

# 一类活动边界分布参数系统的移动控制策略

张建中<sup>†</sup>, 崔宝同

(江南大学 物联网工程学院, 江苏 无锡 214122)

**摘要:** 针对一类具有活动边界的分布参数系统, 考虑移动传感器/执行器的动力学行为, 研究其移动控制问题. 考虑并列的传感器/执行器, 通过传感器对系统的状态进行测量并将测量值传递给执行装置中的控制器. 根据传感器之间不同的信息传递方式分别设计相应的控制器, 基于无穷维抽象发展方程理论和Lyapunov方法得到相应的移动控制策略, 并证明所提出的移动控制策略与系统的活动边界之间的关系. 最后通过仿真结果验证所提出策略的有效性.

**关键词:** 分布参数系统; 活动边界; 移动传感网络; 移动控制

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Mobile control strategies for a class of distributed parameter systems with moving boundaries

ZHANG Jian-zhong<sup>†</sup>, CUI Bao-tong

(School of IoT Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

**Abstract:** A mobile control problem is studied for a class of distributed parameter systems with moving boundaries under the condition of dynamic behaviors of mobile sensors/actuators. The collocated sensor/actuator networks are considered, the measurements of the systems are obtained by sensors and are dispensed to controllers which are equipped on actuating devices. Appropriate controllers are designed according to different modes of messaging of the sensors. A corresponding mobile strategy of the sensor/actuator is presented based on the infinite dimensional abstract evolution equation theory and the Lyapunov's method. Furthermore, the relations between the proposed mobile policy and the moving boundary are proven. Simulation results show that the proposed policy is effective.

**Keywords:** distributed parameter system; moving boundary; mobile sensor networks; mobile control

## 0 引言

近年来,随着移动传感器/执行器网络的快速发展,移动控制受到越来越多学者的关注<sup>[1-3]</sup>. 与传统的固定控制相比,移动控制相当于又增加了一个控制维度,因此它具有增强系统性能、节约能量、实时性强等优点<sup>[4]</sup>. 然而,移动控制必然导致控制器在空间上的变化,能反映这种空间变化的系统被称为分布参数系统,一般采用偏微分方程表示,如大多数化工过程、生态环境系统、各类弹性体的运动等. 因此,基于分布参数系统的移动控制研究更具理论和实际意义<sup>[5-12]</sup>.

20世纪80年代,Butkovskii等<sup>[6]</sup>对分布参数系统的移动控制理论进行了研究与展望. 90年代初,Khpalov<sup>[7-8]</sup>也对分布参数系统的移动控制和观测

做了很多基础工作. 21世纪以来,基于移动传感器/执行器网络,国内外学者在分布参数系统的移动控制或移动观测方面进行了广泛的研究. Liang等<sup>[9]</sup>针对一类扩散过程,构建了一个基于CVT(central voronoi tessellations)算法的移动传感器/执行器二维仿真平台,然而,其传感器/执行器的移动策略是由固定在区域内的传感器的测量值基于CVT算法得到的,与系统的状态方程无关;Demetriou<sup>[10]</sup>直接根据分布参数系统的状态方程,基于无穷维算子理论与Lyapunov稳定性方法,得到了并列的传感器/执行器的移动策略. 之后,文献[11]考虑了增加执行器的动力学行为并给出了单个执行器的移动策略. 江正仙等<sup>[12]</sup>研究了多个传感器智能体在考虑其动力学行为以及防碰

收稿日期: 2017-02-18; 修回日期: 2017-05-17.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61174021, 61473136).

责任编委: 吴淮宁.

作者简介: 张建中(1979—), 男, 博士生, 从事基于分布参数系统的移动传感器执行器网络的控制理论与应用的研究; 崔宝同(1960—), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统控制理论与应用等研究.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: zhangjz2018@163.com

撞的前提下,移动传感器网络对一类分布参数系统的控制问题.

以上移动控制或移动观测研究都是基于固定边界分布参数系统的.近年来,活动边界分布参数系统因其广泛的应用背景而受到越来越多学者的关注,例如晶体生长过程<sup>[13-14]</sup>、石油钻探中钻柱的扭转<sup>[15]</sup>,以及轧钢过程、柔性梁的振动、液滴飞溅过程等<sup>[16]</sup>.活动边界是指系统的空间域是变化的,具有时间依赖性.文献[13-14]以晶体的生长过程为研究对象证明了这种空间域的时间依赖特性对控制器的设计有很大影响,但是没有给出具体的移动策略.目前基于移动传感器/执行器网络的活动边界分布参数系统的移动控制策略还鲜有报道.

本文以活动边界分布参数系统为研究对象,应用无穷维系统的抽象发展方程理论,基于Lyapunov稳定性方法,考虑移动传感器/执行器的动力学行为,得到使该活动边界分布参数系统渐近稳定的传感器/执行器的移动控制策略.验证系统的活动边界特性对相应的移动控制力设计的重要影响,并通过仿真例子验证所设计移动策略的有效性.

## 1 问题描述

考虑如下多输入多输出活动边界分布参数系统:

$$\frac{\partial x(t, z)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 x(t, z)}{\partial z^2} + \sum_{i=1}^N b_i(z; z_i^a(t)) u_i(t),$$

$$y_i(t) = \int_0^{h(t)} c_i(z; z_i^s(t)) x(t, z) dz, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

及相应的初始条件

$$x(0, z) = x_0(z), \quad (2)$$

以及边界条件

$$d_1 x(t, 0) + e_1 \frac{\partial x}{\partial z}(t, 0) = r_1,$$

$$d_2 x(t, h(t)) + e_2 \frac{\partial x}{\partial z}(t, h(t)) = r_2. \quad (3)$$

在上述系统(1)~(3)中: $x(t, z) \in R$ 是系统的状态变量, $t \in R^+$ 是时间, $z \in [0, h(t)]$ 是空间坐标; $\alpha > 0$ 是扩散系数; $h(t)$ 是系统的活动边界; $u_i(t)$ 是相应的控制输入;函数 $b_i(z; z_i^a(t))$ 和 $c_i(z; z_i^s(t))$ 是已知函数,分别表示执行器和传感器在时变区域 $[0, h(t)]$ 内的空间分布,其中 $z_i^a(t)$ 和 $z_i^s(t)$ 分别表示第 $i$ 个执行器和第 $i$ 个传感器在 $[0, h(t)]$ 内的空间位置; $y_i(t) \in R$ 是第 $i$ 个传感器的测量输出; $x_0(z)$ 是系统初始状态值; $d_1, e_1, d_2, e_2, r_1, r_2$ 均为实数.

移动控制策略与活动边界 $h(t)$ 的关系是本文考

虑的关键问题,根据实际背景, $h(t)$ 满足如下假设.

**假设1**  $h(t)$ 是已知的光滑函数并且对于任意 $t \in [0, \infty)$ 满足 $\dot{h}(t) \geq 0$ ,  $h(t) \in (0, h_{\max}]$ ,其中 $h_{\max}$ 是一个有限值.

本文应用抽象发展方程理论<sup>[14]</sup>解决相关问题.设 $\mathcal{H}_2$ 是定义在 $\Omega(t) = [0, h(t)]$ 上的Hilbert空间,在 $\mathcal{H}_2$ 上定义内积

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int_{\Omega(t)} \phi_1(z) \phi_2(z) dz,$$

以及由该内积诱导的范数

$$\|\phi\|_2 = \langle \phi, \phi \rangle^{1/2}.$$

在Hilbert空间 $\mathcal{H}_2$ 内,令

$$x(t) = x(t, z), \quad t > 0, \quad z \in [0, h(t)],$$

系统的二阶时变算子 $\mathcal{A}(t)$ 为

$$\mathcal{A}(t)x(t) = \alpha \frac{\partial^2 x(t, z)}{\partial z^2} + \dot{h}(t) \frac{z}{h(t)} \frac{\partial x(t, z)}{\partial z},$$

定义域为

$$\text{Dom}(\mathcal{A}(t)) = \left\{ x \in \mathcal{H}_2 \mid x, \frac{\partial x}{\partial z} \text{绝对连续}, \right. \\ \left. \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \in \mathcal{H}_2, \right. \\ \left. d_1 x(t, 0) + e_1 \frac{\partial x}{\partial z}(t, 0) = r_1, \right. \\ \left. d_2 x(t, h(t)) + e_2 \frac{\partial x}{\partial z}(t, h(t)) = r_2 \right\}.$$

系统的输入和输出算子为

$$\mathcal{B}(z^a(t)) = (\mathcal{B}_1(z_1^a(t)), \mathcal{B}_2(z_1^a(t)), \dots, \mathcal{B}_N(z_N^a(t))), \\ \mathcal{C}(z^s(t)) = (\mathcal{C}_1(z_1^s(t)), \mathcal{C}_2(z_1^s(t)), \dots, \mathcal{C}_N(z_N^s(t)))^T,$$

其中 $\mathcal{B}_i(z_i^a(t))$ 和 $\mathcal{C}_i(z_i^s(t))$ 分别满足

$$\mathcal{B}_i(z_i^a(t)) u_i(t) = b_i(z; z_i^a(t)) u_i(t), \\ \mathcal{C}_i(z_i^s(t)) x = \langle c_i(z; z_i^s(t)), x \rangle.$$

易知,当 $b_i(z) = c_i(z)$ 时,输出算子是输入算子的共轭算子,即 $\mathcal{C}(z^s(t)) = \mathcal{B}^*(z^a(t))$ .

于是,在Hilbert空间 $\mathcal{H}_2$ 内,活动边界分布参数系统(1)~(3)可以写为如下发展方程的形式:

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}(t)x(t) + \mathcal{B}(z^a(t))u(t), \quad x(0) = x_0; \\ y = \mathcal{C}(z^s(t))x(t). \quad (4)$$

容易证明,算子 $\mathcal{A}(t)$ 满足有界性和对称性,算子 $-\mathcal{A}(t)$ 满足强制性<sup>[10]</sup>.下述假设保证了系统(4)的稳定性并且简化了定理的证明.

**假设2** 算子 $\mathcal{A}(t)$ 是可微的并且对于任意 $\phi \in \mathcal{H}_2$ ,满足 $\langle \dot{\mathcal{A}}(t)\phi, \phi \rangle \geq 0$ ,其中 $\dot{\mathcal{A}}(t)$ 是算子 $\mathcal{A}(t)$ 对时间 $t$ 的导数.

**注1** 算子  $\mathcal{A}(t)$  中的时变项  $h(t) \frac{z}{h(t)} \frac{\partial x(t, z)}{\partial z}$  是由系统边界的移动而产生的对流运输项,它存在于系统内部,对控制器的设计有很大影响<sup>[13]</sup>.

本文考虑活动边界系统的移动控制问题. 一般而言,移动控制要解决如下两个问题.

**问题1** 控制器的设计问题.

**问题2** 在相应的控制器下,执行器的动力学行为问题,即对执行器的控制力设计问题.

由于设计不同的控制器会得到不同的控制力. 为了简化问题1和问题2的设计及系统的稳定性分析,本文假设每个移动智能体上安装了一个传感器和一个执行器,并满足如下定义<sup>[10]</sup>.

**定义1** 传感器和执行器是并列的,如果

$$z_i^a(t) = z_i^s(t) \text{ 且 } b_i(z; z_i^a(t)) = c_i(z; z_i^s(t)).$$

由上述定义可知,本文中传感器/执行器的空间分布选取为如下的常见形式:

$$b_i(z; z_i^a) = c_i(z; z_i^a) = H_{z_i^a - \varepsilon}(z) - H_{z_i^a + \varepsilon}(z) = \begin{cases} 1, & z \in [z_i^a - \varepsilon, z_i^a + \varepsilon]; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $\varepsilon > 0$ ,  $H_\theta(z) \triangleq H(z - \theta)$  是 Heaviside 函数.

最后,假设每个移动智能体的位置状态  $z_i^a(t)$  和速度状态  $\dot{z}_i^a(t)$  是可测的,并满足如下动力学方程:

$$m_i \ddot{z}_i^a(t) + p_i \dot{z}_i^a(t) + q_i z_i^a(t) = f_i(t), \\ z_i^a(0) = z_{i0}, \dot{z}_i^a(0) = 0, i = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

其中:  $m_i$  是智能体质量,  $p_i, q_i$  是相关动力学系数,  $f_i(t)$  是需要设计的控制力.

## 2 主要结果

本节主要解决移动控制的问题2,即移动智能体相应的控制力设计问题. 如前所述,不同的控制律会影响控制力的设计. 定理1考虑传感器之间互不通信,设计一个简单的输出反馈控制律,并得到相应的对智能体的控制力.

**定理1** 考虑活动边界分布参数系统(1)~(3),移动智能体的动力学方程为(6),若反馈控制律设计为

$$u_i(t) = -k_i y_i(t) = -k_i \int_0^{h(t)} b_i(z; z_i^a(t)) x(t, z) dz, \quad (7)$$

移动智能体的运动控制力设计为

$$f_i(t) = 2k_i y_i(t) \Delta x_i - \gamma_i \dot{z}_i^a(t) - \frac{\mu_2 \beta_0^2 \dot{h}(t)}{N h(t) \dot{z}_i^a(t)}. \quad (8)$$

其中

$$\Delta x_i = x(t, z_i^a(t) + \varepsilon) - x(t, z_i^a(t) - \varepsilon), \\ \gamma_i \geq -p_i, i = 1, 2, \dots, N.$$

则活动边界分布参数系统(1)~(3)在移动控制律(7)作用下实现渐近稳定.

**证明** 考虑反馈控制律(7),发展方程(4)变为

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}(t)x(t) - \sum_{i=1}^N k_i \mathcal{B}_i \mathcal{B}_i^* x(t) = (\mathcal{A}(t) - \mathcal{B}K\mathcal{B}^*)x(t) = \mathcal{A}_{cl}(z_i^a(t))x(t). \quad (9)$$

构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t). \quad (10)$$

其中:  $V_1(t) = -\langle x(t), \mathcal{A}_{cl}(z_i^a(t))x(t) \rangle$  是闭环系统在控制  $u$  下的能量,  $V_2(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{z}_i^a(t))^2$  是移动智能体的动能之和,  $V_3(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i (z_i^a(t))^2$  与移动智能体势能的平方相关.

对于所有非零状态点  $x(t)$ , 首先证明函数  $V(t)$  的正定性. 显然,  $V_2(t)$  和  $V_3(t)$  是正定的. 下面证明存在  $\mu_2 > \mu_1 > 0$  满足  $\mu_1 \|x(t)\|^2 \leq V_1(t) \leq \mu_2 \|x(t)\|^2$ . 由假设算子  $\mathcal{A}(t)$  的有界性及强制性可得

$$V_1(t) \leq |-\langle x(t), \mathcal{A}_{cl}(z_i^a(t))x(t) \rangle| = |\langle x(t), (\mathcal{A}(t) - \mathcal{B}K\mathcal{B}^*)x(t) \rangle| \leq \alpha_1 \|x(t)\|^2 + |\langle x(t), \mathcal{B}K\mathcal{B}^* x(t) \rangle| \leq \alpha_1 \|x(t)\|^2 + \lambda_{\max}(K) \|\mathcal{B}^*\|^2 \|x(t)\|^2 = (\alpha_1 + \lambda_{\max}(K) \|\mathcal{B}^*\|^2) \|x(t)\|^2, \quad (11)$$

$$V_1(t) = -\langle x(t), \mathcal{A}_{cl}(z_i^a(t))x(t) \rangle = -\langle x(t), \mathcal{A}(t)x(t) \rangle + \langle \mathcal{B}^* x(t), K\mathcal{B} x(t) \rangle \geq \alpha_2 \|x(t)\|^2 + |\langle x(t), \mathcal{B}K\mathcal{B}^* x(t) \rangle| \geq \alpha_2 \|x(t)\|^2 + \lambda_{\min}(K) \|\mathcal{B}^*\|^2 \|x(t)\|^2 = (\alpha_2 + \lambda_{\min}(K) \|\mathcal{B}^*\|^2) \|x(t)\|^2. \quad (12)$$

其中:  $\alpha_1 > 0$  和  $\alpha_2 > 0$  分别是有界性和强制性的系数,  $\lambda_{\min}(K)$  和  $\lambda_{\max}(K)$  是矩阵  $K$  的最小和最大特征值. 由式(11)和(12)可得

$$\mu_1 \|x(t)\|^2 \leq V_1(t) \leq \mu_2 \|x(t)\|^2. \quad (13)$$

其中

$$\mu_1 = \alpha_2 + \lambda_{\min}(K) \|\mathcal{B}^*\|^2, \\ \mu_2 = \alpha_1 + \lambda_{\max}(K) \|\mathcal{B}^*\|^2.$$

下面计算  $V(t)$  沿系统(9)的轨迹对  $t$  的导数:

$$\dot{V}(t) = \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t). \quad (14)$$

应用Leibnitz定理<sup>[13]</sup>,可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & -\langle \dot{x}, \mathcal{A}_{cl}(z_i^a(t))x \rangle - \\ & \langle x, \mathcal{A}_{cl}(z_i^a(t))\dot{x} \rangle - \left\langle x, \frac{d}{dt}(\mathcal{A}_{cl}(z_i^a(t)))x \right\rangle - \\ & x(t)\mathcal{A}_{cl}(z_i^a(t))x|_{z=h(t)}\dot{h}(t) = \\ & -\langle \mathcal{A}_{cl}(z_i^a(t))x, \mathcal{A}_{cl}(z_i^a(t))x \rangle - \\ & \langle x, \mathcal{A}_{cl}(z_i^a(t))^2x \rangle - \left\langle x, \frac{d}{dt}(\mathcal{A}_{cl}(z_i^a(t)))x \right\rangle - \\ & \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} \int_0^{h(t)} x(t, h(t))\mathcal{A}_{cl}(z_i^a(t))x(t, h(t)) dz = \\ & -2|\mathcal{A}_{cl}(z_i^a(t))x|^2 - \left\langle x, \frac{d}{dt}(\mathcal{A}_{cl}(z_i^a(t)))x \right\rangle + \\ & \frac{V_1(t, h(t))\dot{h}(t)}{h(t)} = \\ & -2|\mathcal{A}_{cl}(z_i^a(t))x|^2 - \langle x, \dot{\mathcal{A}}(t)x \rangle + \\ & \left\langle x, \frac{d}{dt}(\mathcal{B}(z^a(t))K\mathcal{B}^*(z^a(t)))x \right\rangle + \\ & \frac{V_1(t, h(t))\dot{h}(t)}{h(t)}. \end{aligned} \quad (15)$$

由式(13)可知

$$\frac{V_1(t, h(t))\dot{h}(t)}{h(t)} \leq \frac{\mu_2 \|x(t, h(t))\|^2 \dot{h}(t)}{h(t)} \leq \frac{\mu_2 \beta_0^2 \dot{h}(t)}{h(t)}, \quad (16)$$

其中  $\beta_0$  是边界条件确定的常数. 事实上, 由  $\frac{\partial x}{\partial z}$  的绝对连续性可知  $\frac{\partial x}{\partial z}$  有界, 假设  $\left\| \frac{\partial x}{\partial z} \right\| \leq M, M \in R^+$ , 则由边界条件(3)可得

$$\|x(t, h(t))\| \leq \frac{1}{d_2} (\|r_2\| + \|e_2\|M) := \beta_0.$$

在式(15)中, 易证

$$\left\langle x, \frac{d}{dt}(\mathcal{B}K\mathcal{B}^*)x \right\rangle = -2 \sum_{i=1}^N \dot{z}_i^a(t) k_i y_i(t) \Delta x_i, \quad (17)$$

而

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t) = & \sum_{i=1}^N \dot{z}_i^a(m_i \dot{z}_i^a + q_i z_i^a) = \\ & \sum_{i=1}^N \dot{z}_i^a(f_i(t) - p_i \dot{z}_i^a). \end{aligned} \quad (18)$$

联合式(14)~(18), 当  $f_i(t)$  设计为式(8), 且  $\dot{z}_i^a(t) \neq 0$  时, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -2|\mathcal{A}_{cl}(z_i^a(t))x(t)|^2 - \langle x(t), \dot{\mathcal{A}}(t)x(t) \rangle + \\ & \sum_{i=1}^N (-2\dot{z}_i^a(t) k_i y_i \Delta x_i) + \frac{\mu_2 \beta_0^2 \dot{h}(t)}{h(t)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \dot{z}_i^a(f_i(t) - p_i \dot{z}_i^a(t)) = \\ & -2|\mathcal{A}_{cl}(z_i^a(t))x(t)|^2 - \langle x(t), \dot{\mathcal{A}}(t)x(t) \rangle + \\ & \sum_{i=1}^N \dot{z}_i^a(t) \left( -2k_i y_i(t) \Delta x_i + \frac{\mu_2 \beta_0^2 \dot{h}(t)}{N \dot{z}_i^a(t) h(t)} + \right. \\ & \left. f_i(t) - p_i \dot{z}_i^a(t) \right) = \\ & -2|\mathcal{A}_{cl}(z_i^a(t))x(t)|^2 - \langle x(t), \dot{\mathcal{A}}(t)x(t) \rangle - \\ & \sum_{i=1}^N (\gamma_i + p_i) (\dot{z}_i^a(t))^2. \end{aligned} \quad (19)$$

由假设2可知, 当  $x(t) \neq 0$  时, 有

$$-2|\mathcal{A}_{cl}(z_i^a(t))x(t)|^2 - \langle x(t), \dot{\mathcal{A}}(t)x(t) \rangle < 0, \quad (20)$$

因此, 若  $\gamma_i \geq -p_i$ , 联合式(19)和(20), 可得  $\dot{V}(t) < 0$ .

综上, 对所有非零状态  $x(t)$ ,  $V(t)$  正定且  $\dot{V}(t) < 0$ , 由Lyapunov稳定性定理可得定理1得证.  $\square$

**注2** 由式(19)可知定理1成立的条件为智能体的速率  $\dot{z}_i^a(t) \neq 0 (i = 1, 2, \dots, N)$ . 但实际上可能出现速率为0的情况, 此时控制力(8)无意义. 为此, 对控制力(8)作如下修改: 假设  $t > 0$  时,  $N$  个移动智能体的速率不同时为0. 不失一般性, 假设  $\dot{z}_1^a(t), \dots, \dot{z}_m^a(t) \neq 0, \dot{z}_{m+1}^a(t), \dots, \dot{z}_N^a(t) = 0, 1 \leq m \leq N$ . 同时, 由假设1可知, 存在时刻  $t_f < \infty$ , 当  $t \geq t_f$  时,  $h(t) \equiv h_{\max}, \dot{h}(t) \equiv 0$ . 因此, 定理1中的控制力(8)可以修改为

$$f_i(t) = \begin{cases} 2k_i y_i \Delta x_i - \gamma_i \dot{z}_i^a - \frac{\mu_2 \beta_0^2 \dot{h}(t)}{m h(t) \dot{z}_i^a}, & 0 < t < t_f; \\ 2k_i y_i \Delta x_i, & t = 0 \text{ 或 } t \geq t_f. \end{cases} \quad (21)$$

其中  $1 \leq m \leq N$ . 此时, 将控制力(21)代入(19), 仍然有  $\dot{V}(t) < 0$  成立, 并且当系统最终稳定时, 有  $f_i(t) = 0$  且  $\dot{z}_i^a = 0$ , 智能体处于静止状态.

定理1中, 为了证明的简便, 传感器之间被假设是不连通的. 实际情况中, 各个传感器之间可以相互交换信息, 此时反馈控制律可以设计为

$$u_i(t) = - \sum_{j=1}^N k_{ij} y_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (22)$$

据此可以得到定理2.

**定理2** 考虑活动边界分布参数系统(1)~(3), 移动智能体的动力学方程为(6), 若反馈控制律设计为(22), 移动智能体的运动控制力设计为

$$f_i(t) = 2\Delta x_i \sum_{j=1}^N k_{ij} y_j(t) - \gamma_i \dot{z}_i^a(t) - \frac{\mu_2 \beta_0^2 \dot{h}(t)}{N h(t) \dot{z}_i^a(t)}, \quad (23)$$

则活动边界分布参数系统(1)~(3)在移动控制律(22)下实现渐近稳定.

定理2的证明与定理1类似,此处略.

当  $N = 1$ , 即移动智能体的个数只有一个时, 反馈控制律(7)和(22)是一致的, 变为

$$u(t) = -ky(t), \tag{24}$$

此时, 若假设此智能体速率不为0, 定理1和定理2全部退化为如下推论.

**推论1** 当  $N = 1$  时, 考虑活动边界分布参数系统(1)~(3), 移动智能体的动力学方程为(6), 如果反馈控制律设计为式(24), 移动智能体的运动控制力设计为

$$f(t) = 2ky(t)\Delta x - \gamma z^a(t) - \frac{\mu_2 \beta_0^2 \dot{h}(t)}{h(t)z^a(t)}, \tag{25}$$

则系统(1)~(3)在移动控制律(24)作用下实现渐近稳定.

**注3** 推论1中, 当  $\dot{h}(t) \equiv 0$ , 即系统为固定边界时, 结论退化为文献[10]中的结果, 因此本文结论更具一般性.

### 3 数值仿真

为了验证本文所提出的移动控制策略的效果, 在相同条件下对开环、固定控制以及本文所提出的移动控制3种情况进行仿真和比较.

考虑系统(1)~(3), 扩散系数  $\alpha = 0.009$ , 活动边界  $h(t) = 1.5 - 0.4e^{-0.02t^{2.7}}$  满足假设1, 初始条件  $x_0(z) = \sin(3z)e^{-3z^2}, t \in [0s, 12s]$ . 动态方程(6)中移动智能体个数  $N = 3$ , 参数为

$$m_i = 1, p_i = 1, q_i = 2, i = 1, 2, \dots, 3,$$

初始位置分别为

$$z_{10} = 0.2, z_{20} = 0.5, z_{30} = 1.$$

本文所设计的控制力(8)中参数取为

$$\gamma_i = 1, \mu_2 = 0.2, \beta_0 = 0.1,$$

控制器增益为

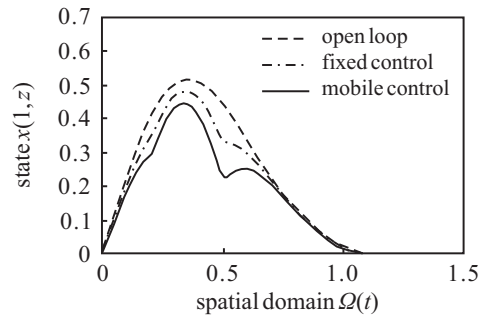
$$k_1 = 20, k_2 = 15, k_3 = 20.$$

图1比较了3种情况下系统状态在4个不同时刻 ( $t = 1s, 4s, 8s, 12s$ ) 的空间分布, 在体现系统活动边界特性的同时, 也说明了移动控制的效果要优于固定控制.

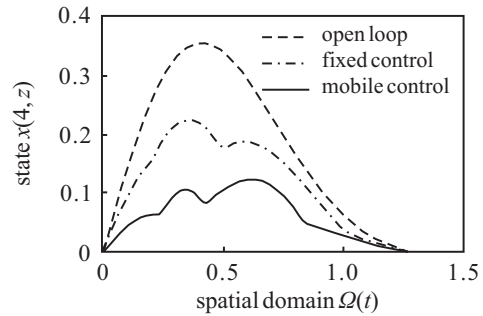
图2给出了3种情况下系统状态的空间  $L_2$  范数, 明显可以看出移动控制能更快地使系统稳定.

图3为3个移动智能体的移动轨迹, 可以看出在所设计的控制力作用下智能体向状态值较大的中间

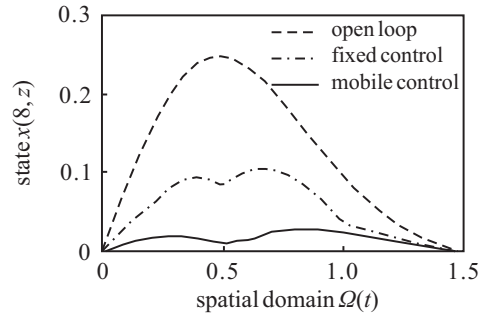
区域移动, 并在8.5s左右时趋于静止, 同时相应的控制输入(图4)也渐近趋于0.



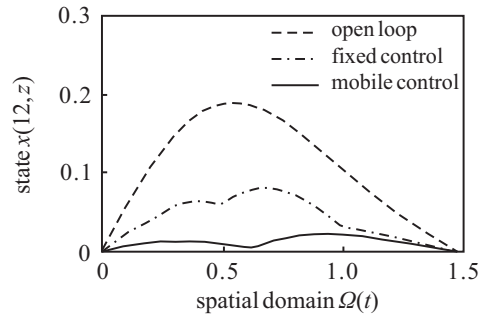
(a)  $t = 1s$



(b)  $t = 4s$



(c)  $t = 8s$



(d)  $t = 12s$

图1 不同时刻状态的空间分布

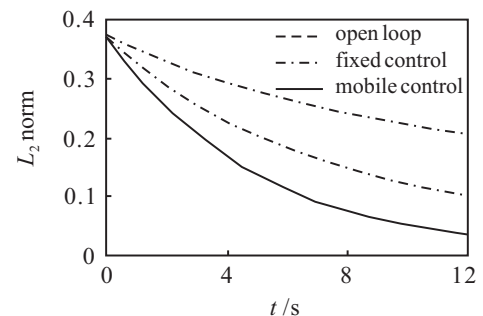


图2 空间  $L_2$  范数演变

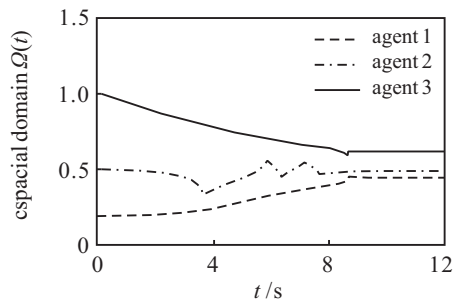


图3 智能体的移动轨迹

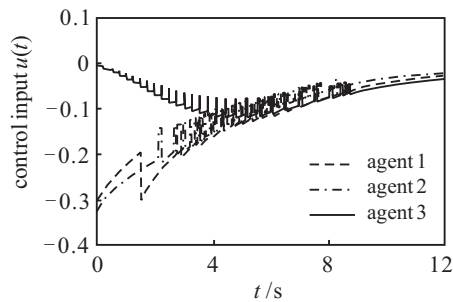


图4 智能体的控制输入

## 4 结论

本文研究了具有活动边界的分布参数系统的移动控制问题. 基于系统的抽象发展方程, 应用 Lyapunov 直接方法设计了两种不同的移动控制策略. 研究表明, 基于相同的 Lyapunov 函数, 不同的控制器设计会得到不同的控制力设计, 而且系统的活动边界特性会极大影响控制力的设计. 仿真结果表明, 所提出的移动控制策略能够取得很好的控制效果. 基于防碰撞的活动边界的分布参数系统的移动控制问题以及不同的 Lyapunov 函数对控制力设计的影响是下一步要考虑的问题.

### 参考文献(References)

- [1] Xia F, Tian Y C, Li Y J, et al. Wireless sensor/ actuator network design for mobile control applications[J]. *Sensors*, 2007, 7(10): 2157-2173.
- [2] 娄柯, 崔宝同, 李纹. 基于蜂拥控制的移动传感器网络目标跟踪算法[J]. *控制与决策*, 2013, 28(11): 1637-1642.  
(Lou K, Cui B T, Li W. Target tracking algorithm of mobile sensor networks based on flocking control[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(11):1637-1642.)
- [3] 李世华, 田玉平. 移动小车的轨迹跟踪控制[J]. *控制与决策*, 2000, 15(5): 626-628.  
(Li S H, Tian Y P. Tracking control of mobile robots[J]. *Control and Decision*, 2000, 15(5): 626-628.)
- [4] Demetriou M A, Kazantzis N. A new actuator activation policy for performance enhancement of

controlled diffusion processes[J]. *Automatica*, 2004, 40(3): 415-421.

- [5] 刘屿, 鄂依林, 赵志甲. 大加减速轴向移动系统鲁棒边界控制[J]. *控制与决策*, 2014, 29(10): 1771-1776.  
(Liu Y, Wu Y L, Zhao Z J. Robust boundary control of an axially moving system with high acceleration[J]. *Control and Decision*, 2014, 29(10): 1771-1776.)
- [6] Butkovskii A G, Pustyl'nikova E I. Theory of mobile control of distributed parameter systems[J]. *Automation and Remote Control*, 1980, 41(6): 741-747.
- [7] Khapalov A Y. Continuous observability for parabolic system under observations of discrete type[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(9): 1388-1391.
- [8] Khapalov A Y. Controllability of the wave equation with moving point control[J]. *Applied Mathematics and Optimization*, 1995, 31(2): 155-175.
- [9] Liang J, Chen Y Q. Diff/Wave-MAS2D: A simulation platform for measurement and actuation scheduling in distributed parameter systems with mobile actuators and sensors[C]. *Proc of the IEEE Int Conf on Mechatronics and Automation*. Niagara Falls: IEEE, 2005: 2228-2233.
- [10] Demetriou M A. Guidance of mobile actuator-plus-sensor networks for improved control and estimation of distributed parameter systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2010, 55(7): 1570-1584.
- [11] Demetriou M A. Simplified controller design for distributed parameter systems using mobile actuator with augmented vehicle dynamics dynamics[C]. *Proc of the American Control Conf*. San Francisco: IEEE, 2011: 3140-3145.
- [12] 江正仙, 崔宝同, 楼旭阳, 等. 基于防碰撞的移动 SAN 对分布参数系统的控制[J]. *控制与决策*, 2014, 29(12): 2242-2246.  
(Jiang Z X, Cui B T, Lou X Y, et al. Controlling distributed parameter systems utilizing mobile sensor-actuator networks with guaranteed collision avoidance[J]. *Control and Decision*, 2014, 29(12): 2242-2246.)
- [13] Christofides P D. Nonlinear and robust control of parabolic PDE systems with time-dependent spatial domains[J]. *Automatica*, 2001, 37(1): 61-69.
- [14] Ng J, Aksikas I, Dubljevic S. Control of parabolic PDEs with time-varying spatial domain: Czochralski crystal growth process[J]. *Int J of Control*, 2013, 86(9): 1-12.
- [15] Cai X, Krstic M. Nonlinear control under wave actuator dynamics with time- and state-dependent moving boundary[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2015, 25(2): 222-251.
- [16] Knobloch E, Krechetnikov R. Problems on time-varying domains: Formulation, dynamics, and challenges[J]. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2015, 137(1): 123-157.

(责任编辑: 闫妍)