

# 带乘性噪声的非齐次 Markov 跳跃系统有限时间稳定性

周绍伟<sup>1,2†</sup>, 陈 兵<sup>1</sup>, 刘洪霞<sup>2</sup>

(1. 青岛大学 复杂性科学研究所, 山东 青岛 266071; 2. 山东科技大学 数学与系统科学学院, 山东 青岛 266590)

**摘 要:** 研究一类带乘性噪声的离散时间非齐次随机 Markov 跳跃系统的有限时间稳定性, 该系统的转移概率矩阵不是常矩阵而是区间矩阵. 在区间矩阵紧性的假设下, 将其表示为随机矩阵的凸组合. 首先, 给出系统有限时间稳定的充分必要条件; 其次, 利用 Lyapunov 方法和线性矩阵不等式技术得到系统有限时间稳定的充分条件, 并用于设计有限时间状态反馈镇定控制器; 最后, 通过仿真算例说明所提出方法的有效性.

**关键词:** 非齐次 Markov 跳跃系统; 区间转移概率矩阵; 有限时间稳定; 矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标志码: A

## Finite-time stability for nonhomogeneous Markov jump systems with multiplicative noises

ZHOU Shao-wei<sup>1,2†</sup>, CHEN Bing<sup>1</sup>, LIU Hong-xia<sup>2</sup>

(1. Institute of Complexity Science, Qingdao University, Qingdao 266071, China; 2. College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China)

**Abstract:** The finite-time stability for a class of discrete-time stochastic Markov jump systems with multiplicative noises is studied. The transition probability matrix is not a constant matrix but a interval matrix. Under the assumption of the compactness of the interval matrix, it is represented as a convex combination of some random matrices. Firstly, the sufficient and necessary condition of finite-time stability is given. Then, a sufficient condition for the finite-time stability of the system is obtained and the finite-time stabilization controller with state feedback is designed by using the Lyapunov method and linear matrix inequality technique. Finally, a simulation example is presented to illustrate the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** nonhomogeneous Markov jump systems; interval transition probability matrix; finite-time stability; matrix inequalities

## 0 引 言

在工程中存在大量由于突变现象而引起系统状态和参数跳变的动力学系统, Markov 跳跃系统模型因其能够很好地描述这类系统而广受关注, 日益成为控制理论研究的一个热点, 也得到了许多成熟、系统的结果<sup>[1-3]</sup>. 需要指出的是, 目前的研究大多是在齐次 Markov 过程的框架下完成的, 即假设系统在任意时刻的状态转移概率矩阵都是一样的. 实际上, 由于客观环境的影响, 这一假设很难实现. 例如, 在 Markov 跳跃网络化控制系统中, 其转移概率受网络状态的影响, 往往是时变的; 又如, 在故障易发制造系

统中, Markov 过程用来描述故障率, 其受到机器使用年限、使用率等时间因素的影响, 也不能用齐次过程来描述. 在诸多实际问题的驱动下, 人们将目光转向非齐次 Markov 跳跃系统.

就数学角度而言, 一种自然的假设就是将转移概率定义为随时间或系统状态变化而变化的确定性变量, 基于此, Seah 等利用交互多模型算法研究了离散时间 Markov 跳跃系统的估计问题<sup>[4]</sup>, Aberkane 则给出了这一系统的有界实引理<sup>[5]</sup>. 然而, 转移概率的时变特性往往伴随着随机性, 很难用特定的轨迹来描述, 这使得该方法在工程中的可行性受到了限制.

收稿日期: 2016-12-17; 修回日期: 2017-03-15.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61503224, 61473160); 山东省优秀中青年科学家科研奖励基金项目 (BS2014SF005); 山东省博士后创新项目专项资金项目 (201403009); 青岛市博士后应用研究项目; 山东省高等学校优秀中青年骨干教师国际合作培养计划项目; 山东科技大学科研创新团队支持计划项目 (2015TDJH105).

作者简介: 周绍伟 (1979—), 女, 副教授, 博士, 从事随机系统控制理论的研究; 陈兵 (1958—), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统、非线性系统等研究.

†通讯作者. E-mail: zsw9675@163.com

文献[6]对此进行了改进,将转移概率定义为随机变量,采用带约束的高斯概率密度函数来刻画其特性;文献[7]提出了一种双Markov链模型,即系统中存在两个Markov链,低阶的非齐次Markov链表示系统模态的跳跃,高阶的Markov链描述系统转移概率矩阵的随机变化,并研究了该模型的线性二次高斯问题. Hou等考虑了转移概率矩阵具有周期时变特性的情况,利用谱方法研究了离散时间Markov跳跃系统的能观性、能检性、稳定性<sup>[8]</sup>和 $H_2/H_\infty$ 控制问题<sup>[9]</sup>;针对某些系统在一定的采样间隔内转移概率不变或者变化缓慢的情况,Zhang提出了分段齐次离散时间Markov跳跃系统模型,并研究了系统的 $H_\infty$ 估计问题<sup>[10]</sup>;随后,Aberkane提出了一种转移概率矩阵在凸多面体上取值的离散时间非齐次Markov跳跃系统模型,涵盖了文献[10]中的一类模型,同时利用随机Lyapunov函数和线性矩阵不等式(LMI)方法给出了系统随机稳定的判据<sup>[11]</sup>. 这一模型更具一般性,因此受到了许多学者的关注,Yin等研究了这类系统的随机稳定性以及基于观测器的 $H_\infty$ 控制问题<sup>[12]</sup>,并将其用于直流电动机控制中<sup>[13]</sup>;Zhang等用LMI方法研究了系统的 $l_2-l_\infty$ 控制问题<sup>[14]</sup>以及 $H_\infty$ 控制问题,并应用于经济系统<sup>[15]</sup>.

近年来,考虑到转移概率的估计总是伴随着误差,Chitraganti等在文献[16-17]中假设转移概率在某个区间上取值,相应的转移概率矩阵就变成一个区间矩阵,反映了这类Markov跳跃系统的非齐次特性,并分别应用区间分析和Lyapunov方法研究了系统的均方稳定性和随机稳定性. 另外,关于随机系统的有限时间稳定性,较早的工作见文献[18],Zhang等研究了Itô系统的有限时间随机鲁棒稳定性,随后Yan等提出了该系统的有限时间环域稳定性<sup>[9]</sup>并推广到随机Markov跳跃系统<sup>[20]</sup>. 受上述文献启发,本文将区间转移概率矩阵应用于带乘性噪声的离散时间随机Markov跳跃系统,即将文献[20]中的系统由齐次变为非齐次,给出系统有限时间稳定的条件.

符号说明: $\mathbf{R}$ 表示实数集合; $\mathbf{R}^n$ 表示 $n$ 维欧氏空间; $\mathbf{R}^{n \times m}$ 表示 $n \times m$ 阶矩阵集合; $A^T$ 表示矩阵 $A$ 的转置; $\text{Tr}(A)$ 表示矩阵 $A$ 的迹; $A > 0$ 表示矩阵 $A$ 为正定矩阵; $\lambda_{\min}(A)$ ( $\lambda_{\max}(A)$ )表示矩阵 $A$ 的最小(最大)特征值; $\text{Cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ 表示矩阵 $A$ 的条件数,本文采取2-范数并设 $A$ 为正定矩阵,此时 $\text{Cond}(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$ ;  $\text{Diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ 表示以 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为对角元的分块对角矩阵; $P \leq_e Q$ 表示矩阵 $P$ 中的元素小于等于矩阵 $Q$ 中的对应元

素; $\mathbf{I}$ 表示单位矩阵; $E(\cdot)$ 表示数学期望; $I_{(B)}$ 表示集合 $B$ 的示性函数; $\delta_{ij}$ 表示Kronecker函数; $*$ 表示对称矩阵的对称部分; $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbf{N}_T = \{1, 2, \dots, T\}$ .

## 1 系统描述和预备知识

### 1.1 系统描述

考虑带乘性噪声的离散时间随机线性Markov跳跃系统

$$\begin{cases} x_{k+1} = A(r_k)x_k + C(r_k)x_k w_k, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

及对应的受控系统

$$\begin{cases} x_{k+1} = \\ A(r_k)x_k + B(r_k)u_k + [C(r_k)x_k + D(r_k)u_k]w_k, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $x_k \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态; $x_0 \in \mathbf{R}^n$ 为系统初始状态; $u_k \in \mathbf{R}^m$ 为控制输入; $A(\cdot), C(\cdot) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B(\cdot), D(\cdot) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 为系统系数矩阵.  $\{w_k \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{N}_0\}$ 为定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的实随机变量序列,满足 $E(w_k) = 0$ ,  $E(w_s w_t) = \delta_{st}$ . 跳跃过程 $\{r_k, k \in \mathbf{N}_0\}$ 为离散时间非齐次Markov链,其状态空间为 $S = \{1, 2, \dots, s\}$ ,时变转移概率为 $\pi_{ij}(k) = P(r_{k+1} = j | r_k = i)$ ,表示从 $k$ 时刻模态 $i$ 转移到 $k+1$ 时刻模态 $j$ 的概率, $\pi_{ij}(k) \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^s \pi_{ij}(k) = 1$ . 转移概率矩阵 $\Gamma_k = [\pi_{ij}(k)]$ 为一随机矩阵,这里假定为一区间矩阵.  $\{w_k, k \in \mathbf{N}_0\}$ 与 $\{r_k, k \in \mathbf{N}_0\}$ 相互独立.

为了方便,将 $r_k = i$ 时对应的系数矩阵 $M(r_k)$ 记为 $M_i$ .

下面给出系统有限时间稳定的定义.

**定义1** 如果有

$$E(x_0^T R x_0) \leq c_1 \Rightarrow E(x_k^T R x_k) \leq c_2, k \in \mathbf{N}_T, \quad (3)$$

则系统(1)称为关于 $(c_1, c_2, R, T)$ 有限时间稳定的. 其中: $c_2 > c_1 > 0$ ,  $T \in \mathbf{N}$ ,  $R > 0$ 为给定常数和矩阵.

### 1.2 区间转移概率矩阵

本文采用区间转移概率矩阵来描述Markov跳跃系统的非齐次特性,本节介绍相关理论知识.

**定义2** 矩阵中的元素为闭区间的矩阵称为区间矩阵,例如 $A = \begin{bmatrix} [1, 2] & [3, 4] \\ [5, 6] & [7, 8] \end{bmatrix}$ 为一区间矩阵. 若记

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, \text{则 } A = [A_1, A_2].$$

令  $\Omega_s = \{A : A \text{ 为 } s \times s \text{ 随机矩阵}\}, P, Q \in \mathbf{R}^{s \times s}$  为非负矩阵且  $P \leq_e Q$ . 定义  $\Omega_s$  上的区间矩阵

$$[P, Q] = \{A : A \text{ 为随机矩阵且 } P \leq_e A \leq_e Q\}. \quad (4)$$

区间矩阵的紧性是一个重要假设, 下面给出定义.

**定义3** 若  $P, Q$  满足  $p_{ij} = \min_{A \in [P, Q]} \{a_{ij}\}$  且  $q_{ij} = \max_{A \in [P, Q]} \{a_{ij}\}$ , 则称  $[P, Q]$  是紧的.

**注1** 一方面,  $[P, Q]$  的紧性可由

$$p_{ij} + \sum_{t \neq j} q_{it} \geq 1 \text{ 且 } q_{ij} + \sum_{t \neq j} p_{it} \leq 1 \quad (5)$$

来验证; 另一方面, 即使  $[P, Q]$  是非紧的, 也可以应用紧区间算法将其紧化, 得到与之等价的紧区间, 具体可参见文献[21]. 因此, 不妨有下面的假设.

**假设1**  $P, Q$  使得  $\Omega_s$  上的区间矩阵  $[P, Q] \neq \emptyset$ , 且  $[P, Q]$  是紧的.

在  $[P, Q]$  紧性的假设下,  $[P, Q]$  总可以表示成一个多面体, 其顶点可由下面的自由变量算法给出.

**Step 1:** 给定  $\Omega_s$  上的区间矩阵  $[P, Q], \Gamma_k \in [P, Q]$ .

**Step 2:** 对  $\Gamma_k$  的每一行, 选取一个位置作为自由变量.

1) 对于该行的其余位置, 通过选取  $P, Q$  对应的最大值和最小值, 获得只有一个自由变量的所有可能向量;

2) 在这些向量中, 利用随机向量元素之和为1的性质, 确定自由变量的值;

3) 将其余位置作为自由变量, 重复 Step 2.

**Step 3:** 对于  $\Gamma_k$  的所有行, 重复 Step 2.

**Step 4:** 将所得到的随机向量作为行进行组合, 可得到一系列随机矩阵  $V^1, V^2, \dots, V^K$ , 即为多面体的顶点.

假设系统(1)、(2)的转移概率矩阵  $\Gamma_k \in [P, Q]$ , 应用上述算法得到多面体的顶点  $V^1, V^2, \dots, V^K$ , 则  $\Gamma_k$  可以表示成它们的凸组合, 即

$$\Gamma_k = \sum_{l=1}^K \alpha_l(k) V^l, \quad 0 \leq \alpha_l(k) \leq 1, \quad \sum_{l=1}^K \alpha_l(k) = 1. \quad (6)$$

## 2 有限时间稳定与镇定

本节讨论系统(1)、(2)在区间转移概率矩阵  $\Gamma_k \in [P, Q]$  的假设下的有限时间稳定和镇定问题. 首先, 给出系统(1)有限时间稳定的充分必要条件.

**定理1** 系统(1)关于  $(c_1, c_2, R, T)$  有限时间稳

定的充分必要条件是

$$E(x_0^T R x_0) \leq c_1 \Rightarrow \text{Tr}(R X_i(k)) < c_2, \quad k \in N_T, \quad (7)$$

其中  $X_i(k) (i \in S)$  为差分方程

$$\begin{cases} X_i(k+1) = \\ \sum_{j=1}^s \left( \sum_{l=1}^K \alpha_l(k) v_{ji}^l (A_j X_j(k) A_j^T + C_j X_j(k) C_j^T) \right), \\ X_i(0) = E(x_0 x_0^T I_{(r_0=i)}) \end{cases} \quad (8)$$

的解,  $\forall \alpha_l(k)$  满足  $0 \leq \alpha_l(k) \leq 1, \sum_{l=1}^K \alpha_l(k) = 1$ . 这里,  $v_{ji}^l$  表示多面体顶点矩阵  $V^l$  的  $(j, i)$  元.

**证明** 令  $X_i(k) = E(x_k x_k^T I_{(r_k=i)})$ , 采用文献[22]中定理2.1的证明方法可得  $X_i(k)$  为式(8)的解. 而  $E(x_k^T R x_k) = E(\text{Tr}(R x_k x_k^T)) = \text{Tr}(R X_i(k))$ , 由定义1即可得证.  $\square$

定理1虽然提供了系统(1)有限时间稳定的充要条件, 但是由于  $\alpha_l(k)$  具有任意性, 很难去验证. 因此, 定理1的理论意义大于它的实际意义. 下面的定理将从可验证的角度给出系统(1)有限时间稳定的充分条件.

**定理2** 若对于某个正数  $\gamma \geq 1$  存在矩阵  $P_i > 0, \forall i \in S$ , 使得

$$A_i^T \left( \sum_{j=1}^s v_{ij}^l P_j \right) A_i + C_i^T \left( \sum_{j=1}^s v_{ij}^l P_j \right) C_i - \gamma P_i < 0, \quad (9)$$

以及

$$\gamma^T \text{Cond}(\bar{P}_i) < \frac{c_2}{c_1}, \quad \bar{P}_i = R^{-\frac{1}{2}} P_i R^{-\frac{1}{2}} \quad (10)$$

成立, 则系统(1)关于  $(c_1, c_2, R, T)$  有限时间稳定.

**证明** 令  $V(x_k, r_k = i) = x_k^T P_i x_k, \mathcal{F}_k$  是由  $\{(x_t, r_t), t = 0, 1, \dots, k\}$  生成的  $\sigma$  代数, 则

$$\begin{aligned} & E(V(x_{k+1}, r_{k+1} = j)) = \\ & E(E(x_{k+1}^T P_j x_{k+1} | \mathcal{F}_k)) = \\ & E\left(\sum_{j=1}^s x_{k+1}^T P_j x_{k+1} P(r_{k+1} = j | r_k = i)\right) = \\ & E\left(x_{k+1}^T \sum_{j=1}^s (P_j \pi_{ij}(k)) x_{k+1}\right) = \\ & E\left(x_{k+1}^T \left(\sum_{j=1}^s \sum_{l=1}^K \alpha_l(k) v_{ij}^l P_j\right) x_{k+1}\right) = \\ & E\left(x_k^T \left(A_i^T \left(\sum_{j=1}^s \sum_{l=1}^K \alpha_l(k) v_{ij}^l P_j\right) A_i + \right. \right. \end{aligned}$$

$$C_i^T \left( \sum_{j=1}^s \sum_{l=1}^K \alpha_l(k) v_{ij}^l P_j \right) C_i x_k =$$

$$E \left( x_k^T \left( \sum_{l=1}^K \alpha_l(k) \left( A_i^T \sum_{j=1}^s v_{ij}^l P_j A_i + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. C_i^T \sum_{j=1}^s v_{ij}^l P_j C_i \right) \right) x_k \right),$$

由式(9)可得

$$E(V(x_{k+1}, r_{k+1})) < \gamma E(V(x_k, r_k)),$$

因此

$$E(V(x_k, r_k)) < \gamma^k E(V(x_0, r_0)) \leq \gamma^T E(V(x_0, r_0)).$$

而

$$E(V(x_0, r_0)) =$$

$$E(x_0^T P_i x_0) = x_0^T R^{\frac{1}{2}} \bar{P}_i R^{\frac{1}{2}} x_0 \leq$$

$$\lambda_{\max}(\bar{P}_i) x_0^T R x_0 \leq \lambda_{\max}(\bar{P}_i) c_1,$$

$$E(V(x_k, r_k)) = E(x_k^T P_i x_k) =$$

$$E \left( x_k^T R^{\frac{1}{2}} \bar{P}_i R^{\frac{1}{2}} x_k \right) \geq$$

$$\lambda_{\min}(\bar{P}_i) E(x_k^T R x_k),$$

所以

$$E(x_k^T R x_k) \leq \frac{E(V(x_k, r_k))}{\lambda_{\min}(\bar{P}_i)} \leq \frac{c_1 \gamma^T \lambda_{\max}(\bar{P}_i)}{\lambda_{\min}(\bar{P}_i)} =$$

$$c_1 \gamma^T \text{Cond}(\bar{P}_i) < c_2.$$

根据定义可知,系统(1)关于  $(c_1, c_2, R, T)$  有限时间稳定.  $\square$

下面考虑系统(2)的有限时间镇定问题,即通过状态反馈  $u_k = K(r_k)x_k$  使闭环系统

$$\begin{cases} x_{k+1} = [A(r_k) + B(r_k)K(r_k)]x_k + \\ \quad [C(r_k) + D(r_k)K(r_k)]x_k w_k, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (11)$$

有限时间稳定.

**定理3** 若对于某个正数  $\gamma \geq 1$ , 存在矩阵  $Q_i > 0, Y_i, \forall i \in S$ , 使得

$$\begin{bmatrix} \Psi & 0 & \Phi(A_i Q_i + B_i Y_i) \\ * & \Psi & \Phi(C_i Q_i + D_i Y_i) \\ * & * & -\gamma Q_i \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

以及

$$c_1 \gamma^T I < R^{\frac{1}{2}} Q_i R^{\frac{1}{2}} < c_2 I \quad (13)$$

成立, 则通过状态反馈  $u_k = K(r_k)x_k$  使得系统(2)关

于  $(c_1, c_2, R, T)$  有限时间镇定, 且反馈增益为

$$K_i = Y_i Q_i^{-1}.$$

这里

$$\Psi = \text{Diag}(-Q_1, -Q_2, \dots, -Q_s),$$

$$\Phi = [\sqrt{v_{i1}^l} I, \sqrt{v_{i2}^l} I, \dots, \sqrt{v_{is}^l} I]^T.$$

**证明** 将式(9)中  $A_i, C_i$  换成  $A_i + B_i K_i, C_i + D_i K_i$ , 再由 Schur 补可知, 式(9)等价于

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & \Phi_1(A_i + B_i K_i) \\ * & \Psi_1 & \Phi_1(C_i + D_i K_i) \\ * & * & -\gamma P_i \end{bmatrix} < 0. \quad (14)$$

其中

$$\Psi_1 = \text{Diag}(-P_1, -P_2, \dots, -P_s),$$

$$\Phi_1 = [\sqrt{v_{i1}^l} P_1, \sqrt{v_{i2}^l} P_2, \dots, \sqrt{v_{is}^l} P_s]^T.$$

式(14)中令  $Q_i = P_i^{-1}, K_i Q_i = Y_i$ , 再左乘、右乘  $\text{Diag}(Q_1, Q_2, \dots, Q_s, Q_1, Q_2, \dots, Q_s, Q_i)$ , 即可得式(12).

由式(13)可知

$$c_1 \gamma^T I < R^{\frac{1}{2}} P_i^{-1} R^{\frac{1}{2}} < c_2 I,$$

即

$$\frac{1}{c_2} I < \bar{P}_i < \frac{1}{c_1 \gamma^T} I,$$

显然, 此时式(10)成立.  $\square$

### 3 数值例子

假定系统(2)的状态空间为  $S = \{1, 2, 3\}$ , 且有

$$P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_k \in [P, Q] = \begin{bmatrix} [0.1, 0.4] & 0.1 & [0.5, 0.8] \\ 0.3 & [0.1, 0.5] & [0.2, 0.6] \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix},$$

由式(5)容易验证  $[P, Q]$  是紧的, 即  $[P, Q]$  可以表示成一个多面体. 下面按 1.2 节中提供的算法求多面体的顶点.

对于第 1 行  $[x \ 0.1 \ z]$ , 选取  $x$  为自由变量, 则  $0.1 \leq x \leq 0.4$ . 选取  $P, Q$  对应该行其余位置的最小、最大值, 得到  $[x \ 0.1 \ 0.5], [x \ 0.1 \ 0.8]$ . 对于  $[x \ 0.1 \ 0.5]$ ,  $x = 1 - 0.1 - 0.5 = 0.4$ , 对于  $[x \ 0.1 \ 0.8]$ ,  $x = 1 - 0.1 - 0.8 = 0.1$ . 均满足  $0.1 \leq x \leq 0.4$  的条件, 故  $[0.4 \ 0.1 \ 0.5]$  和  $[0.1 \ 0.1 \ 0.8]$  为顶点中的第 1 行. 选取  $z$  为自由变量, 得到相同的结果.

对于第2行  $[0.3 \ y \ z]$ , 采取相同的步骤可以得到顶点中的第2行  $[0.3 \ 0.5 \ 0.2]$  和  $[0.3 \ 0.1 \ 0.6]$ . 将前两行进行组合, 并结合第3行  $[0.2 \ 0.4 \ 0.4]$  即可得到多面体的4个顶点

$$V^1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}, V^2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix},$$

$$V^3 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}, V^4 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

假定系统(2)的系数矩阵分别为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.38 & -1.23 \\ 0.15 & 0.87 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1.16 & 0.34 \\ -0.46 & 0.77 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.68 & -0.19 \\ 0.69 & 0.36 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -0.74 & 0.13 \\ 0.52 & 1.47 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.21 & 0.48 \\ -0.27 & 0.30 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} -0.37 & 0.61 \\ 0.14 & 1.51 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1.18 & 0.35 \\ -1.85 & -0.23 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1.05 & -0.16 \\ -0.89 & 0.66 \end{bmatrix},$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.50 \\ -0.04 & 0.73 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 1.34 & 0.77 \\ 0.32 & 1.93 \end{bmatrix},$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} -0.26 & 1.11 \\ 0.33 & -0.41 \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} 0.53 & 0.05 \\ -0.23 & 0.22 \end{bmatrix}.$$

给定常量  $c_1 = 0.5, c_2 = 10, R = I, T = 10$ . 对于  $\gamma = 1.01$ , LMIs(12)、(13)有解, 故系统(2)关于  $(0.5, 10, I, 10)$  有限时间镇定, 其状态反馈增益为

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1.1099 & -0.8325 \\ 0.9773 & -0.0638 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -1.8845 & -0.2615 \\ -1.7569 & 0.2086 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.8711 & -0.2980 \\ -0.3805 & -0.2878 \end{bmatrix}.$$

系统模态以及开环、闭环的  $E(x_k^T R x_k)$  分别如图1~图3所示.

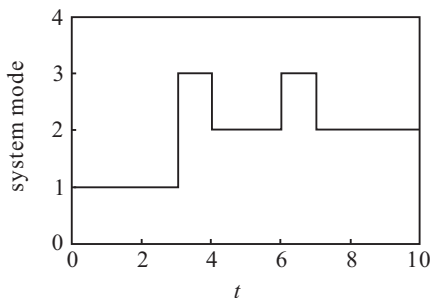


图1 系统模态

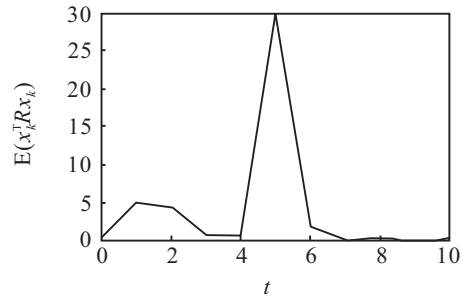


图2 开环系统  $E(x_k^T R x_k)$

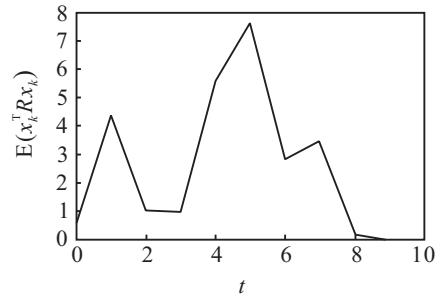


图3 闭环系统  $E(x_k^T R x_k)$

### 4 结论

本文考虑了一类带乘性噪声的离散时间非齐次Markov跳跃系统, 它的非齐次特性体现在区间转移概率矩阵上. 利用区间矩阵的紧性, 可将其表示为一个凸多面体, 顶点可由自由变量算法求得. 针对该系统给出了有限时间稳定的充要条件和充分条件, 应用LMI方法设计了镇定控制器. 在实际中, 齐次Markov跳跃系统的假设是很难满足的, 因此, 这一系统更具一般性, 其他控制问题的研究将陆续展开. 另外, 连续时间系统能否应用这一假设也将是一个开放问题.

### 参考文献(References)

- [1] Mao X R, Yuan C G. Stochastic differential equations with Markovian switching[M]. London: Imperial College Press, 2006.
- [2] Costa O L V, Fragoso M D, Todorov M G. Continuous-time Markov jump linear systems[M]. Berlin: Springer, 2013.
- [3] Costa O L V, Fragoso M D, Marques R P. Discrete-time Markov jump linear systems[M]. London: Springer, 2005.
- [4] Seah C E, Hwang I. State estimation for stochastic linear hybrid systems with continuous-state-dependent transitions: An IMM approach[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2009, 45(1): 376-391.
- [5] Aberkane S. Bounded real lemma for nonhomogeneous Markovian jump linear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2013, 58(3): 797-801.
- [6] 赵顺毅, 刘飞. 非线性非齐次Markov跳变系统的贝叶

- 斯滤波[J]. 自动化学报, 2012, 38(3): 485-490.  
(Zhao S Y, Liu F. Bayesian filtering for non-linear Markov jump systems with non-homogeneous transition probabilities[J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 38(3): 485-490.)
- [7] 张高生, 朱进, 谢宛青, 等. 一类离散时间非齐次马尔可夫跳跃系统最优控制[J]. 控制理论与应用, 2016, 33(1): 128-132.  
(Zhang G S, Zhu J, Xie W Q, et al. Optimal control for a class of discrete-time nonhomogeneous Markovian jump linear systems[J]. Control Theory & Applications, 2016, 33(1): 128-132.)
- [8] Hou T, Ma H J, Zhang W H. Spectral tests for observability and detectability of periodic Markov jump systems with nonhomogeneous Markov chain[J]. Automatica, 2016, 63: 175-181.
- [9] Hou T, Ma H J. Stochastic  $H_2/H_\infty$  control of discrete-time periodic Markov jump systems with detectability[C]. Proc of the 54th Annual Conf of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan. Hangzhou: IEEE Press, 2015: 530-535.
- [10] Zhang L X.  $H_\infty$  estimation of discrete-time piecewise homogeneous Markov jump linear systems[J]. Automatica, 2009, 45(11): 2570-2576.
- [11] Aberkane S. Stochastic stabilization of a class of nonhomogeneous Markovian jump linear systems[J]. Systems and Control Letters, 2011, 60(3): 156-160.
- [12] Yin Y Y, Shi P, Liu F, et al. Observer-based  $H_\infty$  control on nonhomogeneous discrete-time Markov jump systems[J]. J of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2013, 135(4): (041016)1-8.
- [13] Yin Y Y, Shi P, Liu F, et al. Robust control for nonhomogeneous Markov jump processes: An application to DC motor device[J]. J of the Franklin Institute, 2014, 351(6): 3322-3338.
- [14] Zhang Y J, Ou Y S, Zhou Y M, et al. Observer-based  $l_2-l_\infty$  control for discrete-time nonhomogeneous Markov jump Lur'e systems with sensor saturations[J]. Neurocomputing, 2015, 162: 141-149.
- [15] Zhang Y J, Ou Y S, Zhou Y M, et al.  $H_\infty$  filtering for discrete-time piecewise homogeneous Markov jump Lur'e systems with application to economic systems[C]. Proc of the 40th Annual Conf of the IEEE. Dallas: IEEE Press, 2014: 176-182.
- [16] Chitraganti S, Aberkane S, Aubrun C. Mean square stability of non-homogeneous Markov jump linear systems using interval analysis[C]. Proc of 2013 European Control Conf. Zurich: IEEE Press, 2013: 3724-3729.
- [17] Chitraganti S, Aberkane S, Aubrun C. Stochastic stabilization of a discrete-time inhomogeneous Markov jump linear system with interval transition probability matrix[C]. Proc of 2016 Conf on Control and Fault-Tolerant Systems. Barcelona: IEEE Press, 2016: 838-842.
- [18] Zhang W H, An X Y. Finite-time control of linear stochastic systems[J]. Int J of Innovative Computing, Information and Control, 2008, 4(3): 689-696.
- [19] Yan Z G, Zhang G S, Zhang W H. Finite-time stability and stabilization of linear Itô stochastic systems with state and control-dependent noise[J]. Asian J of Control, 2013, 15(1): 270-281.
- [20] Yan Z G, Zhang W H, Zhang G S. Finite-time stability and stabilization of Itô stochastic systems with Markovian switching: Mode-dependent parameter approach[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2015, 60(9): 2428-2433.
- [21] Hartfield D. Markov set-chains[M]. Berlin: Springer, 1998: 31-32.
- [22] 侯婷. 离散时间Markov跳变系统的稳定性与鲁棒  $H_2/H_\infty$  控制[D]. 青岛: 山东科技大学信息与电气工程学院, 2010.  
(Hou T. Stability and robust  $H_2/H_\infty$  control for discrete-time Markov jump systems[D]. Qingdao: College of Information and Electrical Engineering, Shandong University of Science and Technology, 2010.)

(责任编辑: 闫妍)