

需求依赖于变质时间的非立即变质品联合补货优化

艾学轶^{1,2,3}, 张金隆^{1,3}, 徐浩轩⁴, 王 林^{1,3†}

(1. 华中科技大学 管理学院, 武汉 430074; 2. 武汉科技大学 管理学院, 武汉 430081; 3. 华中科技大学 现代管理信息研究中心, 武汉 430074; 4. 中南财经政法大学 工商管理学院, 武汉 430073)

摘要: 基于产品非立即变质的特征, 构建需求依赖于变质时间的多品种联合补货库存模型, 目标是使单位时间内的总成本最小. 由于联合补货问题是NP难题, 且考虑变质使问题变得更加复杂, 针对这一难点, 采用一种截断泰勒级数的方法对目标函数的指数项进行简化, 提出一种基于定界的启发式算法求解模型, 并通过数值案例验证算法的有效性和实用性. 最后对主要参数的敏感性进行分析, 为非立即变质品的零售商在实施联合补货时提供有益的管理建议.

关键词: 联合补货; 启发式算法; 非立即变质品; 需求依赖于变质时间

中图分类号: F253 **文献标志码:** A

Optimal joint replenishment policy for multiple non-instantaneous deteriorating products with deterioration-time-dependent demand

AI Xue-yi^{1,2,3}, ZHANG Jin-long^{1,3}, XU Hao-xuan⁴, WANG Lin^{1,3†}

(1. School of Management, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China; 2. School of Management, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China; 3. Modern Information Management Center, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China; 4. School of Business Administration, Zhongnan University of Economics and Law, Wuhan 430073, China)

Abstract: Based on the property of the non-instantaneous deteriorating products, a multi-item joint replenishment model is developed under deterioration-time-dependent demand, aiming to minimize the average total cost. Joint replenishment problem is NP-hard, in particular, deterioration increases the complexity of the problem further. In response to this difficulty, the truncated Taylor series expansion is used to simplify the exponential parts of the objective function and a bounds-based heuristic algorithm is developed to solve the proposed model. Finally, sensitivity analysis of key parameters is conducted, which provides useful management suggestions in the implementation of joint replenishment for the retailers of non-instantaneous deteriorating products.

Keywords: joint replenishment; heuristic algorithms; non-instantaneous deteriorating items; deterioration-time-dependent demand

0 引言

在零售行业, 物品的变质是影响零售商利润的主要因素. 大多数杂货店和超市的销售收入都来自易变质产品, 如水产品、肉类、奶制品、水果、鲜花等. 美国食品市场研究所2012年的报告指出, 2010年超市总销售收入为4440亿美元, 其中来自易变质产品的收入占50.62%^[1]. 因此, 零售商如何对易变质产品进行有效的管理, 在控制产品损耗的前提下制定合理的

补货策略, 对于提高企业的利润水平和节约社会资源有着至关重要的意义.

Ghare等^[2]最先研究了易变质产品的订货策略, 随后Covert等^[3]松弛了Ghare等^[2]关于变质率为常数的假设, 研究了产品变质率随时间服从Weibull分布的经济订货批量模型. 近年来, 学者们对易变质产品的库存模型进行了大量研究, 刘国莉等^[4]研究了弹性需求下易变质物品定价、营销与生产计划的联合

收稿日期: 2017-03-16; 修回日期: 2017-05-19.

基金项目: 国家社会科学基金重大项目(16ZDA013); 国家自然科学基金项目(71371080, 71701212); 国家自然科学基金重点基金项目(71531009).

责任编辑: 柴利.

作者简介: 艾学轶(1983—), 女, 讲师, 博士, 从事供应链管理、启发式算法的研究; 王林(1974—), 男, 教授, 博士生导师, 从事物流工程、优化算法等研究.

†通讯作者. E-mail: wanglin982@gmail.com

优化问题,并提出了基于几何规划的求解方法;计国君等^[5]研究了多个供应商、多个销售商情况下,供应商库存外包于第三方的易变质产品库存联合决策模型;Goyal等^[6]和Bakker等^[7]先后对易变质品的库存模型进行了综述.目前大多数关于易变质产品的库存模型都假设产品一到达零售商库存处就开始发生变质,但实际上许多易变质产品,如新鲜蔬菜、水果、牛奶、禽肉、水产品等,都可以利用一定的储藏技术和运输方式延长保鲜期,使这些产品经过一定的保鲜时间后才开始变质,Wu等^[8]将这类产品定义为“非立即变质品”,并研究了其需求受当前库存水平影响时的库存模型.此后,许多学者在此基础上对非立即变质品的库存模型进行了深入研究^[9-12].闵杰等^[13]以平均利润最大化为目标,研究了需求受当前库存水平影响的非立即变质品库存模型.李贵萍等^[14]考虑持有成本和变质率随时间变化,研究了允许缺货且短缺量部分延迟交货的非立即变质品库存策略.

在上述研究非立即变质品库存策略的文献中,大多数模型考虑的是单个产品.在实际中,零售商通常会一次性采购多种产品,共享同一种资源以节约补货成本.多产品联合补货问题(Joint replenishment problem, JRP)是对多种产品进行协调补货的决策问题.现实中,许多知名企业已广泛采用联合补货策略.如沃尔玛等大公司由于采购数量巨大,传统的分散补货不但复杂度极高,成本也非常高昂,而联合补货使得公司可以获得采购的规模经济,大幅降低整体成本.另外,中国各省份的高校后勤集团通过建立联盟以实施联合补货.目前为止,北京、浙江、江苏、吉林、河南、福建、湖北等省市均存在着高校食堂采购联盟.以北京为例,将近100所北京高校从2001年起,建立了北京地区的高校食堂联合补货联盟.通过实施联合补货,不仅可以扩大补货规模、共享主要订货成本、降低交易次数、节约总采购成本,同时,可以促进不同供应商之间的价格竞争和质量竞争,享受数量折扣的同时确保所购产品的质量,这与传统的单个企业孤立补货的战略相比具有明显的优势.

少数文献研究了多种易变质产品的库存策略^[7].Wee等^[15]建立了一个需求模糊的多目标易变质产品联合补货模型,其目标是在资源约束的情况下使平均利润和投资回报率同时最大化.Chen等^[16]研究了多种易变质产品联合补货和渠道协调策略,基于不同假设建立了4个比较模型,并通过数值实验验证了多产品联合补货和渠道协调的有效性.然而,很少有文献

提出多品种非立即变质品的联合补货模型.鉴于此,本文在相关文献的基础上,研究非立即变质品的联合补货模型.

JRP研究的难点之一在于模型的求解,对于传统JRP模型,已有一些较为成熟的算法,如枚举法^[17]、启发式算法^[18-20]、智能优化算法^[21]等.由于JRP被证明是NP难题^[22],本文考虑产品非立即变质的特征使模型的求解变得更加复杂,而传统的方法又存在一些缺陷:如传统的枚举法在问题规模或枚举空间比较大时,算法耗时且效率较低;常规智能优化算法的计算费用随着问题规模的扩大和复杂度的提高呈指数增长,且很难收敛到最优解.鉴于此,本文首先对目标函数中的指数部分进行截断泰勒级数展开,得到简化的目标函数;然后,对最优解的性质进行分析,并提出一种基于定界的启发式算法求解模型.

闵杰等^[13]指出,在实际中消费者会更加偏爱新鲜产品,因此,产品在保鲜期和变质期的需求是不同的.在变质期间,一些学者研究了需求随时间变化的易变质品库存模型.如Soni等^[23]和Maihimi等^[24]假设易变质产品的需求是随时间变化的指数函数.因此,本文假设非立即变质品在保鲜期和变质期的需求不同.在产品保鲜期间,需求为常数,产品一旦发生变质,需求是随变质时间指数下降的函数.

综上,本文首次研究了多品种非立即变质品的联合补货模型,且考虑变质期间产品的需求随变质时间指数下降.设计一种基于定界的启发式算法求解模型,通过数值实验验证算法的实用性和有效性.最后,对主要参数进行敏感性分析,为非立即变质品的零售商进行多品种科学补货提供一定的理论参考.

1 模型构建

1.1 模型假设与符号表示

根据非立即变质品的特点和实际联合补货问题,作以下基本假设:

- 1) 补货的提前期为0.
- 2) 不允许缺货且无资源约束.
- 3) 产品 i 进入库存后存在一个固定的保鲜期 t_{di} ,在 $[0, t_{di}]$ 时段内,产品不发生变质,经过 t_{di} 后,产品 i 以固定的变质率 θ_i 发生变质.
- 4) 采用周期性查看库存策略,所有产品的补货都建立在一个确定的基本补货周期 T 之上,产品 i 的补货周期 T_i 是这个基本补充周期的整数(k_i)倍,即 $T_i = k_i T$.
- 5) 每一个基本补货周期内至少对一种产品进行

补货.

6)在保鲜期内,需求是恒定的,一旦产品开始变质,需求随时间 t 呈指数递减,产品 i 在 t 时刻的需求函数可表示为

$$D_i(t) = \begin{cases} a_i, & 0 < t \leq t_{di}; \\ a_i e^{\lambda_i(t-t_{di})}, & t_{di} < t \leq T_i. \end{cases}$$

其中 $\lambda_i(-1 < \lambda_i < 0)$ 是一个负常数,表示需求率随时间变化的参数,且 $\theta_i + \lambda_i \neq 0$.

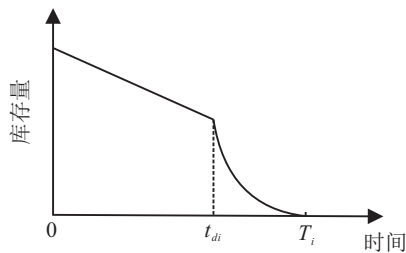
其他符号释义如表1所示.

表1 符号释义

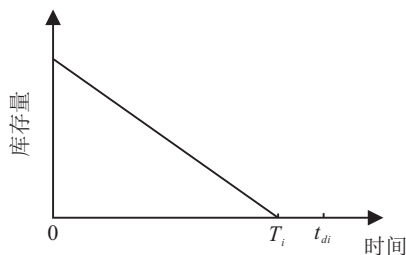
符号	释义
n	产品的种类数
h_i	产品 i 的平均库存持有成本
S	每一次补货的主要订货成本
s_i	产品 i 补货时的次要订货成本
c_i	产品 i 的变质成本
$I_{1i}(t)$	产品 i 在未发生变质时的库存水平
$I_{2i}(t)$	产品 i 在变质期间的库存水平
Q_i	一个补货周期内产品 i 的补货量

1.2 数学模型

由于本模型考虑多种产品的联合补货,且每一种产品都是经过各自固定的保鲜时间后开始发生变质,对于产品 i ,根据 t_{di} 和 T_i 的值,其库存水平随时间的变化可能存在如下两种情况:1) $T_i > t_{di}$;2) $T_i \leq t_{di}$.库存水平随时间变化的曲线如图1所示.



(a) $T_i > t_{di}$ (情况1)



(b) $T_i \leq t_{di}$ (情况2)

图1 库存水平随时间变化曲线

情况1 当 $T_i > t_{di}$ 时,在产品保鲜期 $[0, t_{di}]$ 内,产品库存水平的下降仅因为该时间段内需求的消耗;在产品变质期 $[t_{di}, T_i]$ 内,产品库存水平的下降是因

为该时间段内需求的消耗和产品的变质,并在 T_i 时刻下降为0.

在保鲜期 $[0, t_{di}]$ 内,产品 i 的库存水平满足

$$\frac{dI_{1i}(t)}{dt} = -D_i, \quad 0 < t \leq t_{di}. \quad (1)$$

在 $t = 0$ 时刻,产品 i 的库存水平为 Q_i ,求解式(1),得到

$$I_{1i}(t) = Q_i - D_i t, \quad 0 < t \leq t_{di}. \quad (2)$$

在变质期 $[t_{di}, T_i]$ 区间内,产品 i 的库存水平满足

$$\frac{dI_{2i}(t)}{dt} = -D_i(t) - \theta_i I_{2i}(t), \quad t_{di} < t \leq T_i, \quad (3)$$

其中 $D_i(t) = a_i e^{\lambda_i(t-t_{di})}$.在 $t = T_i$ 时刻,产品 i 的库存水平下降至0,因此 $I_{2i}(T_i) = 0$,求解式(3),得到

$$I_{2i}(t) = \frac{a_i e^{-\theta_i t}}{e^{\lambda_i t_{di}}(\theta_i + \lambda_i)} [e^{(\theta_i + \lambda_i)T_i} - e^{(\theta_i + \lambda_i)t}], \quad t_{di} < t \leq T_i. \quad (4)$$

在 $t = t_{di}$ 处,由函数的连续性可知, $I_{1i}(t_{di}) = I_{2i}(t_{di})$,联合式(2)和(4)可得每周期的补货量为

$$Q_i = \frac{a_i}{\lambda_i + \theta_i} [e^{(\theta_i + \lambda_i)(T_i - t_{di})} - 1] + a_i t_{di}. \quad (5)$$

将式(5)代入(2),得到

$$I_{1i}(t) = \frac{a_i}{\lambda_i + \theta_i} [e^{(\theta_i + \lambda_i)(T_i - t_{di})} - 1] + a_i t_{di} - a_i t. \quad (6)$$

因此,单位时间内所有产品的平均库存持有成本为

$$HC_1 = \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{T_i} \left[\int_0^{t_{di}} I_{1i}(t) dt + \int_{t_{di}}^{T_i} I_{2i}(t) dt \right]. \quad (7)$$

将式(4)和(6)代入(7),得到

$$HC_1 = \sum_{i=1}^n \frac{a_i h_i}{T_i (\theta_i + \lambda_i)} \left\{ \left(\frac{1}{\theta_i} + t_{di} \right) \times [e^{(\theta_i + \lambda_i)(T_i - t_{di})} - 1] - \left(\frac{1}{\theta_i} + \frac{1}{\lambda_i} \right) [e^{\lambda_i(T_i - t_{di})} - 1] + \frac{t_{di}^2 (\theta_i + \lambda_i)}{2} \right\}. \quad (8)$$

单位时间内所有产品的平均变质成本为

$$DC_1 = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{T_i} \left[I_{2i}(t_{di}) - \int_{t_{di}}^{T_i} D_i(t) dt \right] = \sum_{i=1}^n \frac{a_i c_i}{T_i} \left\{ \frac{1}{\theta_i + \lambda_i} [e^{(\theta_i + \lambda_i)(T_i - t_{di})} - 1] - \frac{1}{\lambda_i} [e^{\lambda_i(T_i - t_{di})} - 1] \right\}. \quad (9)$$

单位时间内所有产品的总订货成本为

$$OC_1 = \frac{1}{T} \left(S + \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{k_i} \right). \quad (10)$$

于是,当 $T_i > t_{di}$ 时,系统在单位时间内的总成本为

$$TC_1 = HC_1 + DC_1 + OC_1,$$

$$TC_1 = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{T_i} \left\{ \frac{1}{\theta_i + \lambda_i} \left(h_i t_{di} + \frac{h_i}{\theta_i} + c_i \right) \times \right. \\ \left. [e^{(\theta_i + \lambda_i)(T_i - t_{di})} - 1] - \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{h_i}{\theta_i} + c_i \right) [e^{\lambda_i(T_i - t_{di})} - 1] + \frac{h_i t_{di}^2}{2} \right\} + \\ \frac{1}{T} \left(S + \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{k_i} \right). \quad (11)$$

情况2 当 $T_i \leq t_{di}$, 即产品的补货周期小于或等于产品的保鲜时间时, 零售商能在产品发生变质前售出所有产品, 因此在该情况下, 不需要考虑产品的变质, 其模型为经典联合补货模型^[17]. 单位时间内的库存持有成本为

$$HC_2 = \frac{T}{2} \sum_{i=1}^n k_i D_i h_i = \frac{T}{2} \sum_{i=1}^n k_i a_i h_i; \quad (12)$$

单位时间内的订货成本为

$$OC_2 = \frac{1}{T} \left(S + \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{k_i} \right); \quad (13)$$

单位时间内的总成本为

$$TC_2 = HC_2 + OC_2 = \\ \frac{T}{2} \sum_{i=1}^n k_i a_i h_i + \frac{1}{T} \left(S + \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{k_i} \right). \quad (14)$$

综合上述2种情况, 结合 $T_i = k_i T$, 系统的单位时间内的总成本可表示为

$$\min TC(k_i, T) = \\ \frac{S}{T} + \sum_{i=1}^n \frac{[1 + \text{sign}(k_i T - t_{di})]}{2} \left\{ \frac{a_i}{k_i T} \times \right. \\ \left. \left\{ \frac{1}{\theta_i + \lambda_i} \left(h_i t_{di} + \frac{h_i}{\theta_i} + c_i \right) [e^{(\theta_i + \lambda_i)(k_i T - t_{di})} - 1] - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{h_i}{\theta_i} + c_i \right) [e^{\lambda_i(k_i T - t_{di})} - 1] + \frac{h_i t_{di}^2}{2} \right\} + \frac{s_i}{k_i T} \right\} + \\ \sum_{i=1}^n \frac{[1 - \text{sign}(k_i T - t_{di})]}{2} \left(\frac{k_i T}{2} a_i h_i + \frac{s_i}{k_i T} \right). \quad (15)$$

其中: k_i 为自然数, 且在 $i \in [1, n]$ 中, 存在一个 $k_i = 1$; $T > 0$.

2 模型求解

由于JRP问题是NP难题, 且目标函数是非线性混合整数的分段函数, 无法使用常规的非线性规划方法求解, 另外, 高维度的指数函数使本模型中目标函数的求解更加复杂. 本文对目标函数中的指数函数式进行泰勒展开, 取前3项进行截断近似, 从而得到简化的目标函数, 该方法也广泛在文献中采用^[25-26]. 令

$$e^{(\theta_i + \lambda_i)(k_i T - t_{di})} \approx$$

$$1 + (\theta_i + \lambda_i)(k_i T - t_{di}) + \frac{1}{2}(\theta_i + \lambda_i)^2(k_i T - t_{di})^2, \quad (16)$$

$$e^{\lambda_i(k_i T - t_{di})} \approx 1 + \lambda_i(k_i T - t_{di}) + \frac{1}{2}\lambda_i^2(k_i T - t_{di})^2. \quad (17)$$

在情况1下, 单位时间内的总成本 TC_1 可近似表示为

$$TC_1(k_i, T) \approx \\ \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{a_i}{2} [h_i + h_i t_{di}(\theta_i + \lambda_i) + \theta_i c_i] k_i T + \right. \\ \left. \frac{a_i t_{di}^2}{2k_i T} [h_i t_{di}(\theta_i + \lambda_i) + \theta_i c_i] - a_i t_{di} [h_i t_{di}(\theta_i + \lambda_i) + \theta_i c_i] \right\} + \frac{1}{T} \left(S + \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{k_i} \right). \quad (18)$$

对于情况1下的目标函数 TC_1 , 经过化简后, 其结构类似于经典JRP模型的结构, 即

$$TC_1(k_i, T) \approx \\ \frac{1}{T} \left(S + \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{k_i} \right) + \frac{T}{2} \sum_{i=1}^n k_i v_i + \sum_{i=1}^n w_i. \quad (19)$$

其中

$$u_i = s_i + \frac{a_i t_{di}^2}{2} [h_i t_{di}(\theta_i + \lambda_i) + \theta_i c_i],$$

$$v_i = a_i [h_i + h_i t_{di}(\theta_i + \lambda_i) + \theta_i c_i],$$

$$w_i = -a_i t_{di} [h_i t_{di}(\theta_i + \lambda_i) + \theta_i c_i].$$

综上, 目标函数的表达式(15)可近似表示为

$$TC(k_i, T) \approx \\ \frac{S}{T} + \sum_{i=1}^n \frac{[1 + \text{sign}(k_i T - t_{di})]}{2} \left(\frac{k_i T}{2} v_i + \frac{u_i}{k_i T} + w_i \right) + \\ \sum_{i=1}^n \frac{[1 - \text{sign}(k_i T - t_{di})]}{2} \left(\frac{k_i T}{2} a_i h_i + \frac{s_i}{k_i T} \right). \quad (20)$$

2.1 最优解分析

由式(20)可以发现, 本文讨论的两种情况下的成本结构相似, 本节着重分析情况1下决策变量 $(k_1, k_2, \dots, k_n, T)$ 的最优解, 另一种情况的求解可用类似方法获得. 令

$$\text{Trc}(k_i, T) = \frac{1}{T} \left(S + \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{k_i} \right) + \frac{T}{2} \sum_{i=1}^n k_i v_i, \quad (21)$$

对于任意给定的 $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, 对应的 $T(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 的最优解需满足

$$T(k_1, k_2, \dots, k_n) = \left[2 \left(S + \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{k_i} \right) / \sum_{i=1}^n k_i v_i \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

将式(22)代入(21),可得 Trc的最优解为

$$\text{Trc}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \left[2 \left(S + \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{k_i} \right) \sum_{i=1}^n k_i v_i \right]^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

对于任意给定的 T , 对应的 $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ 的最优解满足

$$k_i(T)(k_i(T) - 1) < \frac{2u_i/v_i}{T^2} \leq k_i(T)(k_i(T) + 1). \quad (24)$$

由于 k_i 是整数, 对于固定的 $T, K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ 的最优解是唯一的.

2.2 定界算法

根据上述讨论, 本节采用定界算法求解目标函数表达式(21)的决策变量最优解. 定界算法的基本思想是分别求决策变量的上界和下界, 对于产品 i , 当 k_i 的上界和下界相等时, 该值即为 k_i 的最优解; 否则, 由于 $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ 是整数向量, 可进一步使用启发式算法得到目标函数的全局最优解^[27].

定界算法步骤如下.

Step 1: 求解 T_{\max} 和 K_{\min} .

Step 1.1: 设 $(k_1, k_2, \dots, k_n) = (1, 1, \dots, 1)$, 由式(23)计算 $\text{Trc}^* = \text{Trc}(1, 1, \dots, 1)$, 令

$$T_{\max} = \text{Trc}^* / \sum_{i=1}^n v_i;$$

Step 1.2: 利用式(24)计算 K_{\min} 的值, 进而由式(23)计算 Trc_{\min} ;

Step 1.3: 如果 $\text{Trc}_{\min} < \text{Trc}^*$, 则有

$$K^* = K_{\min}, \text{Trc}^* = \text{Trc}_{\min},$$

$$T_{\max} = \text{Trc}^* / \sum_{i=1}^n v_i k_{i\min},$$

返回 Step 1.2, 否则执行 Step 2.

Step 2: 求解 T_{\min} 和 K_{\max} .

Step 2.1: 令 $T_{\min} = \max[2S/\text{Trc}^*, \min(\sqrt{u_i/v_i})]$;

Step 2.2: 利用式(24)计算 K_{\max} 的值, 进而由式(23)计算 Trc_{\max} 的值;

Step 2.3: 如果 $\text{Trc}_{\max} < \text{Trc}^*$, 则有

$$K^* = K_{\max}, \text{Trc}^* = \text{Trc}_{\max},$$

$$T_{\min} =$$

$$\max \left[\frac{2 \left(S + \sum_{i=1}^n u_i / k_{i\max} \right)}{\text{Trc}^*}, \min(\sqrt{u_i/v_i}) \right],$$

返回 Step 2.2, 否则结束.

通过 Step 1 和 Step 2 可以得到决策变量 T 和 K 的上下界, 当 $K_{\max} = K_{\min}$ 时, 最优的 K 值 $K^* = K_{\max}$

$= K_{\min}$, 由式(22)可以得到 T^* ; 否则, 需执行 Step 3, 得到全局最优解.

Step 3: 求全局最优解.

Step 3.1: 设 $T_{ch}(i) = [2u_i/v_i k_{i\min}(k_{i\min} + 1)]^{(1/2)}$;

Step 3.2: 令 $T = \max_i T_{ch}(i)$;

Step 3.3: 若 $T \leq T_{\min}$ 则结束, 否则执行 Step 3.4;

Step 3.4: 设 $p = \arg_i \max T_{ch}(i)$, 计算 $k_{p\min} = k_{p\min} + 1$, 通过式(23)计算 Trc_{\min} , 如果 $\text{Trc}_{\min} < \text{Trc}^*$, 则有

$$K^* = K_{\min}, \text{Trc}^* = \text{Trc}_{\min},$$

$$T_{\min} =$$

$$\max \left[\frac{2 \left(S + \sum_{i=1}^n u_i / k_{i\max} \right)}{\text{Trc}^*}, \min(\sqrt{u_i/v_i}) \right],$$

返回 Step 3.1.

通过执行以上步骤, 式(21)的最优解为 (K^*, T^*) , 其中 T^* 由式(22)计算得出. 将 $(k_1^*, k_2^*, \dots, k_n^*, T^*)$ 的值代入(19), 可得情况 1 下最优的 TC_1 的近似最优值.

2.3 模型求解算法

由于定界算法求解的是 $k_i T > T_{di}$ 情况下的决策变量的最优解, 而目标函数是一个分段函数, 定界算法可作为本文模型求解算法的子流程. 设计模型求解算法主流程如下.

Step 1: 令 $f_i = 1, i = 1, 2, \dots, n, F_0 = [f_1, f_2, \dots, f_i, \dots, f_n]$. 利用定界算法求解式(19)得到初始解 $(k_1^*, k_2^*, \dots, k_n^*, T^*)$ 和相应的总成本.

Step 2: 对于每一种产品, 计算 $T_i^* = k_i^* T^*$, 比较 T_i^* 和 t_{di} 的值, 如果 $T_i^* > t_{di}$ 时, $f_i = 1$, 否则 $f_i = 0$.

Step 3: 令 $F = [f_1, f_2, \dots, f_i, \dots, f_n]$.

Step 4: 比较 F_0 和 F , 如果 $F_0 = F$, 则执行 Step 8, 否则执行 Step 5.

Step 5: 比较 T_i^* 和 t_{di} 的值, 如果 $T_i^* > t_{di}$, 则令

$$u_i = s_i + \frac{a_i t_{di}^2}{2} [h_i t_{di} (\theta_i + \lambda_i) + \theta_i c_i],$$

$$v_i = a_i [h_i + h_i t_{di} (\theta_i + \lambda_i) + \theta_i c_i],$$

$$w_i = -a_i t_{di} [h_i t_{di} (\theta_i + \lambda_i) + \theta_i c_i],$$

否则令 $u_i = s_i, v_i = a_i h_i, w_i = 0$.

Step 6: 利用定界算法求解式(19), 得到 $(k_1^*, k_2^*, \dots, k_n^*, T^*)$ 和相应的总成本.

Step 7: 令 $F_0 = F$, 返回 Step 2.

Step 8: 决策变量的最优解为 $(k_1^*, k_2^*, \dots, k_n^*, T^*)$, 代入到精确的目标函数表达式(15)中, 得到相应的最优总成本 TC^* .

3 算例分析

通过具体的数值算例求解系统的最优订货策略,验证所提出算法的有效性和近似方法的效果,并对主要的参数进行敏感性分析,得到一定的管理启示.数值算例的部分参数来源于文献[28],由于该算例并没有考虑产品的变质,增加了4个参数 θ_i 、 t_{di} 、 c_i 、 λ_i 分别代表产品 i 的变质率、变质前的保鲜时间、变质成本和变质期需求随时间变化的弹性系数,具体参数设置见表2.所有实验通过Matlab实现,计算机配置为CPU@2.27 GHz和2.00 GB RAM.

基于表2的参数设置和所提出的模型求解算法,

可以得到在不同 θ_i 和 t_{di} 取值下的实验结果,如表3所示,其中 t_{di} 从(0,0.041 1,0.082 2)中随机生成.同时,将本算法得到的近似最优解 TC^* 和通过枚举法得到的精确解 TC_{opt} (其中 k_i 取1~30之间的整数)进行对比, $\Delta TC/TC_{opt}(\%)$ 表示本文算法的最优解与精确解误差的百分比.

由表3可见, $K(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 的最优解 k^* 与下界 K_{min} 相等,因此,本算例表明定界算法是有效的.同时,本文近似算法的效果也十分显著,近似算法得到的最优解接近于精确解.在以上算例中,最大误差为0.008 6%,平均误差为0.004 1%.

表2 参数取值

Item	a_i	h_i	s_i	c_i	λ_i	θ_i	t_{di}	S
1	2900	0.4	1.8	2.4	-0.5	0.02	0.041 1	10
2	1850	1	2.0	6	-0.3	0.02	0.082 2	
3	2750	0.8	1.2	4.8	-0.4	0.02	0	
4	1600	0.2	3.2	1.2	-0.3	0.02	0.041 1	
5	3200	0.8	3.1	4.8	-0.6	0.02	0.041 1	
6	1400	0.2	2.7	1.2	-0.5	0.02	0.082 2	

表3 数值算例的实验结果

θ_i	t_{di}	k^*	K_{min}	T_{max}	T^*	TC^*	TC_{opt}	$\Delta TC/TC_{opt} / \%$
0.02	0.041 1, 0.082 2, 0, 0.041 1, 0.041 1, 0.082 2	1, 1, 1, 2, 1, 2	1, 1, 1, 2, 1, 2	0.066 4	0.066 4	624.82	624.80	0.003 2
0.04	0.041 1, 0.082 2, 0, 0.082 2, 0.082 2, 0.041 1	1, 1, 1, 2, 1, 2	1, 1, 1, 2, 1, 2	0.065 4	0.065 4	634.30	634.28	0.003 2
0.06	0.082 2, 0.082 2, 0, 0.041 1, 0.041 1, 0.082 2	1, 1, 1, 2, 1, 2	1, 1, 1, 2, 1, 2	0.063 1	0.063 1	647.02	647.00	0.003 1
0.08	0.041 1, 0.082 2, 0, 0, 0, 0.082 2	1, 1, 1, 2, 1, 2	1, 1, 1, 2, 1, 2	0.059 3	0.059 3	695.54	695.48	0.008 6
0.10	0.082 2, 0.082 2, 0.041 1, 0, 0.082 2, 0.082 2	1, 1, 1, 2, 1, 2	1, 1, 1, 2, 1, 2	0.063 9	0.063 9	634.02	634.01	0.001 6
0.12	0, 0, 0.082 2, 0.082 2, 0.082 2, 0.082 2	1, 1, 1, 2, 1, 2	1, 1, 1, 2, 1, 2	0.060 3	0.060 3	685.41	685.39	0.002 9
0.14	0.041 1, 0, 0.082 2, 0.082 2, 0, 0	1, 1, 1, 2, 1, 2	1, 1, 1, 2, 1, 2	0.055 2	0.055 2	742.6	742.56	0.005 4
0.16	0.041 1, 0, 0.041 1, 0, 0.041 1, 0.082 2	1, 1, 1, 2, 1, 2	1, 1, 1, 2, 1, 2	0.054 8	0.054 8	704.45	704.44	0.001 4
0.18	0, 0.082 2, 0.041 1, 0, 0, 0.082 2	1, 1, 1, 2, 1, 2	1, 1, 1, 2, 1, 2	0.053 2	0.053 2	759.57	759.53	0.005 3
0.20	0.082 2, 0.082 2, 0, 0.041 1, 0, 0.041 1	1, 1, 1, 2, 1, 2	1, 1, 1, 2, 1, 2	0.051 5	0.051 5	796.07	796.02	0.006 3

需要特别说明的是:采用本算法求解模型大约需要0.056 s,而采用枚举法得到精确解的时间大于30 s,且枚举法有其自身的局限性,当产品的品种 n 很大时(如 $n > 10$)或搜索空间很大时,很难通过枚举法得到模型的精确解.

下面对重要参数作敏感性分析.保持其他参数不变,分别改变参数 a_i 、 S 、 s_i 、 c_i 、 t_{di} 的值,变化程度为-40%、-20%、0、20%、40%.表4给出当参数 a_i 、 S 、 s_i 、 c_i 、 t_{di} 分别变化时最优的 k_i 、 T 、 Q_i 和 TC 的值, $\Delta TC(\%)$ 是 TC 变化的百分比.观察表4,可以得到以下结论:

1)随着 a_i 、 S 、 s_i 、 c_i 的增大,系统最优的总成本 TC 将增大,其中 a_i 的值对 TC 值的影响最大.随着 t_{di} 的增大,最优总成本 TC 的值将减小,这表明产品的保鲜时间越长,系统的总花费越小,因此,零售商可以采用一定的保存技术或防腐策略,以延长产品的保

鲜期,从而节约总成本.

2)随着 a_i 、 S 、 s_i 、 t_{di} 的增大,产品 i 每个周期的最优补货量 Q_i 将增大;随着 c_i 的增大, Q_i 将减小.这意味着,当产品的变质成本增加时,零售商应减少产品每周期的补货量,从而降低产品的变质成本,使平均总成本最小.

3)当 a_i 、 c_i 逐渐增大时,基本补货周期 T 随之减小.其含义是当产品需求和变质成本增加时,零售商需要增加补货的频率以满足更多的需求,同时减少产品变质带来的损失.

4)决策变量 k_i 对参数值的变化表现出较强的鲁棒性,而 T 对参数值的变化很敏感,这有利于帮助零售商在某些参数值在一定范围内变化时更快地得到决策变量的最优值.比如,保持 k_i 的值稳定不变,只对 T 的值进行重新决策.

表4 相关参数的敏感度分析

参数	变化率/%	k_i	T	Q_i	TC	$\Delta TC/\%$
a_i	-40	1,1,1,2,1,2	0.085 4	147.75, 94.77, 138.61, 161.7, 162.84, 141.88	484.68	-22.43
	-20	1,1,1,2,1,2	0.074 1	171.34, 109.68, 160.78, 187.7, 188.9, 164.86	559.25	-10.49
	0	1,1,1,2,1,2	0.066 4	192.12, 122.78, 180.32, 210.62, 211.89, 185.07	624.82	0.00
	20	1,1,1,2,1,2	0.060 7	210.98, 134.65, 198.07, 231.43, 232.73, 203.39	684.02	9.47
	40	1,1,1,2,1,2	0.056 3	228.38, 145.59, 214.48, 250.66, 251.96, 220.29	738.43	18.18
S	-40	1,1,1,2,1,2	0.059 9	173.40, 110.65, 162.8, 190.23, 191.28, 167.19	561.92	-10.07
	-20	1,1,1,2,1,2	0.063 2	183.01, 116.87, 171.79, 200.7, 201.87, 176.37	594.19	-4.90
	0	1,1,1,2,1,2	0.066 4	192.12, 122.78, 180.32, 210.62, 211.89, 185.07	624.82	0.00
	20	1,1,1,2,1,2	0.069 4	200.80, 128.41, 188.45, 220.07, 221.45, 193.35	654.02	4.67
	40	1,1,1,2,1,2	0.072 3	209.11, 133.8, 196.22, 229.11, 230.59, 201.25	681.99	9.15
s_i	-40	1,1,1,2,1,2	0.059 2	171.31, 109.29, 160.85, 187.96, 188.98, 165.19	554.90	-11.19
	-20	1,1,1,2,1,2	0.062 9	182.03, 116.23, 170.87, 199.63, 200.78, 175.43	590.88	-5.43
	0	1,1,1,2,1,2	0.066 4	192.12, 122.78, 180.32, 210.62, 211.89, 185.07	624.82	0.00
	20	1,1,1,2,1,2	0.069 7	201.69, 128.99, 189.28, 221.04, 222.43, 194.19	657.02	5.15
	40	1,1,1,2,1,2	0.072 9	210.81, 134.91, 197.82, 230.96, 232.46, 202.87	687.71	10.07
c_i	-40	1,1,1,2,1,2	0.067 3	194.74, 124.48, 182.77, 213.47, 214.78, 187.57	619.79	-0.81
	-20	1,1,1,2,1,2	0.066 9	193.41, 123.62, 181.53, 212.02, 213.32, 186.30	622.32	-0.40
	0	1,1,1,2,1,2	0.066 4	192.12, 122.78, 180.32, 210.62, 211.89, 185.07	624.82	0.00
	20	1,1,1,2,1,2	0.066 0	190.87, 121.96, 179.14, 209.25, 210.51, 183.87	627.29	0.40
	40	1,1,1,2,1,2	0.065 5	189.64, 121.17, 178.00, 207.92, 209.17, 182.71	629.73	0.79
t_{di}	-40	1,1,1,2,1,2	0.065 6	189.15, 121.34, 178.24, 207.48, 208.46, 181.52	628.77	0.63
	-20	1,1,1,2,1,2	0.066 1	191.03, 122.35, 179.60, 209.44, 210.61, 183.71	626.37	0.25
	0	1,1,1,2,1,2	0.066 4	192.12, 122.78, 180.32, 210.62, 211.89, 185.07	624.82	0.00
	20	1,1,1,2,1,2	0.066 7	193.17, 123.10, 181.08, 211.82, 213.11, 186.31	623.68	-0.18
	40	1,1,1,2,1,2	0.067 0	194.18, 123.31, 181.87, 213.04, 214.26, 187.43	622.94	-0.30

4 结 论

本文将现有单个非立即变质品的研究扩展到更实际的多产品联合补货情形,根据非立即变质品的特征,综合考虑了变质前补货和变质后补货两种情况,构建了变质期间需求时变的多产品联合补货模型,目标是决策每一种产品最优的补货周期从而使总的补货成本和变质成本最小.为达到这一目标,设计了基于定界的启发式算法对模型进行求解,数值案例验证了该算法的适用性和有效性.本文所提出的基于定界的启发式算法,特别是对于大规模问题而言,可经过有限次迭代后收敛,且能快速收敛到一个很好的解.进一步,对模型中的重要参数进行了敏感度分析实验,结果显示:延长非立即变质品的保鲜时间有利于节约系统的平均总成本;随着产品变质成本的提高,需增加产品的补货频率,减少每周期的补货量,以减少变质所带来的损失;基本补货周期对系统参数的变化非常敏感.

本文所构建的模型适用于生鲜产品的联合补货,如进口蔬果、禽肉、海鲜等,且多个产品的联合补货更贴近现实交易活动,更有利于节约系统的总成本.此外,所构建的模型具有一般性,当 t_{di} 值都设置为0时,该模型即为立即变质品的联合补货模型;当所有 t_{di} 值远大于1时,该模型为不发生变质产品的联合补货

模型,即传统JRP模型.在实际中,消费者的购买行为是随机的,产品的变质在一定情境下是可控的,因此,进一步的研究方向可考虑随机环境下和部分延迟交货情况下的非立即变质品联合补货,也可就变质率受时间和保鲜成本影响下的联合补货决策进行研究.

参考文献(References)

- [1] Chen X, Pang Z, Pan L. Coordinating inventory control and pricing strategies for perishable products[J]. *Operations Research*, 2014, 62(2): 284-300.
- [2] Ghare P M, Schrader G H. A model for exponentially decaying inventory system[J]. *J of Industrial Engineering*, 1963, 14(5): 238-243.
- [3] Covert R P, Philip G C. An EOQ model for items with weibull distribution deterioration[J]. *AIIE Trans*, 1973, 5(4): 323-326.
- [4] 刘国莉, 叶同, 王伟. 弹性需求下易变质物品定价、营销与生产计划的联合优化[J]. *控制与决策*, 2015, 30(2): 361-365.
(Liu G L, Ye T, Wang W. Optimal strategies for integrated pricing, marketing and production planning with deteriorating item considering elastic demand[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(2): 361-365.)
- [5] 计国君, 韩尚清. 基于第三方的易变质产品库存决策[J]. *控制与决策*, 2015, 30(4): 663-669.
(Ji G J, Han S Q. Deteriorating item inventory decision-making research based on third-party[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(4): 663-669.)

- [6] Goyal S K, Giri B C. Recent trends in modeling of deteriorating inventory[J]. *European J of Operational Research*, 2001, 134(1): 1-16.
- [7] Bakker M, Riezebos J, Teunter R H. Review of inventory systems with deterioration since 2001[J]. *European J of Operational Research*, 2012, 221(2): 275-284.
- [8] Wu K S, Ouyang L Y, Yang C T. An optimal replenishment policy for non-instantaneous deteriorating items with stock-dependent demand and partial backlogging[J]. *Int J of Production Economics*, 2006, 101(2): 369-384.
- [9] Dye C Y. The effect of preservation technology investment on a non-instantaneous deteriorating inventory model[J]. *Omega*, 2013, 41(5): 872-880.
- [10] Maihami R, Karimi B. Optimizing the pricing and replenishment policy for non-instantaneous deteriorating items with stochastic demand and promotional efforts[J]. *Computers & Operations Research*, 2014, 51: 302-312.
- [11] Tat R, Taleizadeh A A, Esmaili M. Developing economic order quantity model for non-instantaneous deteriorating items in vendor-managed inventory(VMI) system[J]. *Int J of Systems Science*, 2015, 46(7): 1257-1268.
- [12] Jaggi C K, Tiwari S, Goel S K. Credit financing in economic ordering policies for non-instantaneous deteriorating items with price dependent demand and two storage facilities[J]. *Annals of Operations Research*, 2017, 248(1/2): 253-280.
- [13] 闵杰, 周永务. 存货影响销售率的非立即变质物品的库存模型[J]. *系统工程学报*, 2009, 24(2): 198-204.
(Min J, Zhou Y W. Inventory model for non-instantaneous deteriorating items under stock-dependent selling rate[J]. *J of Systems Engineering*, 2009, 24(2): 198-204.)
- [14] 李贵萍, 段永瑞, 霍佳震, 等. 持有成本和变质率时变的非立即变质品库存策略[J]. *中国管理科学*, 2015, 23(8): 122-131.
(Li G P, Duan Y R, Huo J Z, et al. Inventory policy for non-instantaneously deteriorating items with time-varying holding cost and deterioration rate[J]. *Chinese J of Management Science*, 2015, 23(8): 122-131.)
- [15] Wee H M, Lo C C, Hsu P H. A multi-objective joint replenishment inventory model of deteriorated items in a fuzzy environment[J]. *European J of Operational Research*, 2009, 197(2): 620-631.
- [16] Chen J M, Chen T H. Effects of joint replenishment and channel coordination for managing multiple deteriorating products in a supply chain[J]. *J of the Operational Research Society*, 2005, 56(10): 1224-1234.
- [17] Khouja M, Goyal S. A review of the joint replenishment problem literature: 1989-2005[J]. *European J of Operational Research*, 2008, 186(1): 1-16.
- [18] Porras E, Dekker R. An efficient optimal solution method for the joint replenishment problem with minimum order quantities[J]. *European J of Operational Research*, 2006, 174(3): 1595-1615.
- [19] Praharsi Y, Purnomo H D, Wee H M. An innovative heuristic for joint replenishment problem with deterministic and stochastic demand[J]. *Int J of Electronic Business Management*, 2010, 8(3): 223.
- [20] Amaya C A, Carvajal J, Castao F. A heuristic framework based on linear programming to solve the constrained joint replenishment problem (C-JRP)[J]. *Int J of Production Economics*, 2013, 144(1): 243-247.
- [21] Wang L, He J, Wu D S, et al. A novel differential evolution algorithm for joint replenishment problem under interdependence and its application[J]. *Int J of Production Economics*, 2012, 135(1): 190-198.
- [22] Arkin E, Joneja D, Roundy R. Computational complexity of uncapacitated multi-echelon production planning problems[J]. *Operations Research Letters*, 1989, 8(2): 61-66.
- [23] Soni H N, Patel K A. Joint pricing and replenishment policies for non-instantaneous deteriorating items with imprecise deterioration free time and credibility constraint[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2013, 66(4): 944-951.
- [24] Maihami R, Kamalabadi I N. Joint pricing and inventory control for non-instantaneous deteriorating items with partial backlogging and time and price dependent demand[J]. *Int J of Production Economics*, 2012, 136(1): 116-122.
- [25] 王硕, 宋申民, 于滢, 等. 基于组合导航系统的非线性高斯滤波算法[J]. *控制与决策*, 2016, 31(9): 1645-1653.
(Wang S, Song S M, Yu H, et al. Gaussian non-linear filter algorithm based on integrated navigation system[J]. *Control and Decision*, 2016, 31(9): 1645-1653.)
- [26] Tsao Y C. Designing a supply chain network for deteriorating inventory under preservation effort and trade credits[J]. *Int J of Production Research*, 2016, 54(13): 3837-3851.
- [27] Viswanathan S. On optimal algorithms for the joint replenishment problem[J]. *The J of the Operational Research Society*, 2002, 53(11): 1286-1290.
- [28] Eynan A, Kropp D H. Effective and simple EOQ-like solutions for stochastic demand periodic review systems[J]. *European J of Operational Research*, 2007, 180(3): 1135-1143.

(责任编辑: 郑晓蕾)