\alpha_i=\bigoplus_{j=1}^{2^n-1}\lambda_j\chi_{E_j}\Big\},\end{aligned}\tag{11}$$

则称IFZA为直觉模糊Zhenyuan积分平均算子. 其中: $\lambda_j=(\mu_{\lambda_j},v_{\lambda_j})$ 是直觉模糊数; χ 表示特征函数; 满足 $E_j=\Big\{x_j\Big|\dfrac{j}{2^i}-\Big[\dfrac{j}{2^i}\Big]\geqslant\dfrac{1}{2},1\leqslant i\leqslant n\Big\}$, $j=1,2,\cdots,2^n-1$.

下面举例说明IFZA算子的集成步骤与方法.

例3　设 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $\alpha_1=(0.4,0.6)$, $\alpha_2=(0.6,0.1)$ 和 $\alpha_3=(0.2,0.5)$ 是直觉模糊数, $\mu(\{x_1\})=\mu(\{x_2\})=0.5$, $\mu(\{x_3\})=0.3$, $\mu(\{x_1,x_2\})=0.8$, $\mu(\{x_1,x_3\})=0.7$, $\mu(\{x_2,x_3\})=0.7$, $\mu(\{x_1,x_2,x_3\})=1$.

根据定义7, 利用IFZA算子将以上直觉模糊数的集成过程转换成下面的线性规划问题:

$$\begin{cases}\max\Big\{\bigoplus_{j=1}^{7}\lambda_j\mu(E_j)\Big\};\\\text{s.t. }\lambda_1\oplus\lambda_3\oplus\lambda_5\oplus\lambda_7=\alpha_1,\\\quad\lambda_2\oplus\lambda_3\oplus\lambda_6\oplus\lambda_7=\alpha_2,\\\quad\lambda_4\oplus\lambda_5\oplus\lambda_6\oplus\lambda_7=\alpha_3.\end{cases}\tag{12}$$

其中 $\lambda_j=(\mu_{\lambda_j},v_{\lambda_j})$ 是直觉模糊数且满足 $E_j=\Big\{x_j\Big|\dfrac{j}{2^i}-\Big[\dfrac{j}{2^i}\Big]\geqslant\dfrac{1}{2},1\leqslant i\leqslant3\Big\}$, $j=1,2,\cdots,7$.

根据直觉模糊的运算法则, 方程(12)等价于如下最优化问题:

$$\begin{cases}\max\Big\{1-\prod_{j=1}^{7}(1-\mu_{\lambda_j})^{\mu(E_j)}-\prod_{j=1}^{7}(v_{\lambda_j})^{\mu(E_j)}\Big\};\\\text{s.t.}\\(1-\mu_{\lambda_1})(1-\mu_{\lambda_3})(1-\mu_{\lambda_5})(1-\mu_{\lambda_7})=1-\mu_{\alpha_1},\\(1-\mu_{\lambda_2})(1-\mu_{\lambda_3})(1-\mu_{\lambda_6})(1-\mu_{\lambda_7})=1-\mu_{\alpha_2},\\(1-\mu_{\lambda_4})(1-\mu_{\lambda_5})(1-\mu_{\lambda_6})(1-\mu_{\lambda_7})=1-\mu_{\alpha_3},\\v_{\lambda_1}v_{\lambda_3}v_{\lambda_5}v_{\lambda_7}=v_{\alpha_1},\\v_{\lambda_2}v_{\lambda_3}v_{\lambda_6}v_{\lambda_7}=v_{\alpha_2},\\v_{\lambda_4}v_{\lambda_5}v_{\lambda_6}v_{\lambda_7}=v_{\alpha_3},\\0<\mu_{\lambda_j}+v_{\lambda_j}<1,\ j=1,2,\cdots,7.\end{cases}\tag{13}$$

因为对于任意的实数$xy > 0$,有

$$\min\{x+y\} = \min\{x\} + \min\{y\},$$

所以

$$\max\Big\{1-\prod_{j=1}^{7}(1-\mu_{\lambda_j})^{\mu(E_j)}-\prod_{j=1}^{7}(1-v_{\lambda_j})^{\mu(E_j)}\Big\}=$$
$$1-\min\Big\{\prod_{j=1}^{7}(1-\mu_{\lambda_j})^{\mu(E_j)}+\prod_{j=1}^{7}(1-v_{\lambda_j})^{\mu(E_j)}\Big\}=$$
$$1-\min\Big\{\prod_{j=1}^{7}(1-\mu_{\lambda_j})^{\mu(E_j)}\Big\}-$$
$$\min\Big\{\prod_{j=1}^{7}(1-v_{\lambda_j})^{\mu(E_j)}\Big\}.$$

又因 $\ln\Big(\prod_{j=1}^{7}(1-\mu_{\lambda_j})^{\mu(E_j)}\Big)$ 和 $\prod_{j=1}^{7}(1-\mu_{\lambda_j})^{\mu(E_j)}$ 有相同的最小值μ_{λ_j},记 $x_j=\ln(1-\mu_{\lambda_j}), y_j=\ln(v_{\lambda_j})$,故方程(13)可等价为如下优化问题:

$$\begin{cases}\min\Big\{\sum_{j=1}^{7}\mu(E_j)(x_j+y_j)\Big\};\\ \text{s.t. } x_1+x_3+x_5+x_7=\ln(1-\mu_{\alpha_1}),\\ \quad x_2+x_3+x_6+x_7=\ln(1-\mu_{\alpha_2}),\\ \quad x_4+x_5+x_6+x_7=\ln(1-\mu_{\alpha_3}),\\ \quad y_1+y_3+y_5+y_7=\ln(v_{\alpha_1}),\\ \quad y_2+y_3+y_6+y_7=\ln(v_{\alpha_2}),\\ \quad y_4+y_5+y_6+y_7=\ln(v_{\alpha_3}),\\ \quad x_j-y_j>0,\ x_j<0,\ j=1,2,\cdots,7.\end{cases} \tag{14}$$

求方程(14),可得

$$\text{IFZA}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$$
$$\Big(1-\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{7}u_j\mu(E_j)},\mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{7}v_j\mu(E_j)}\Big)=(0.54,0.2).$$

若考虑利用直觉模糊Choquet积分平均(IFCA)算子[14]对上述问题进行集成,则根据IFCA算子的集成法可得

$$\text{IFCA}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$$
$$\alpha_2\mu(\{x_2\})\oplus\alpha_3(\mu(\{x_2,x_3\})-\mu(\{x_2\}))\oplus$$
$$\alpha_1(\mu(\{x_1,x_2,x_3\})-\mu(\{x_2,x_3\}))=(0.48,0.24).$$

由集成结果可以看出: $\text{IFZA}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)>\text{IFCA}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,其主要原因是IFCA算子只考虑了$\{x_2\}$、$\{x_2,x_3\}$和$\{x_1,x_2,x_3\}$之间的关联度,并不能全面反映所有属性间的关联性,如$\{x_1,x_2\}$与$\{x_1,x_3\}$等之间的关联性就无法体现,从而导致测度信息的损失;而IFZA算子可以改进IFCA算子的上述缺陷,在集成过程中能够充分反映出所有属性指标的关联关系,从而可避免信息损失,得到较为合理的集成结果.

下面证明经典的直觉模糊平均算子IFWA是IFZA算子的特例.

定理1 设μ是定义在非空集X的测度,对于任意的$A,B\subseteq X$和$A\bigcap B=\varnothing$,如果 $\mu(X)=1$且$\mu(A\bigcup B)=\mu(A)+\mu(B)$,则IFZA将退化为直觉模糊加权平均算子IFWA.

证明 根据模糊测度的性质,对于任意的$E_j\subseteq X$,有$\mu(E_j)=\sum_{x_i\in E_i}\mu(\{x_i\})$,由直觉模糊数的运算规则可得$\sum_{i=1}^{n}\lambda\alpha_i=\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$,从而有

$$\text{IFZA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=$$
$$\max\Big\{\bigoplus_{i=1}^{n}\Big(\bigoplus_{j=1}^{2^n-1}\lambda_j\chi_{E_j}\Big)\mu(x_i)|\alpha_i=\bigoplus_{j=1}^{2^n-1}\lambda_j\chi_{E_j}\Big\}=$$
$$\max\Big\{\bigoplus_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(x_i)\Big\}=$$
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(x_i)=\text{IFWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).\qquad\square$$

下面研究IFZA算子的一些重要性质.

定理2 设α_i和$\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$是两组直觉模糊数,μ是定义在非空集X的测度,若对于任意的$i\in[1,n]$,有$\alpha_i\leqslant\beta_i$,则有

$$\text{IFZA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\leqslant\text{IFZA}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n). \tag{15}$$

定理3 设α_i是一组直觉模糊数,μ是定义在非空集X的测度,若$(\hat\alpha_1,\hat\alpha_2,\cdots,\hat\alpha_n)$是$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$的任一转置,则有

$$\text{IFZA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\text{IFZA}(\hat\alpha_1,\hat\alpha_2,\cdots,\hat\alpha_n). \tag{16}$$

定理4 设$\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},v_{\alpha_i})(i=1,2,\cdots,n)$是一组直觉模糊数,$\mu$是定义在非空集$X$的测度,则通过式(11)集成得到的结果仍为直觉模糊数,且

$$\text{IFZA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=$$
$$\begin{cases}\max\Big\{\Big(1-\prod_{j=1}^{2^n-1}(1-\mu_{\lambda_j})^{\mu(E_j)},\ \prod_{j=1}^{2^n-1}v_{\lambda_j}^{\mu(E_j)}\Big)\Big\},\\ \text{s.t. } \alpha_i=\Big(1-\prod_{j=1}^{2^n-1}(1-\mu_{\lambda_j})^{\chi_{E_j}},\ \prod_{j=1}^{2^n-1}v_{\lambda_j}^{\chi_{E_j}}\Big).\end{cases} \tag{17}$$

其中$\lambda_j=(\mu_{\lambda_j},v_{\lambda_j})$是直觉模糊数且满足$E_j=\Big\{x_j\Big|\dfrac{j}{2^i}-\Big[\dfrac{j}{2^i}\Big]\geqslant\dfrac{1}{2},1\leqslant i\leqslant n\Big\},j=1,2,\cdots,2^n-1$.

根据IFZA算子的定义和直觉模糊数的运算规则,可容易证明定理2～定理4成立,具体的证明过程在此省略.

定理5 设$\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},v_{\alpha_i})(i=1,2,\cdots,n)$是一组直觉模糊数, μ是定义在非空集X的测度,则对于任意的$r>0$,有

$$\mathrm{IFZA}(r\alpha_1,r\alpha_2,\cdots,r\alpha_n)=r\mathrm{IFZA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).\tag{18}$$

证明 根据直觉模糊数的运算规则,对于任意的$r>0$有$\sum\limits_{i=1}^{n}r\alpha_i=r\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$,从而

$$\begin{aligned}&\mathrm{IFZA}(r\alpha_1,r\alpha_2,\cdots,r\alpha_n)=\\&\max\Big\{\sum_{j=1}^{2^n-1}\lambda_j\mu(E_j)|r\alpha_i=\sum_{j=1}^{2^n-1}\lambda_j\chi_{E_j}\Big\}=\\&\max\Big\{\sum_{j=1}^{2^n-1}\lambda_j\mu(E_j)|\alpha_i=\sum_{j=1}^{2^n-1}\frac{1}{r}\lambda_j\chi_{E_j}\Big\}.\end{aligned}$$

设$k_j=\dfrac{1}{r}\lambda_j$,则有

$$\begin{aligned}&\mathrm{IFZA}(r\alpha_1,r\alpha_2,\cdots,r\alpha_n)=\\&\max\Big\{\sum_{j=1}^{2^n-1}rk_j\mu(E_j)|\alpha_i=\sum_{j=1}^{2^n-1}k_j\chi_{E_j}\Big\}=\\&r\max\Big\{\sum_{j=1}^{2^n-1}k_j\mu(E_j)|\alpha_i=\sum_{j=1}^{2^n-1}k_j\chi_{E_j}\Big\}=\\&r\mathrm{IFZA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).\end{aligned}$$ □

4 基于IFZA算子的直觉模糊多属性决策方法

基于IFZA算子,本文提出一种直觉模糊环境下属性间具有关联关系的多属性决策方法.

Step 1: 对于直觉模糊环境下的多属性决策问题,设$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$为方案集, $G=\{G_1,G_2,\cdots,G_n\}$为属性指标集,专家对方案$A_i\in A$关于指标$G_j\in G$进行测度,从而构成直觉模糊决策矩阵$R=(\alpha_{ij})_{m\times n}$, $\alpha_{ij}=(\mu_{\alpha_{ij}},v_{\alpha_{ij}})$为直觉模糊数. 假设属性(指标)$G_j(j=1,2,\cdots,n)$都属于效益型,因此不需要标准化.

Step 2: 计算属性之间的关联度.

Step 3: 利用IFZA算子集结决策矩阵R中第i行评价值$\alpha_{ij}=(\mu_{\alpha_{ij}},v_{\alpha_{ij}})(i=1,2,\cdots,m)$,得到候选方案$A_i$的综合评价值$\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},v_{\alpha_i})(i=1,2,\cdots,m)$,即

$$\alpha_i=\mathrm{IFZA}(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{in}).\tag{19}$$

Step 4: 计算方案A_i的综合评价值$\alpha_i(i=1,2,\cdots,m)$的得分函数$S(\alpha_i)$和精确度函数$H(\alpha_i)$,进而利用排序规则对方案进行排序,得到最优的方案.

例4 某公司拟引进一套信息技术改进项目以提高其竞争力,现有10个候选方案,信息管理监督委员会从提升生产力(G_1)、特色化(G_2)以及优化管理(G_3)三个方面对候选方案进行评价. 专家对方案$A_i(i=1,2,\cdots,10)$在指标$G=\{G_1,G_2,G_3\}$下进行评价,评价值用直觉模糊数表示,得到的评价信息如表2所示.

表1 方案在3个指标上的评估值

方案	G_1	G_2	G_3
A_1	(0.7, 0.3)	(0.8, 0.1)	(0.9, 0.1)
A_2	(0.6, 0.2)	(0.8, 0.2)	(0.8, 0.1)
A_3	(0.4, 0.1)	(0.5, 0.3)	(0.5, 0.4)
A_4	(0.7, 0.3)	(0.8, 0.2)	(0.6, 0.3)
A_5	(0.5, 0.5)	(0.7, 0.3)	(0.4, 0.2)
A_6	(0.4, 0.3)	(0.6, 0.2)	(0.8, 0.1)
A_7	(0.3, 0.6)	(0.4, 0.3)	(0.2, 0.2)
A_8	(0.6, 0.1)	(0.5, 0.1)	(0.8, 0.2)
A_9	(0.4, 0.5)	(0.9, 0.1)	(0.3, 0.1)
A_{10}	(0.3, 0.5)	(0.6, 0.4)	(0.4, 0.1)

根据该公司的实际情况,专家一致认为指标G_1和G_2比G_3更重要,同时专家非常看好在提升生产力和优化管理两个方面都有很好表现的项目,因此,设$\mu(\{G_1\})=\mu(\{G_2\})=0.4$, $\mu(\{G_3\})=0.3$, $\mu(\{G_1,G_2\})=0.6$, $\mu(\{G_1,G_3\})=\mu(\{G_2,G_3\})=0.8$, $\mu(\{G_1,G_2,G_3\})=1$, $\mu(\varnothing)=0$. 根据以上信息,同时利用IFZA算子和IFCA算子计算每个方案的评价值,得到的集成结果如表3所示.

表2 基于IFCA和IFZA算子的集成结果

方案	IFZA	IFCA
A_1	(0.87, 0.10)	(0.82, 0.12)
A_2	(0.81, 0.11)	(0.77, 0.16)
A_3	(0.57, 0.08)	(0.53, 0.13)
A_4	(0.78, 0.21)	(0.71, 0.26)
A_5	(0.62, 0.27)	(0.56, 0.28)
A_6	(0.70, 0.13)	(0.65, 0.19)
A_7	(0.35, 0.28)	(0.33, 0.31)
A_8	(0.72, 0.08)	(0.66, 0.12)
A_9	(0.72, 0.14)	(0.69, 0.14)
A_{10}	(0.51, 0.24)	(0.49, 0.28)

根据直觉模糊得分函数与精确度函数,可以得到两种集成方法下备选方案的排序: 根据IFZA算子的方案排序结果为

$$\begin{aligned}&A_1\succ A_2\succ A_8\succ A_9\succ A_4\succ\\&A_6\succ A_3\succ A_5\succ A_{10}\succ A_7;\end{aligned}$$

由IFCA算子得到的方案排序结果为

$$\begin{aligned}&A_1\succ A_2\succ A_9\succ A_8\succ A_6\succ\\&\succ A_4\succ A_3\succ A_5\succ A_{10}\succ A_7.\end{aligned}$$

可以看出,通过IFZA和IFCA两种集成方法得到的最优方案相同,都是A_1. 进一步研究可以发现, IFZA算子得到的方案评估值要大于IFCA算子集成得到的结果,即$S_{\mathrm{IFZA}}(\alpha_i)>S_{\mathrm{IFCA}}(\alpha_i)(i=1,2,\cdots,10)$,且方案的排序不尽相同. 如$A_8$和$A_9$两个方案的

排序,根据IFZA算子有 $A_8 \succ A_9$;而由IFCA算子得到相反的排序结果,即 $A_9 \succ A_8$. 其主要原因是IFCA算子在集成过程中只考虑了部分指标的关联测度而造成测度信息的损失. 如本例中方案 A_8 损失的测度信息比 A_9 大 (A_8 损失了 $\mu(\{G_1\})$, $\mu(\{G_2\})$, $\mu(\{G_1, G_2\})$ 和 $\mu(\{G_2, G_3\})$, 而方案 A_9 损失了 $\mu(\{G_1\})$, $\mu(\{G_3\})$, $\mu(\{G_1, G_2\})$ 和 $\mu(\{G_1, G_3\})$), 从而导致对方案 A_8 作出过低的评价;而本文提出的IFZA算子改进了IFCA算子的这种缺陷,能全面地反映属性指标的关联关系,从而避免了测度信息的丢失,提高了集成结果的科学合理性.

5 结 论

为解决Choquet积分在处理直觉模糊关联多属性决策问题的不足,本文提出了直觉模糊Zhenyuan积分平均(IFZA)算子,并研究了其单调性和置换不变性等优良性质. 研究表明,虽然IFZA算子的计算稍比IFCA复杂,但是IFZA算子能够全面刻画属性之间的关联关系,改进了IFCA算子不能充分反映属性间的关联程度的缺陷,从而得到更为合理的决策结果. 最后研究了IFZA算子在直觉模糊多属性决策问题中的应用,提出了一种基于IFZA算子的决策方法,并通过实例验证了该方法的有效性和优良性. 未来的工作是研究其他形式的直觉模糊Zhenyuan积分算子,如直觉模糊Zhenyuan积分几何算子和直觉模糊诱导Zhenyuan积分算子等.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[3] 徐泽水. 直觉模糊信息集成理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 10-62.
(Xu Z S. Intuitionistic fuzzy information aggregation: Theory and applications[M]. Beijing: Science Press, 2008: 10-62.)

[4] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets: Theory and applications[M]. Heidelberg: Physica-Verlag, 1999: 25-50.

[5] 李登峰. 直觉模糊集决策与对策分析方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 2012: 8-36.
(Li D F. Intuitionistic fuzzy set decision making and game analysis methodologies[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2012: 8-36.)

[6] Xu Z S. Intuitionistic fuzzy aggregation operators[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2007, 15(6): 1179-1187.

[7] 余高锋, 李登峰, 邱锦明. 一类直觉模糊线性规划的求解及其应用[J]. 控制与决策, 2015, 30(4): 640-644.
(Yu G F, Li D F, Qiu J M. Solution to intuitionistic fuzzy linear programming and its application[J]. Control and Decision, 2015, 30(4): 640-644.)

[8] 王坚强, 李婧婧. 基于记分函数的直觉随机多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2010, 25(9): 1297-1306.
(Wang J Q, Li J J. Intuitionistic random multi-criteria decision-making approach based on score functions[J]. Control and Decision, 2010, 25(9): 1297-1306.)

[9] 曾守桢. 基于直觉模糊信息的综合评价问题研究[D]. 杭州: 浙江工商大学统计与数学学院, 2013.
(Zeng S Z. Study on the comprehensive evaluation technology based on intuitionistic fuzzy information[D]. Hangzhou: School of Statistics and Mathematics, Zhejiang Gongshang University, 2013.)

[10] 陈岩, 李庭. 基于Choquet积分的直觉不确定语言信息集结算子及其应用[J]. 控制与决策, 2016, 31(5): 842-852.
(Chen Y, Li T. Intuitionistic uncertain linguistic information aggregation operatorsbased on Choquet integral and their application[J]. Control and Decision, 2016, 31(5): 842-852.)

[11] Grabisch M. The application of fuzzy integrals in multi-criteria decision making[J]. European J of Operational Research, 1996, 89(3): 445-456.

[12] Tan C Q. A multi-criteria interval-valued intuitionistic fuzzy group decision making with Choquet integral-based TOPSIS[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(4): 3023-3033.

[13] Tan C Q, Chen X H. Intuitionistic fuzzy Choquet integral operator for multi-criteria decision making[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(1): 149-157.

[14] Xu Z S. Choquet integrals of weighted intuitionistic fuzzy information[J]. Information Sciences, 2010, 180(5): 726-736.

[15] Wu J Z, Chen F, Nie C P, et al. Intuitionistic fuzzy-valued Choquet integral and its application in multicriteria decision making[J]. Information Sciences, 2013, 222(4): 509-527.

[16] Wang Z Y, Leung K S, Wong M L, et al. A new type of nonlinear integrals and the computational algorithm[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 112 (2): 223-231.

[17] Chen S M, Tan J M. Handling multicriteria fuzzy decision making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 67(2): 163-172.

[18] Hong D H, Choi C H. Multicriteria fuzzy decision making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114(1): 103-113.

[19] Wang Z Y, Klir G J. Fuzzy measure theory[M]. New York: Plenum Press, 1992: 30-75.

[20] 王熙照. 模糊测度和模糊积分及在分类技术中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 21-72.
(Wang X Z. Fuzzy measures and fuzzy integral and their application in classification technique[M]. Beijing: Science Press, 2008: 21-72.)

(责任编辑：李君玲)