

MIMO纯反馈受限系统无模型非线性比例反演控制

陈龙胜[†], 王琦

(南昌航空大学 飞行器工程学院, 南昌 330063)

摘要: 针对模型未知的MIMO纯反馈系统,提出一种新的控制设计方案.该方案基于预设性能控制思想设计非线性比例控制器,并将其引入反演设计的每一步,以构建非线性比例反演控制器,并融合考虑了模型未知、状态受限、输入受限以及预设性能的需求,且无需引入任何逼近理论和自适应控制等技术即可保证系统具有良好的抗扰性和鲁棒适应性,控制器结构极为简单.最后,基于Lyapunov稳定性定理证明了闭环系统所有信号一致有界,仿真结果验证了所提出设计方案的可行性和有效性.

关键词: MIMO纯反馈系统;反演法;非线性比例控制;预设性能;受限控制

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Nonlinear proportional back-stepping control for un-modeled MIMO pure feedback constrained systems

CHEN Long-sheng[†], WANG Qi

(School of Aircraft Engineering, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China)

Abstract: A control approach is presented for model-unknown multi-input multi-output(MIMO) pure feedback systems. During every step of back-stepping, the prescribed performance control theory is adopted to construct the nonlinear proportional back-stepping controller. Based on comprehensive consideration of the unknown model, state constraints, input saturations and prescribed performance, the proposed scheme has satisfactory anti-disturbance ability, adaption and robustness without introducing any approximation structures and adaptive control. The design procedure and structure of the proposed scheme is very simple. Finally, the stability of the close-loop system is proved based on the Lyapunov stability theorem. The simulation results show the feasibility and effectiveness of the proposed control schemes.

Keywords: MIMO pure feedback systems; back-stepping; nonlinear proportional control; prescribed performance; constrained control

0 引言

复杂多输入多输出(MIMO)纯反馈系统的控制问题是控制界一个公认的难题,目前关于这一问题的研究成果较少.另外,MIMO纯反馈系统是控制系统最一般的表示方法,可以说,绝大多数非线性系统都可以描述为MIMO纯反馈型系统,单输入单输出(SISO)型系统、严反馈型系统等均可视为MIMO纯反馈系统的一种特殊形式,因此,专门研究MIMO纯反馈系统的控制问题具有重要的理论和实际意义.Kanellakopoulos等^[1]提出了反演控制法,其递推设计思想使得控制器的设计十分规范,又由于其在改善

系统过渡过程品质、维护稳定和误差收敛方面表现出较大的优势而被广泛地应用于复杂非线性系统的控制设计中^[2];文献[3]基于反演法为一类特殊的MIMO纯反馈系统设计了自适应控制器,并采用模糊控制技术逼近系统中的未知非线性函数;文献[4]基于韩京清研究员提出的自抗扰思想^[5],首先引入一个新的不确定项,实现了将纯反馈系统的非线性的隐含控制输入转化为显示控制输入,且该输入以线性化方式影响系统的动态特性,然后利用神经网络逼近新的不确定项为系统设计自适应反演控制;在此基础上,文献[6]基于观测器和模糊控制技术进一步为状态不

收稿日期: 2017-01-11; 修回日期: 2017-04-06.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11462015); 航空科学基金项目(2015ZC560007); 江西省教育厅科学技术研究基金项目(GJJ150707).

责任编委: 解学军.

作者简介: 陈龙胜(1983—),男,讲师,硕士,从事非线性系统控制及应用的研究;王琦(1963—),男,教授,博士,从事控制理论、飞行器多学科优化设计等研究.

[†]通讯作者. E-mail: lschen2008@163.com

可测的MIMO纯反馈系统设计了自适应反演控制器;文献[7-9]基于中值定理将MIMO纯反馈等价转换为严反馈型系统,分别基于神经网络^[7]、模糊控制^[8]和鲁棒自适应控制^[9]技术为其设计自适应反演控制器;文献[10]通过对非线性函数进行微分运算,将MIMO纯反馈系统转化转换为严反馈型系统,基于神经网络逼近系统中未知信息为系统设计了自适应反演控制器. 尽管近几年将反演法、神经网络、模糊控制和鲁棒自适应控制等技术结合起来为MIMO纯反馈系统设计控制器已取得一些成果,但仍然存在以下需进一步解决的问题:

1) 控制器设计依赖于系统建模,是以数学模型为基础的现代控制理论设计方法,然而,针对复杂非线性系统的建模到目前为止仍是非常困难的问题.

2) 将神经网络和模糊控制等智能控制技术融入现代控制理论设计中,以解决系统的不确定性问题,虽然这些控制技术能够解决现代控制理论的“未建模动态”和“鲁棒性”的问题,但控制技术的引入使得控制器的结构过于复杂;另一方面,复杂和高深的数学知识及专业技能的需求使得控制工程师在设计和维护时,尤其是在控制复杂系统时,显得力不从心和缺乏自信,理论与实际之间的距离越来越大^[11].

3) 基于反演法设计控制律和更新率时,需要将系统描述为“参数严反馈”形式,然而,参数反馈型系统仅占非线性系统的一部分,许多不确定非线性系统是复杂的、不规则的、强耦合和未知的,这在一定程度上限制了该技术的应用,同时,反演设计方法存在“计算膨胀”的问题.

4) 在动态性能和稳态性能方面,反演法虽然可以通过选择合适的Lyapunov函数、控制项和设计参数消除某些非线性的不良影响,改善系统的动态性能和稳态性能,却无法用解析公式表达性能指标与这些选择的对应关系,从而使得设计带有较大的试探性,效率不高^[2].

5) 控制器的设计和结论的获取以较多苛刻的附加条件为前提,且这些苛刻的附加条件在实际应用中难以满足,如非线性函数满足Lipschitz条件^[3-4,6]、标称模型信息具体已知^[10]、系统的每个不确定项只依赖于当前及前述状态的已知有界函数^[7-9]等.

上述MIMO纯反馈系统控制存在的不足从根本上来讲是因为现有的MIMO控制理论和标准的反演法均属于以模型为基础的现代控制理论范畴,只要控制器设计需要系统模型的具体信息,就必然存在上述问题. 虽然神经网络和模糊控制等智能控制技术的

引入能够降低控制器设计对模型的依赖,但会引起理论和实际之间的矛盾,这些自然让人想起最为典型的无模型控制理论——以瓦特原理为基础的PID控制,其以不依赖于系统和扰动的数学模型,形式简单、“天生的”抗扰性和便于工程实现的优点至今仍占据过程控制领域的统治地位. 然而,多年的理论分析和实际应用都表明,由于其忽略了系统内部因果关系,在处理具有强非线性、时变性和具有周期扰动的非线性系统的控制问题时控制效果不甚理想^[12]. 同时,无法从理论上证明传统PID控制的稳定性和有效性,只能通过对调节参数无数次“谨小慎微”的试凑来保证系统的动态性能和稳态性能.

基于上述分析的现代控制理论和PID控制在MIMO纯反馈系统控制方面的不足,本文结合PID控制和反演控制法的优点,引入Bechlioulis等^[13]提出的预设性能控制思想,为MIMO纯反馈系统提出一种无模型非线性比例反演控制方法. 该方法与现有的控制方法相比,具有以下典型特征:

1) 控制器的设计不依赖于系统的具体模型信息,仅需系统的I/O数据、系统阶数和维数信息. 与现有的很多设计方法不同,所设计的控制器充分利用PID控制“天生”的抗扰性、反演控制法易解决系统稳定性和收敛性,并预设性能控制“跟踪性能”可预设定的特性,无需引入任何逼近定理(神经网络和模糊逼近理论)、观测器技术和自适应控制等技术即可保证系统具有良好的抗扰性和鲁棒自适应性. 与已有的研究成果^[3-4,6-10]相比,控制器的结构极为简单,需在线调整的参数也极少.

2) 解决了反演控制法“参数严反馈”的限制,无需将系统转化或近似为严反馈形式即可直接运用反演控制法,进一步弱化反演控制法运用的限制条件. 同时,消除反演控制法“计算膨胀”的问题,但这与已有的通过引入一个低通滤波器^[14]解决“计算膨胀”的问题不同,无需引入任何额外参数.

3) 为解决传统PID控制理论稳定性无法证明和参数调整“随机性”试凑的缺陷,充分利用反演控制法易解决系统稳定性和收敛性的优点,所提出的方法仅采用比例控制. 同时,为保证比例控制对复杂非线性系统的有效性,引入性能控制思想设计一个非线性函数,最终形成非线性比例控制器,并从理论上证明其稳定性和收敛性. 所研究的方法可以将系统的动态性能和稳态性能指标与参数之间的关系描述为具体解析的函数关系,以保证系统跟踪误差的性能被约束在预设的范围之内. 可以很好地解决PID控制和反

演控制仅能通过“随机”的无数次“谨小慎微”的试凑来保证系统跟踪性能的问题。

4) 控制器的设计过程可同时解决系统状态受限的问题,与已有的状态受限控制成果相比,无需引入额外的理论和参数(如不变集理论^[15]、自适应投影技术^[16]、指令滤波器^[17]、预测控制理论^[18]、障碍 Lyapunov 函数^[19-20])即可解决系统的状态受限问题。控制器的结构、参数和稳定性证明更为简洁。

1 问题描述及预备知识

1.1 系统描述

考虑如下一类受限纯反馈非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = F_i(\bar{x}_i, x_{i+1}, t), & i = 1, 2, \dots, k-1; \\ \dot{x}_k = F_k(\bar{x}_k, u(v), t); \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x_i = [x_{i1}, \dots, x_{in}]^T \in R^n$ 为系统的状态向量; $x_i(0) = x_i^0 = [x_{i1}^0, \dots, x_{in}^0]^T$ 为系统的初值条件,且系统部分状态受限,为便于分析,假设系统仅状态 x_1 受限,即 $|x_{1j}| < K_{cj}, j = 1, 2, \dots, n, K_{cj} > 0$ 为已知常数; $y \in R^n$ 为系统的输出向量; $\bar{x}_i = [x_1^T, \dots, x_i^T]^T \in R^{in}; F_i(\cdot) = [f_{i1}(\cdot), \dots, f_{in}(\cdot)]^T \in R^n$ 为未知的非线性光滑函数; $v \in R^n$ 为系统控制输入向量, $u(v) \in R^n$ 为受执行器饱和和特性影响的输出。饱和和受限函数 $u(v) = [u_1(v_1), \dots, u_n(v_n)]^T$ 具体描述为

$$u_j(v_j) = \text{sat}(v_j) \begin{cases} -u_{Mj}, & v_j < -u_{Mj}; \\ v_j, & -u_{Mj} \leq v_j \leq u_{Mj}; \\ u_{Mj}, & v_j > u_{Mj}. \end{cases} \quad (2)$$

其中 u_{Mj} 为饱和函数 $u_j(v_j)(j = 1, 2, \dots, n)$ 的界限值。可使用双曲正切函数 $h_j(v_j)(j = 1, 2, \dots, n)$ 逼近式(2)的饱和函数,形式如下:

$$h_j(v_j) = u_{Mj} \frac{e^{v_j/u_{Mj}} - e^{-v_j/u_{Mj}}}{e^{v_j/u_{Mj}} + e^{-v_j/u_{Mj}}}. \quad (3)$$

根据式(2)和(3),可得逼近的误差项如下:

$$d_j(v_j) = \text{sat}(v_j) - h_j(v_j). \quad (4)$$

由于饱和函数 $u_j(v_j)$ 和双曲正切函数 $h_j(v_j)$ 都是有界的, $d_j(v_j)$ 也是有界的,可将 $d(v) = [d_1(v_1), \dots, d_n(v_n)]^T$ 视为随时间 t 变化的系统外部扰动。至此,输入饱和和受限的系统(1)可描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = F_i(\bar{x}_i, x_{i+1}, t), & i = 1, 2, \dots, k-1; \\ \dot{x}_k = F_k(\bar{x}_k, h(v), t); \\ y = x_1. \end{cases} \quad (5)$$

控制系统的设计目标是在给定的初始条件 $x_i(0) = x_i^0(i = 1, 2, \dots, k)$ 下为存在输入饱和和受限的系统(1)

设计控制器 $v(t) = \vartheta(x_1, \dots, x_k, t) = [\vartheta_1(x_1, \dots, x_k, t), \dots, \vartheta_n(x_1, \dots, x_k, t)]^T$,使得:

1) 闭环系统所有信号一致有界。

2) 系统的状态向量满足给定的限制条件,即 x_1 满足 $|x_{1j}| < K_{cj}, j = 1, 2, \dots, n$ 。

3) 闭环系统的跟踪误差 $z_1(t) = y(t) - y_r(t)$ 满足预设定的动态和稳态性能,即 $-\delta_{1j}\rho_{1j}(t) < z_{1j}(t) < \delta_{1j}\rho_{1j}(t), j = 1, 2, \dots, n$ 。其中: $\delta_{1j}, \rho_{1j}(t)$ 分别为预设定的性能参数和性能函数,其具体形式将在后文具体给出; $z_1(t) = [z_{11}(t), \dots, z_{1n}(t)]^T \in R^n$ 和 $y_r(t) = [y_{r1}(t), \dots, y_{rn}(t)]^T \in R^n$ 分别为系统的跟踪误差信号和参考输入信号。

假设1 未知非线性函数 $F_i(\cdot)(i = 1, 2, \dots, k)$ 连续可导,并假设其偏导数构成的增益矩阵 G_i 非奇异且符号已知,不失一般性,可假设其符号为正。即对于任意的非零向量 $\varepsilon_i \in R^n$,有 $\varepsilon_i^T G_i \varepsilon_i > 0$,其中增益矩阵 G_i 定义为如下形式且 $u = x_{k+1}$:

$$G_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{i1}(\bar{x}_i, x_{i+1}, t)}{\partial x_{(i+1)1}} & \dots & \frac{\partial f_{i1}(\bar{x}_i, x_{i+1}, t)}{\partial x_{(i+1)n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{in}(\bar{x}_i, x_{i+1}, t)}{\partial x_{(i+1)1}} & \dots & \frac{\partial f_{in}(\bar{x}_i, x_{i+1}, t)}{\partial x_{(i+1)n}} \end{bmatrix}.$$

假设2 非线性系统(1)所有状态均可用来反馈。

假设3 系统饱和函数 $u_j(v_j)$ 的界限值 $u_{Mj}(j = 1, 2, \dots, n)$ 已知。

假设4 系统的期望参考输入信号 $y_r(t)$ 为关于时间 t 的连续可导函数,且 $y_r(t)$ 和 $\dot{y}_r(t)$ 均有界,即存在未知向量 $Y = [y_{d1}, \dots, y_{dn}]^T$ 和 $\bar{Y} = [\bar{y}_{d1}, \dots, \bar{y}_{dn}]^T$,使得 $|y_{rj}(t)| \leq y_{dj}, |\dot{y}_{rj}(t)| \leq \bar{y}_{dj}, j = 1, 2, \dots, n$,其中 y_{dj} 和 \bar{y}_{dj} 为未知的正常数。

定义1 如果连续函数 $N(\chi) : R \rightarrow R$ 满足如下条件,则称 $N(\chi)$ 为 Nussbaum 函数^[21]:

$$\begin{aligned} 1) & \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s N(\chi) d\chi = +\infty, \\ 2) & \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s N(\chi) d\chi = -\infty. \end{aligned}$$

引理1^[21] 设 $V(\cdot)$ 和 $\chi(\cdot)$ 是定义在 $[0, t_f)$ 上的光滑函数,满足 $\forall t \in [0, t_f), V(t) \geq 0, N(\chi)$ 为一个光滑的 Nussbaum 型函数。若 $\forall t \in [0, t_f)$,且下式成立,则 $V(t)$ 和 $\chi(t)$ 在区间 $[0, t_f)$ 必定有界:

$$0 \leq V(t) \leq Q + e^{-qt} \int_0^t (\gamma(\tau)N(\chi) + 1) \dot{\chi} e^{q\tau} d\tau. \quad (6)$$

其中: Q 为适当常数; q 为正常数; $\gamma(\tau)$ 为时变函数,且在闭区间 $\mathfrak{R} := [I^-, I^+]$ 和 $0 \notin \mathfrak{R}$ 内取值。

引理2^[22] 定义开集 $N = R^l \times Z \subset R^{l+1}, Z = \{\xi \in R : |\xi| < K_b\} \subset R, K_b \in R^+,$ 考虑如下系统:

$$\dot{\eta} = h(t, \eta). \quad (7)$$

其中: $\eta = [\omega, \xi]^T \in N$; 函数 $h : R^+ \times N \rightarrow N^{l+1}$ 满足

在 R^+ 上关于时间 t 分段连续,且在 N 内关于 η 满足局部一致 Lipschitz 条件. 假设存在连续可微正定函数 $U: R^l \rightarrow R^+$ 和 $V_1: Z \rightarrow R^+$, 满足

$$\begin{aligned} |\xi| \rightarrow K_b, V_1 \rightarrow \infty, \\ \Upsilon_1(\|\omega\|) \leq U(\omega, t) \leq \Upsilon_2(\|\omega\|), \end{aligned} \quad (8)$$

其中 Υ_1, Υ_2 为 K_∞ 类函数. 令 $V(\eta) = V_1(\xi) + U(\omega, t)$, $\xi(0) \in Z$, 若如下不等式成立:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \eta} h \leq 0, \xi \in Z, \quad (9)$$

则对于 $t \geq 0$, $\xi(t) \in Z$.

引理 3^[23] 定义 $T \in R^{n \times n}$ 为实对称矩阵, $\varepsilon \in R^n$ 为非零向量, $\beta = (\varepsilon^T T \varepsilon) / (\varepsilon^T \varepsilon)$, 则矩阵 T 的所有特征值中至少有两个特征值分别位于区间 $(-\infty, \beta)$ 和 $[\beta, \infty)$ 中.

1.2 性能函数

若连续函数为性能函数, 则该函数满足^[13]:

1) $\rho_{ij}(t)$ 是严格的递减函数;

2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{ij} = \rho_{ij\infty} > 0$.

控制目标 (3) 可以通过如下不等式实现:

$$\begin{aligned} -\delta_{ij}\rho_{ij}(t) < z_{ij}(t) < \delta_{ij}\rho_{ij}(t), \\ i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (10)$$

其中: $t \in [0, \infty)$, $0 < \delta_{ij} \leq 1$, 选取的性能函数形式为

$$\rho_{ij}(t) = (\rho_{ij0} - \rho_{ij\infty})e^{-l_{ij}t} + \rho_{ij\infty}, \quad (11)$$

$\rho_{ij0}, \rho_{ij\infty}, l_{ij} > 0$ 为预设常数. 设计参数 $\rho_{ij0} \geq |z_{ij}(0)|$, $z_{ij}(0)$ 为初始跟踪误差, 具体形式后文给出; $\rho_{ij\infty}$ 为预设的稳态误差上限; l_{ij} 为 $\rho_{ij}(t)$ 的衰减速度, 是跟踪误差 $z_{ij}(t)$ 的收敛速度下限; $\delta_{ij}\rho_{ij0}$ 和 $-\delta_{ij}\rho_{ij0}$ 分别为跟踪误差超调量的上下限. 因此, 通过选择适当的性能函数 $\rho_{ij}(t)$ 和常数 δ_{ij} 便可对输出误差的动态和稳态性能进行限制.

2 非线性比例反演控制器设计

经典 PID 控制器的设计中引入积分和微分环节以建立控制量与误差之间的动态关系, 其不易满足高性能的要求, 且积分和微分环节的引入给闭环系统稳定性证明带来很大的麻烦. 为此, 结合反演控制法, 通过递归设计程序和控制 Lyapunov 函数获取控制律, 容易解决系统的稳定性和收敛性问题^[2]. 将其与比例控制相结合从理论上而言即可轻松地解决系统的稳定性问题. 同时, 为保证所设计控制器能够适应于复杂的非线性系统, 引入预设性能控制思想设计非线性函数 $\Gamma(\cdot)$, 以构建非线性比例控制器, 即预设性能非线性比例控制, 其中非线性函数 $\Gamma(\cdot)$ 和比例环节 $K_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 一起构成非线性比例控制. 系

统的控制结构十分简单, 且控制器的设计只需系统的参考输入信号 $y_r(t)$ 、输出信号 $y(t)$ 、系统阶数和维数以及系统状态可测即可, 与系统的具体模型无关. 同时, 比例控制具有“天生的”抗扰性, 反演控制有“良好的稳定性、收敛性”、预设性能控制与模型无关以及系统的“跟踪性能”可预设定的特点, 从理论上讲, 只要系统的阶数和维数完全相同, 不论其具体模型怎样, 选择合适的比例参数 K_i 即可使闭环系统稳定, 且系统的跟踪误差满足预设性能的要求, 系统必然具有较好的鲁棒自适应性和抗扰性. 下面给出详细的控制器设计过程和稳定性分析过程.

在进行控制器设计前引入非线性初等函数

$$\Gamma(\xi_{ij}) = \ln \left(\frac{\delta_{ij} + \xi_{ij}}{\delta_{ij} - \xi_{ij}} \right), \quad (12)$$

其中 δ_{ij} 在前文已具体给出. 下面结合反演控制法和比例控制为系统 (1) 设计非线性比例反演控制器.

Step 1 考虑系统 (1) 的第 1 个子系统 ($i = 1$), 定义 $z_{1j}(t) = y_j(t) - y_{rj}(t)$, 为该子系统选取性能函数 $\rho_{1j}(t) = (\rho_{1j0} - \rho_{1j\infty})e^{-l_{1j}t} + \rho_{1j\infty}$, 且 $\rho_{1j0} \geq |z_{1j}(0)| = |x_{1j}^0 - y_{rj}(0)|$, $j = 1, 2, \dots, n$. 设计虚拟控制律

$$\alpha_1(x_1, t) = \alpha_1(\xi_1) = -K_1 \begin{bmatrix} \Gamma(\xi_{11}) \\ \vdots \\ \Gamma(\xi_{1n}) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

其中: $K_1 = \text{diag}\{K_{11}, \dots, K_{1n}\}$ 为设计的比例参数, 且 $K_{1j} > 0$; $\xi_{1j} = z_{1j}(t)/\rho_{1j}(t)$. 下面基于 Lyapunov 稳定理论分析并证明系统稳定和状态 x_1 能满足限制条件的具体原因. 定义

$$\begin{cases} z_{2j}(t) = x_{2j} - \alpha_{1j}(x_1, t), \\ \xi_{2j} = z_{2j}(t)/\rho_{2j}(t). \end{cases} \quad (14)$$

由 ξ_{1j}, ξ_{2j} 的定义可得

$$\begin{cases} x_{1j} = y_{rj}(t) + \rho_{1j}(t)\xi_{1j}, \\ x_{2j} = \alpha_{1j}(\xi_{1j}) + \rho_{2j}(t)\xi_{2j}, \end{cases} \quad (15)$$

其中 $\rho_{2j}(t) = (\rho_{2j0} - \rho_{2j\infty})e^{-l_{2j}t} + \rho_{2j\infty}$ 为第 2 个子系统的性能函数. 考虑式 (15) 并对 $\xi_1 = [\xi_{11}, \dots, \xi_{1n}]^T$ 求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \bar{\rho}_1(t)(F_1(y_r(t) + \rho_1(t)\xi_1, \alpha_1(\xi_1) + \\ &\rho_2(t)\xi_2) - \dot{y}_r(t) - \dot{\rho}_1(t)\xi_1) = \\ &h_1(t, \xi_1, \xi_2). \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} \rho_1(t)\xi_1 &= [\rho_{11}(t)\xi_{11}, \dots, \rho_{1n}(t)\xi_{1n}]^T, \\ \rho_2(t)\xi_2 &= [\rho_{21}(t)\xi_{21}, \dots, \rho_{2n}(t)\xi_{2n}]^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_1(t) &= \text{diag}\{1/\rho_{11}(t), \dots, 1/\rho_{1n}(t)\}, \\ \dot{\rho}_1(t)\xi_1 &= [\dot{\rho}_{11}(t)\xi_{11}, \dots, \dot{\rho}_{1n}(t)\xi_{1n}]^T, \\ \dot{y}_r(t) &= [\dot{y}_{r1}(t), \dots, \dot{y}_{rn}(t)]^T. \end{aligned}$$

定义

$$\varepsilon_{1j}(t) = \ln \left(\frac{\delta_{1j} + \xi_{1j}}{\delta_{1j} - \xi_{1j}} \right), \quad (17)$$

为第1个子系统选取如下 Lyapunov 函数:

$$V_1 = \varepsilon_1^T \varepsilon_1 / 2, \quad (18)$$

其中 $\varepsilon_1 = [\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{1n}]^T$. 由式(17)可知, 对于 $|\xi_{1j}| < \delta_{1j}$, V_1 是严格正定可微的. 考虑式(15)并对(18)两边关于时间求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \varepsilon_1^T \Lambda_1 (F_1(y_r(t) + \rho_1(t)\xi_1, \alpha_1(\xi_1) + \\ &\quad \rho_2(t)\xi_2) - \dot{y}_r(t) - \dot{\rho}_1(t)\xi_1), \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $\Lambda_1 = \text{diag}\{2\delta_{11}/((\delta_{11}^2 - \xi_{11}^2)\rho_{11}(t)), \dots, 2\delta_{1n}/((\delta_{1n}^2 - \xi_{1n}^2)\rho_{1n}(t))\}$. 由于 ρ_{1j} 有界, 根据连续函数的极值理论易知, 对于 $|\xi_{1j}| < \delta_{1j}$, 有 Λ_1 为正定对角矩阵, 且每个元素均大于零有界, 因此存在未知的正常数 $\bar{\Lambda}_{1j} (j = 1, 2, \dots, n)$ 使得 $2\delta_{1j}/((\delta_{1j}^2 - \xi_{1j}^2)\rho_{1j}(t)) \leq \bar{\Lambda}_{1j}$. 根据假设 1, 可以利用中值定理将式(19)中的 $F_1(y_r(t) + \rho_1(t)\xi_1, \alpha_1(\xi_1) + \rho_2(t)\xi_2)$ 项描述为

$$\begin{aligned} &F_1(y_r(t) + \rho_1(t)\xi_1, \alpha_1(\xi_1) + \rho_2(t)\xi_2) = \\ &F_1(y_r(t) + \rho_1(t)\xi_1, \rho_2(t)\xi_2) + \bar{G}_1\alpha_1(\xi_1). \end{aligned} \quad (20)$$

令 $z_{1jl}^* = \lambda_{1jl}(\alpha_{1l}(\xi_{1l}) + \rho_{2l}(t)\xi_{2l}) + (1 - \lambda_{1jl})\rho_{2l}(t)\xi_{2l}$, $\lambda_{1jl} \in (0, 1), j, l = 1, 2, \dots, n, \bar{G}_1$ 可以表示为

$$\begin{aligned} \bar{G}_1 &= \\ &\left[\begin{array}{ccc} \left. \frac{\partial f_{11}(y_r(t) + \rho_1(t)\xi_1, z_{111})}{\partial z_{111}} \right|_{z_{111}=z_{111}^*} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \\ \left. \frac{\partial f_{1n}(y_r(t) + \rho_1(t)\xi_1, z_{1n1})}{\partial z_{1n1}} \right|_{z_{1n1}=z_{1n1}^*} & \cdots & \\ \left. \frac{\partial f_{11}(y_r(t) + \rho_1(t)\xi_1, z_{11n})}{\partial z_{11n}} \right|_{z_{11n}=z_{11n}^*} & & \\ \vdots & & \\ \left. \frac{\partial f_{1n}(y_r(t) + \rho_1(t)\xi_1, z_{1nn})}{\partial z_{1nn}} \right|_{z_{1nn}=z_{1nn}^*} & & \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

令矩阵 Π_1 为

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= [\Pi_{11} \ \cdots \ \Pi_{1n}]^T = \\ &\left[\begin{array}{c} f_{11}(y_r(t) + \rho_1(t)\xi_1, \rho_2(t)\xi_2) - \dot{y}_{r1}(t) - \xi_{11}\dot{\rho}_{11}(t) \\ \vdots \\ f_{1n}(y_r(t) + \rho_1(t)\xi_1, \rho_2(t)\xi_2) - \dot{y}_{rn}(t) - \xi_{1n}\dot{\rho}_{1n}(t) \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

综合考虑式(13)、(20)和(22), 将式(19)进一步表示为

$$\dot{V}_1 = -\varepsilon_1^T \Lambda_1 \bar{G}_1 K_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_1^T \Lambda_1 \Pi_1. \quad (23)$$

由于 $\rho_{1j}, \dot{\rho}_{1j}, \rho_{2j}, y_{rj}, \dot{y}_{rj}$ 有界, 非线性函数 $f_{1j}(\cdot)$ 连续, 对 $|\xi_{1j}| < \delta_{1j}$, 根据极值理论可知存在未知的正常数 $\bar{\Pi}_{1j}$, 使得

$$\begin{aligned} &|f_{1j}(y_r(t) + \rho_1(t)\xi_1, \rho_2(t)\xi_2) - \\ &\dot{y}_{rj}(t) - \xi_{1j}\dot{\rho}_{1j}(t)| \leq \bar{\Pi}_{1j}. \end{aligned} \quad (24)$$

对 $|\xi_{1j}| < \delta_{1j}$, 有 $\delta_{1j}/(\delta_{1j}^2 - \xi_{1j}^2) > 1/\delta_{1j} > 1$. 由假设 1 可知, 对于任意的非零向量 $\varepsilon_1 \in R^n$, 有 $\varepsilon_1^T \bar{G}_1 \varepsilon_1 > 0$. 同时, 由于 Λ_1, K_1 为正对角矩阵, 易知矩阵 $T_1 = \Lambda_1 \bar{G}_1 K_1$ 也非奇异且对于任意的非零向量 $\varepsilon_1 \in R^n$, 也有 $\varepsilon_1^T T_1 \varepsilon_1 = \varepsilon_1^T \Lambda_1 \bar{G}_1 K_1 \varepsilon_1 > 0$. 由于 $T_1 \in R^{n \times n}$ 非奇异, T_1 可表述为实对称矩阵 \bar{T}_1 和反实对称矩阵 \underline{T}_1 之和, 即

$$T_1 = \bar{T}_1 + \underline{T}_1. \quad (25)$$

其中: $\bar{T}_1 = (T_1 + T_1^T)/2, \underline{T}_1 = (T_1 - T_1^T)/2$. 易知 \bar{T}_1 也非奇异且对于任意的非零向量 $\varepsilon_1 \in R^n$, 有 $\varepsilon_1^T \bar{T}_1 \varepsilon_1 > 0$. 由于反对称矩阵 \underline{T}_1 对角线的元素全为零, 易得

$$\varepsilon_1^T \underline{T}_1 \varepsilon_1 = 0. \quad (26)$$

定义 $\beta_1(t) = (\varepsilon_1^T \bar{T}_1 \varepsilon_1)/(\varepsilon_1^T \varepsilon_1), \bar{T}_1$ 为实对称矩阵, 由引理 3 可知, 存在未知常数 σ_1^- 和 σ_1^+ 使得

$$\sigma_1^- < \lambda_{1 \min} \leq \beta_1 \leq \lambda_{1 \max} \leq \sigma_1^+, \quad (27)$$

其中 $\lambda_{1 \min}, \lambda_{1 \max}$ 分别为矩阵 \bar{T}_1 的最小和最大特征值. 若 $\varepsilon_1 \neq 0$, 则有

$$\varepsilon_1^T \bar{T}_1 \varepsilon_1 = \beta_1 \|\varepsilon_1\|^2 > 0. \quad (28)$$

由式(28)可知 $\beta_1 > 0$, 假设存在一个正常数 $\bar{\sigma}_1$ 使得 $\beta_1 \geq \bar{\sigma}_1 > 0$. 考虑式(25)~(28), 式(23)可表示为

$$\dot{V}_1 \leq -\beta_1 \|\varepsilon_1\|^2 + \|\varepsilon_1\| \|\Lambda_1\| \|\Pi_1\|. \quad (29)$$

其中: $\bar{\Lambda}_1 = \text{diag}\{\bar{\Lambda}_{11}, \dots, \bar{\Lambda}_{1n}\}, \bar{\Pi}_1 = [\bar{\Pi}_{11}, \dots, \bar{\Pi}_{1n}]^T$. 如果 ε_1 满足 $\|\varepsilon_1\| > \|\Lambda_1\| \|\Pi_1\| / \bar{\sigma}_1$, 则 $\dot{V}_1 < 0$, 因此, 闭环系统第 1 个子系统所有信号一致有界, 且存在正常数 $\bar{\varepsilon}_{1j}$ 使得 $|\varepsilon_{1j}| \leq \bar{\varepsilon}_{1j}$, 从而虚拟控制量 $\alpha_1(x_1, t)$ 也有界.

由引理 2 可知, 对于 $\forall t \geq 0$, 有 $|\xi_{1j}| < \delta_{1j}$, 即 $|z_{1j}(t)/\rho_{1j}(t)| < \delta_{1j}$, 进一步可得对于 $\forall t \geq 0$, 有

$$-\delta_{1j}\rho_j(t) < z_{1j}(t) < \delta_{1j}\rho_{1j}(t), \quad (30)$$

即系统的跟踪误差满足预设的动态和稳态性能需求. 由于系统状态 x_1 受限, 即 $|x_{1j}| < K_{cj}$, 在控制器设计时需考虑系统状态受限问题. 实际应用中往往给定了状态 x_1 的界限向量 $K_c = [K_{c1} \ \cdots \ K_{cn}]^T$ 以及状态 x_1 期望界限向量 $\Delta = [\Delta_1 \ \cdots \ \Delta_n]^T$, 此时界限误差可表示为 $K_b = [K_{b1} \ \cdots \ K_{bn}]^T = K_c - \Delta$. 为

使得系统的状态 x_1 满足限制条件, 跟踪误差必须满足 $-K_{bj} < z_{1j}(t) < K_{bj}$. 所设计的方法无需增加额外设计, 仅选取性能参数 δ_{1j}, ρ_{1j0} 使其满足 $0 < \delta_{1j}\rho_{1j0} < k_{bj}$ 即可保证状态满足限制条件 $|x_{1j}| < K_{cj}$.

为方便下一步设计, 对式(13)中的 $\alpha_1(\xi_1)$ 关于时间 t 求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= \frac{d\alpha_1}{d\xi_1} \dot{\xi}_1 = \\ & -\Theta(F_1(y_r(t) + \rho_1(t)\xi_1, \alpha_1(\xi_1) + \rho_2(t)\xi_2) - \\ & \dot{y}_r(t) - \dot{\rho}_1(t)\xi_1). \end{aligned} \quad (31)$$

其中

$$\Theta = \text{diag}\left\{\frac{2\delta_{11}K_{11}}{(\delta_{11}^2 - \xi_{11}^2)\rho_{11}(t)}, \dots, \frac{2\delta_{1n}K_{1n}}{(\delta_{1n}^2 - \xi_{1n}^2)\rho_{1n}(t)}\right\}.$$

由于 $|\xi_{1j}| < \delta_{1j}$, 由式(31)可知, 对于 $\forall t \geq 0, \dot{\alpha}_1(x_1, t)$ 必有界.

Step i ($i = 2, 3, \dots, k-1$) 为第 i 个子系统选取性能函数 $\rho_{ij}(t) = (\rho_{ij0} - \rho_{ij\infty})e^{-\ell_{ij}t} + \rho_{ij\infty}$, 且 $\rho_{ij0} \geq |z_{ij}(0)| = |x_{ij}^0 - \alpha_{(i-1)j}(x_1(0), \dots, x_{i-1}(0), 0)|$, $j = 1, 2, \dots, n$; 为第 i 个子系统设计虚拟控制律

$$\alpha_i(x_1, \dots, x_i, t) = \alpha_i(\xi_i) = -K_i \begin{bmatrix} \Gamma(\xi_{i1}) \\ \vdots \\ \Gamma(\xi_{in}) \end{bmatrix}. \quad (32)$$

其中: $K_i = \text{diag}\{K_{i1}, \dots, K_{in}\}$ 为设计的比例参数且 $K_{ij} > 0$; ξ_{ij} 定义为

$$\begin{cases} z_{ij}(t) = x_{ij} - \alpha_{(i-1)j}(x_1, \dots, x_i, t), \\ \xi_{ij} = z_{ij}(t)/\rho_{ij}(t). \end{cases} \quad (33)$$

由式(33)可得

$$\begin{cases} x_{ij} = \alpha_{(i-1)j}(\xi_{i-1}) + \xi_{ij}\rho_{ij}(t), \\ x_{(i+1)j} = \alpha_{ij}(\xi_i) + \xi_{(i+1)j}\rho_{(i+1)j}(t). \end{cases} \quad (34)$$

类似 Step 1, 考虑式(34)并对 $\xi_i = [\xi_{i1}, \dots, \xi_{in}]^T$ 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \bar{\rho}_i(t) \left(F_i(y_r(t) + \rho_1(t)\xi_1, \alpha_1(\xi_1) + \right. \\ & \left. \rho_2(t)\xi_2, \dots, \alpha_{i+1}(t)\xi_{i+1}) + \rho_{i+1}(t)\xi_{i+1} \right) - \\ & \frac{d\alpha_{i-1}}{d\xi_{i-1}} h_{i-1}(t, \xi_1, \dots, \xi_i) - \dot{\rho}_i(t)\xi_i = \\ & h_i(t, \xi_1, \dots, \xi_{i+1}). \end{aligned} \quad (35)$$

定义

$$\varepsilon_{ij}(t) = \ln\left(\frac{\delta_{ij} + \xi_{ij}}{\delta_{ij} - \xi_{ij}}\right), \quad (36)$$

为第 i 个子系统选取如下 Lyapunov 函数:

$$V_i = \frac{1}{2} \varepsilon_i^T \varepsilon_i, \quad (37)$$

其中 $\varepsilon_i = [\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{in}]^T$. 类似 Step 1 的稳定性分析过程, 可得

$$\dot{V}_i \leq -\beta_i \|\varepsilon_i\|^2 + \|\varepsilon_i\| \|A_i\| \|II_i\|. \quad (38)$$

如果 $\|\varepsilon_i\| > \|A_i\| \|II_i\| / \bar{\sigma}_i$, 则 $\dot{V}_i < 0$. 因此, 闭环系统第 i 个子系统所有信号一致有界. Step i 相关参数的定义方法与 Step 1 类似. 可得 $\alpha_i(x_1, \dots, x_i, t)$ 及其微分信号 $\dot{\alpha}_i(x_1, \dots, x_i, t)$ 也有界, 且根据引理 2 同样可得, 对于 $\forall t \geq 0$, 有 $|\xi_{ij}| < \delta_{ij}$.

Step k 控制量 u 的出现. 选取性能函数 $\rho_{kj}(t) = (\rho_{kj0} - \rho_{kj\infty})e^{-\ell_{kj}t} + \rho_{kj\infty}$ 且 $\rho_{kj0} \geq |z_{kj}(0)| = |x_{kj}^0 - \alpha_{(k-1)j}(x_1(0), \dots, x_{k-1}(0), 0)|$, $j = 1, 2, \dots, n$. 设计第 k 个子系统的虚拟控制律

$$u(x_1, \dots, x_k, t) = u(\xi_k) = -K_k \begin{bmatrix} \Gamma(\xi_{k1}) \\ \vdots \\ \Gamma(\xi_{kn}) \end{bmatrix}. \quad (39)$$

其中: $K_k = \text{diag}\{K_{k1}, \dots, K_{kn}\}$ 为比例参数且 $K_{kj} > 0$; ξ_{kj} 定义为

$$\begin{cases} z_{kj}(t) = x_{kj} - \alpha_{(k-1)j}(x_1, \dots, x_k, t), \\ \xi_{kj} = z_{kj}(t)/\rho_{kj}(t). \end{cases} \quad (40)$$

类似 Step 1 和 Step i , 对 $\xi_k = [\xi_{k1}, \dots, \xi_{kn}]^T$ 求导, 可得

$$\dot{\xi}_k = h_k(t, \xi_1, \dots, \xi_k). \quad (41)$$

定义

$$\varepsilon_{kj}(t) = \ln\left(\frac{\delta_{kj} + \xi_{kj}}{\delta_{kj} - \xi_{kj}}\right), \quad (42)$$

为第 k 个子系统选取如下 Lyapunov 函数:

$$V_k = \frac{1}{2} \varepsilon_k^T \varepsilon_k. \quad (43)$$

类似 Step 1 和 Step i 的稳定性分析过程, 可得

$$\dot{V}_k \leq -\beta_k \|\varepsilon_k\|^2 + \|\varepsilon_k\| \|A_k\| \|II_k\|. \quad (44)$$

如果 ε_k 满足 $\|\varepsilon_k\| > \|A_k\| \|II_k\| / \bar{\sigma}_k$, 则 $\dot{V}_k < 0$. 因此, 闭环系统第 k 个子系统所有信号一致有界, Step k 相关参数的定义方法也与 Step 1 类似. 同样可得虚拟控制量 $u(x_1, \dots, x_k, t)$ 及其微分信号 $\dot{u}(x_1, \dots, x_k, t)$ 也有界, 且根据式(38)和引理 2 可得, 对于 $\forall t \geq 0$, $|\xi_{kj}| < \delta_{kj}$.

Step $k+1$ 实际控制量 v 的出现. 定义

$$z_{k+1} = h(v) - u. \quad (45)$$

其中: $z_{k+1} = [z_{(k+1)1}, \dots, z_{(k+1)n}]^T$, $h(v) = [h_1(v_1), \dots, h_n(v_n)]^T$, u 为 $u(x_1, \dots, x_k, t)$ 的简写. 为系统设

计如下形式的控制律和自适应律:

$$\dot{v} = -\bar{K}v + \omega, \tag{46}$$

$$\omega = N(\chi)\varpi, \tag{47}$$

$$\varpi = K_{k+1}z_{k+1} - \bar{K}\gamma v - \dot{u}, \tag{48}$$

$$\dot{\chi} = \text{diag}\{\varpi_1, \dots, \varpi_n\}z_{k+1}. \tag{49}$$

其中: $K_{k+1} = \text{diag}\{K_{(k+1)1}, \dots, K_{(k+1)n}\} > 0, \bar{K} = \text{diag}\{\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_n\} > 0$ 为设计参数, $N(\chi) = \text{diag}\{N_1(\chi_1), \dots, N_n(\chi_n)\}, N_j(\chi_j) = \chi_j^2 \cos(\chi_j), \chi = [\chi_1, \dots, \chi_n]^T, \gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}, \gamma_j = 4/(e^{\nu_j/u_{Mj}} + e^{-\nu_j/u_{Mj}})^2 > 0, j = 1, 2, \dots, n$. 对式(45)关于时间求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{z}_{k+1} &= \frac{\partial h(v)}{\partial v} \dot{v} - \dot{u} = \\ &- K_{k+1}z_{k+1} + (\gamma N(\chi) + I_{n \times n})\varpi. \end{aligned} \tag{50}$$

为第 $k+1$ 个子系统选取如下 Lyapunov 函数:

$$V_{k+1} = \sum_{j=1}^n V_{(k+1)j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n z_{(k+1)j}^T z_{(k+1)j}. \tag{51}$$

考虑式(49), 并对 $V_{(k+1)j}$ 关于时间 t 求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(k+1)j} &= \\ &- K_{(k+1)j}z_{(k+1)j}^2 + (\gamma_j N_j(\chi_j) + 1)\varpi_j z_{(k+1)j} \leq \\ &-\lambda z_{(k+1)j}^2 + (\gamma_j N_j(\chi_j) + 1)\dot{\chi}_j, \end{aligned} \tag{52}$$

其中 $\lambda_j \leq 2K_{(k+1)j}$. 令 $\lambda_j^* = V_{(k+1)j}(0)$, 式(52)两边同时乘以 $e^{\lambda_j t}$, 并在 $[0, t]$ 内积分, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(k+1)j}(t) &\leq \\ &\lambda_j^* + e^{-\lambda_j t} \int_0^t (\gamma_j N_j(\chi_j) + 1)\dot{\chi}_j e^{\lambda_j \tau} d\tau. \end{aligned} \tag{53}$$

由引理1可知, $V_{(k+1)j}$ 和 χ_j 有界, 进一步可知, $V_{(k+1)}, z_{k+1}, \chi$ 有界.

定理1 对于满足假设1 ~ 假设4的存在输入饱和和状态受限的MIMO纯反馈系统, 设计如式(46) ~ (48)所述的控制器, 采用式(49)所述的参数自适应律和形如式(13)、(32)和(39)的虚拟控制律, 存在参数 $K_i (i = 1, 2, \dots, k+1)$ 和 \bar{K} 使得闭环系统所有信号都一致有界. 且:

- 1) 系统的跟踪误差 $z_{1j}(t) = y_j(t) - y_{rj}(t) (j = 1, 2, \dots, n)$ 满足预设定的动态和稳态性能;
- 2) 系统的状态向量始终满足给定的限制条件, 即 x_1 满足 $|x_{1j}| < K_{cj}, j = 1, 2, \dots, n$.

根据上述设计过程给出的虚拟控制律、控制律和自适应律可知, 所设计的控制器不依赖具体模型信息. 控制器的设计仅需利用系统的I/O数据以及系统的阶数和维数信息, 控制器需设计的参数十分少, 在线调整的参数仅一个, 控制器结构十分简单, 便于工程实现. 由于将非线性比例控制与反演法结合, 所设

计的控制器继承了PID控制“天生的”抗扰性和反演控制易稳定收敛的优点; 同时, 又引入性能函数以保证跟踪误差满足预设定的动态和稳态性能. 因此, 从理论上讲, 所设计的控制器具有良好的抗扰性和鲁棒自适应性.

下面通过仿真实验验证所提出的设计方法具有良好的抗扰性和鲁棒自适应性.

3 仿真实验

为验证所提出的设计算法且使其具有“天生的”抗扰性和鲁棒自适应, 通过以下两个仿真实例进行验证说明.

仿真实例1 采用两个不同的仿真对象, 其具有相同的维数和阶数 $k = 2, n = 2$, 满足如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, t), \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2, u), \\ y = x_1. \end{cases} \tag{54}$$

其中: $x_1 = [x_{11}, x_{12}]^T, x_2 = [x_{21}, x_{22}]^T$. 两个仿真对象均受外部扰动的影响, 并不考虑状态和输入受限情况, 控制器设计中不考虑 Step $k+1$ 即可. 虽然对象不同, 但采用的控制器“型号”完全相同(参数和结构均相同). 为下述两个受扰动的仿真实验对象设计虚拟控制器及控制器为

$$\begin{aligned} \alpha_1(x_1, t) &= -K_1 \begin{bmatrix} \Gamma(\xi_{11}) \\ \vdots \\ \Gamma(\xi_{12}) \end{bmatrix}, \\ u(x_1, x_2, t) &= -K_2 \begin{bmatrix} \Gamma(\xi_{21}) \\ \vdots \\ \Gamma(\xi_{22}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{55}$$

其中

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}(\xi_{ij}) &= \ln((\delta_{ij} + \xi_{ij})/(\delta_{ij} - \xi_{ij})), i, j = 1, 2; \\ K_1 &= \text{diag}\{0.5, 0.5\}, K_2 = \text{diag}\{25, 25\}. \end{aligned}$$

参考输入信号为 $y_r(t) = [\sin(0.5t), \cos(0.5t)]^T$, 参数 $\delta_{11} = \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{22} = 1$, 选取的性能函数为

$$\begin{cases} \rho_{11}(t) = \rho_{12}(t) = (0.3 - 0.03)e^{-4t} + 0.03, \\ \rho_{21}(t) = \rho_{22}(t) = (1 - 0.03)e^{-2t} + 0.03. \end{cases} \tag{56}$$

外部扰动信号选为

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) &= [-0.5 \sin x_{11} \cos t, -0.5, \sin(10t)]^T, \\ \Delta_2(t) &= [\sin(5t), \cos(10t + 10^\circ)]^T. \end{aligned}$$

具体仿真对象为纯数值算例和双连杆机器人系统, 仿真结果如图1和图2所示.

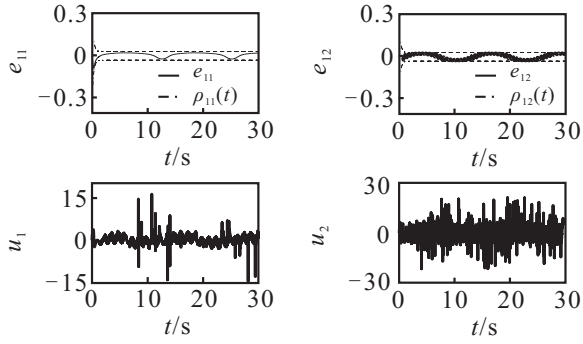


图1 数值算例系统跟踪误差和控制输入变化曲线

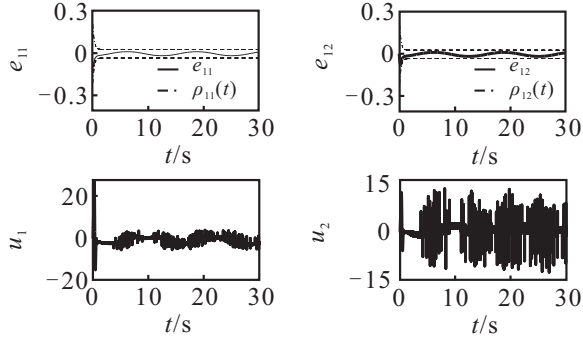


图2 双连杆机器人系统跟踪误差和控制输入变化曲线

1) 纯数值算例具体描述为如下形式, 仿真时初始值为 $x_0 = [0, 0, 0, 0]^T$:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, t) = [x_{11} \sin x_{11} + x_{21}, x_{12} + x_{22}]^T, \\ F_2(x_1, x_2, u) = \\ [x_{11}x_{21}/(10x_{11}^2 + 1) + u_1, x_{22}\cos x_{11} \sin x_{21} + u_2]^T. \end{cases} \quad (57)$$

显然, 该系统满足假设1, 即对于任意的非零向量 ε_j , 有增益矩阵 G_j 满足 $\varepsilon_j^T G_j \varepsilon_j > 0, j = 1, 2$.

2) 双连杆机器人系统^[24]可描述为如下形式, 仿真时初始值为 $x_0 = [-0.25, 0.25, 0, 0]^T$:

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h\dot{q}_2 & -h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}. \quad (58)$$

其中

$$D_{11} = a_1 + 2a_3 \cos q_2 + 2a_4 \sin q_2, \quad D_{22} = a_2,$$

$$D_{12} = D_{21} = a_2 + a_3 \cos q_2 + a_4 \sin q_2,$$

$$h = a_3 \sin q_2 - a_4 \cos q_2,$$

$$a_1 = I_1 + m_l l_{c1}^2 + I_e + m_e l_{ce}^2 + m_e l_1^2,$$

$$a_2 = I_e + m_e l_{ce}^2, \quad a_3 = m_e l_1 l_{ce} \cos \delta_e,$$

$$a_4 = m_e l_1 l_{ce} \sin \delta_e, \quad m_1 = 1, \quad m_e = 2,$$

$$l_1 = 1, \quad l_{c1} = 0.5, \quad l_{ce} = 0.6,$$

$$I_1 = 0.12, \quad I_e = 0.25, \quad \delta_e = 30^\circ.$$

若令 $x_1 = [q_1, q_2]^T, x_2 = [\dot{q}_1, \dot{q}_2]^T, u = [\tau_1, \tau_2]^T$, 则系统(58)可描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, t) = [x_{21}, x_{22}]^T, \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2, u) = \\ D^{-1} \left(- \begin{bmatrix} -hx_{22} & -h(x_{21} + x_{22}) \\ hx_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \right). \end{cases} \quad (59)$$

显然, 该系统的增益矩阵 G_1 满足对任意的非零向量 ε_1 , 有 $\varepsilon_1^T G_1 \varepsilon_1 > 0$. 由文献[24]可知, 该系统的增益矩阵 G_2 也满足对于任意的非零向量 ε_2 , 有 $\varepsilon_2^T G_2 \varepsilon_2 > 0$, 系统满足假设1.

由图1和图2可知, 虽然控制对象不同, 但所设计的控制器均能够保证闭环系统稳定, 且系统的跟踪误差满足预设的性能要求. 对象不同, 控制器“型号”相同, 可以表明所设计的控制器具有较好的鲁棒自适应; 又由于所研究的对象存在外部扰动, 进一步表明控制器具有“天生的”抗扰性.

仿真实例2 四旋翼飞行器系统. 四旋翼飞行器具有多变量、非线性、强耦合和干扰敏感的特性, 飞行控制系统的设计难度较大^[25], 具有一定的代表性, 用其验证所设计方法的有效性具有一定的说服力.

令 $y_1 = x_1 = [\phi, \theta, \psi]^T, x_2 = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T, u = [\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]^T$, 四旋翼飞行器姿态系统模型可表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, t) = \dot{x}_2, \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2, u) = [f_{21}, f_{22}, f_{23}]^T. \end{cases} \quad (60)$$

其中

$$f_{21} = (\sin \phi \tan \theta) \frac{\tau_\theta}{j_y} + (\cos \phi \tan \theta) \frac{\tau_\psi}{j_z} +$$

$$\frac{\tau_\phi}{j_x} + \dot{\phi} \dot{\theta} \tan \theta + \frac{\dot{\psi} \dot{\theta}}{\cos \theta},$$

$$f_{22} = \cos \phi \frac{\tau_\theta}{j_y} - \sin \phi \frac{\tau_\psi}{j_z} - \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \theta,$$

$$f_{23} = \left(\frac{\sin \phi}{\cos \theta} \right) \frac{\tau_\theta}{j_y} + \left(\frac{\cos \phi}{\cos \theta} \right) \frac{\tau_\psi}{j_z} + \frac{\dot{\phi} \dot{\theta}}{\cos \theta} + \dot{\psi} \dot{\theta} \tan \theta.$$

绕 X、Y、Z 轴的转动惯量 j_x 、 j_y 、 j_z 分别为 $6.23 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2/\text{rad}$, $6.23 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2/\text{rad}$ 和 $1.12 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2/\text{rad}$; ϕ 、 θ 、 ψ 分别表示飞行器的滚转角、俯仰角和偏航角; τ_ϕ 、 τ_θ 、 τ_ψ 分别为飞行器的滚转、俯仰和偏航力矩, 是控制输入量. 显然, 该系统的增益矩阵 G_1 也满足对于任意的非零向量 ε_1 , 有 $\varepsilon_1^T G_1 \varepsilon_1 > 0$. 同时, 一般情况下增益矩阵 G_2 也满足对于任意的非零向量 ε_2 , 有 $\varepsilon_2^T G_2 \varepsilon_2 > 0$. 四旋翼飞行器系统满足假设1.

飞行器的未建模动态 ΔF_2 和外部扰动 $\Delta_2(t)$ 分

别为

$$\Delta F_2 = \begin{bmatrix} 0.02 \sin \phi + \sin \phi \tau_\phi \\ 0.02 \cos \theta + \cos \theta \tau_\theta \\ 0.02 \sin \phi + \cos \phi \tau_\phi \end{bmatrix}, \quad (61)$$

$$\Delta_2(t) = \begin{bmatrix} -0.4361 \sin(1.6t + 30^\circ) \\ -0.4984 \sin(1.8t + 50^\circ) \\ -0.6720 \sin(2t + 20^\circ) \end{bmatrix}. \quad (62)$$

系统的参考输入信号为 $y_r(t) = [5 \sin(2t + 20^\circ), 5 \cos(1.5t + 10^\circ), 10 \sin(4t + 10^\circ)]^T$. 控制输入饱和函数的界限值为 $u_M = [0.5, 0.5, 0.8]^T \text{N}\cdot\text{m}$, 期望姿态界限 $\Delta = [5, 5, 10]^T (\text{^\circ})$, 实际姿态界限为 $K_c = [5.1, 5.1, 10.1]^T (\text{^\circ})$, 跟踪误差限制为 $K_b = K_c - \Delta = [0.1, 0.1, 0.1]^T (\text{^\circ})$. 因此, 只要系统的跟踪误差满足 $|e_j| \leq |x_{1j} - y_{rj}| \leq K_{bj}, j = 1, 2, 3$, 系统的姿态限制就不会被违背. 根据性能函数的定义和 Step 1 的设计可知, 只需选择适当的性能函数参数 $\rho_{1j}(t)$ 和 δ_{1j} , 使 $\delta_{1j}\rho_{1j0} \leq K_{bj}$ 即可. 为此, 取参数 $\delta_{1j} = \delta_{2j} = 1$, 性能函数选取为

$$\begin{cases} \rho_{1j}(t) = (0.1 - 0.01)e^{-4t} + 0.01, \\ \rho_{2j}(t) = (1 - 0.03)e^{-2t} + 0.03, \end{cases} \quad (63)$$

其中 $j = 1, 2, 3$. 显然, 所选取的性能函数能够满足 $\delta_{1j}\rho_{1j0} \leq K_{bj}$. 采用式(46)和(48)设计的控制器 ($k = 2, n = 3$), 选用式(49)所描述的参数自适应律和式(13)、(32)和(39)的虚拟控制律作为四旋翼飞行器控制器, 其中设计参数为

$$K_1 = \text{diag}\{0.5, 0.5, 0.5\}, K_2 = \text{diag}\{1.5, 1.5, 5\},$$

$$K_3 = \text{diag}\{35, 35, 35\}, \bar{K} = \text{diag}\{10, 10, 10\}.$$

仿真时的初始值取为

$$x_1^0 = [1.635, 4.874, 6.359]^T (\text{^\circ}),$$

$$x_2^0 = [0.01, 0.02, 0.015]^T (\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}).$$

仿真结果如图3~图5所示.

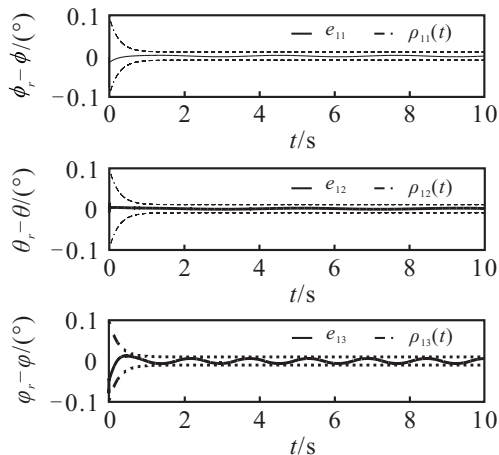


图3 四旋翼飞行器系统姿态跟踪误差变化曲线

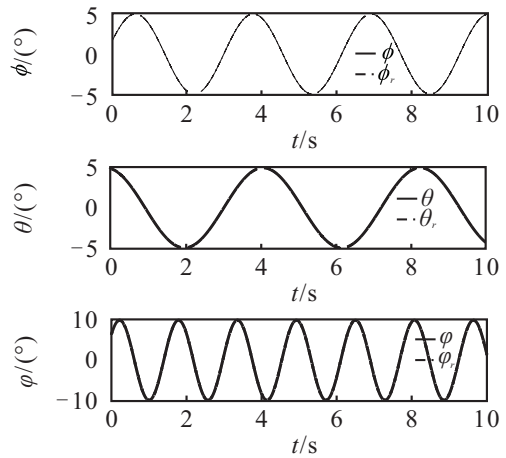


图4 四旋翼飞行器系统姿态角变化曲线

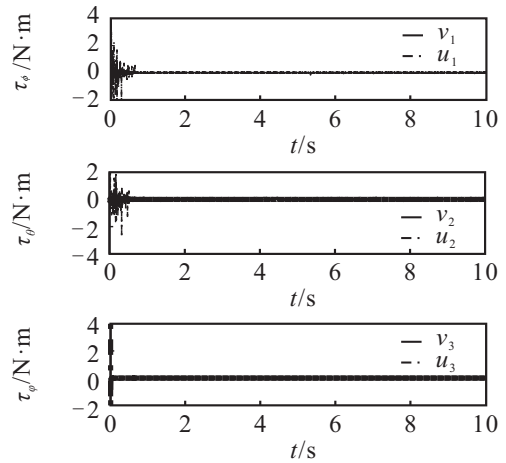


图5 四旋翼飞行器系统的控制输入变化曲线

图3表明, 系统的跟踪误差满足预设的性能需求; 图4表明, 系统的状态始终满足限制条件; 图5为控制器的实际输入和饱和输入, 可知所设计的控制方法能够很好地抑制饱和受限的影响. 所采用的四旋翼飞行器存在状态受限、输入受限、未建模动态和外部扰动, 控制效果仍然较好, 表明针对实际系统所设计的控制器具有较好的鲁棒性和抗扰性.

4 结论

本文为MIMO纯反馈系统设计了一种无模型非线性比例反演控制器, 所设计控制器无需系统的具体模型信息, 控制器结构及参数设计简单, 便于工程实现. 所设计的控制器融合解决了系统状态受限、输入饱和受限以及预设性能的问题, 并通过仿真实例验证了方法的有效性. 结果表明, 该方法具有良好的鲁棒自适应和抗扰性.

参考文献(References)

[1] Kanellakopoulos I, Kokotovic P V, Morse A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1991, 36(11): 1241-1253.
 [2] 徐湘元. 反推技术及其在不确定系统中的应用[J]. 系

- 系统工程与电子技术, 2009, 31(11): 2703-2709.
(Xu X Y. Backstepping technique and its application in uncertain systems[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(11): 2703-2709.)
- [3] Sui S, Tong S C, Li Y M. Adaptive fuzzy backstepping output feedback tracking control of MIMO stochastic pure-feedback nonlinear systems with input saturation[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2014, 254(6): 26-46.
- [4] Li Y M, Li T S, Tong S C. Adaptive neural networks output feedback dynamic surface control design for MIMO pure-feedback nonlinear systems with hysteresis[J]. Neurocomputing, 2016, 198(11): 58-68.
- [5] 高志强. 自抗扰控制思想探究[J]. 控制理论与应用, 2013, 30(12): 1498-1509.
(Gao Z Q. On the foundation of active disturbance rejection control[J]. Control Theory & Applications, 2013, 30(12): 1498-1509.)
- [6] Tong S C, Li Y M, Shi P. Observer-based adaptive fuzzy backstepping output feedback control of uncertain MIMO pure-feedback nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2012, 20(4): 771-784.
- [7] 刘树光, 孙秀霞, 解武杰, 等. 一类纯反馈非线性系统的自适应动态面控制[J]. 信息与控制, 2012, 41(3): 301-306.
(Liu S G, Sun X X, Xie W J, et al. Adaptive dynamic surface control for a class of pure-feedback nonlinear systems[J]. Information and Control, 2012, 41(3): 301-306.)
- [8] Liu Y J, Tong S C, Wang W. Adaptive fuzzy output tracking control for a class of uncertain nonlinear systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 160(19): 2727-2754.
- [9] Chen L S, Wang Q. Adaptive robust control for a class of uncertain MIMO non-affine nonlinear systems[J]. IEEE/CAA J of Automatica Sinica, 2016, 3(1): 105-112.
- [10] 胡云安, 李海燕. 基于神经网络的非仿射块控非线性系统动态反演控制[J]. 控制与决策, 2012, 27(1): 65-70.
(Hu Y A, Li H Y. NN-based dynamic feedback backstepping control for nonaffine block nonlinear systems[J]. Control and Decision, 2012, 27(1): 65-70.)
- [11] 侯忠生, 许建新. 数据驱动控制理论及方法的回顾和展望[J]. 自动化学报, 2009, 35(6): 650-665.
(Hou Z S, Xu J X. On data-driven control theory: The state of the art and perspective[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(6): 650-665.)
- [12] 侯忠生. 无模型自适应控制的现状与展望[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(4): 586-591.
(Hou Z S. On model-free adaptive control: the state of the art and perspective [J]. Control Theory & Applications, 2006, 23(4): 586-591.)
- [13] Bechlioulis C P, Rovithaki G A. Robust adaptive control of feedback linearizable MIMO nonlinear systems with prescribed performance[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(9): 2090-2099.
- [14] Swaroop D, Hedrick J K, Yip P P, et al. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(10): 1893-1899.
- [15] Saberi A, Han J, Stoorvogel A. Constrained stabilization problems for linear plants[J]. Automatica, 2002, 38(4): 639-654.
- [16] Xu B, Wang S X. Command filter based robust nonlinear control of hypersonic aircraft with magnitude constraints on states and actuators[J]. J of Intelligent & Robotic Systems, 2014, 73(1/2/3/4): 233-247.
- [17] Farrell J, Polycappouf M, Sharran M. Adaptive backstepping with magnitude, rate, and bandwidth constraints: aircraft longitude control[C]. Proc of the American Control Conf. Denver: IEEE, 2003: 3898-3904.
- [18] Grune L, Pannek J. Nonlinear model predictive control[M]. London: Springer-Verlag, 2011: 59-86.
- [19] Tee K T, Ge S S, Tay E H. Barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems[J]. Automatics, 2009, 45(4): 918-927.
- [20] Liu Y J, Tong S C. Barrier lyapunov function-based adaptive control for a class of nonlinear pure-feedback systems with state constraints[J]. Automatica, 2016(64): 70-75.
- [21] Wen C Y, Zhou J, Liu Z T, et al. Robust adaptive of uncertain nonlinear systems in the presence of input saturation and external disturbance[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2011, 56(7): 1672-1678.
- [22] Tee K P, Ren B B, Ge S S. Control of nonlinear systems with time-varying output constraints[J]. Automatica, 2011, 47(11): 2511-2516.
- [23] Shi W X. Adaptive fuzzy control for MIMO nonlinear systems with non-symmetric control gain matrix and unknown control direction[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2014, 22(5): 1288-1300.
- [24] Labiod S, Guerra T M. Direct adaptive fuzzy control for a class of MIMO nonlinear systems[J]. Int J of Systems Science, 2007, 38(8): 665-675.
- [25] 杨荟慷, 姜斌, 张柯. 四旋翼直升机姿态系统的直接自修复控制[J]. 控制理论与应用, 2014, 31(8): 1053-1060.
(Yang H L, Jiang B, Zhang K. Direct self-repairing control for four-rotor helicopter attitude systems[J]. Control Theory & Applications, 2014, 31(8): 1053-1060.)
- [26] 魏青铜, 陈谋, 吴庆宪. 输入饱和与姿态受限的四旋翼无人机反步姿态控制[J]. 控制理论与应用, 2015, 32(10): 1361-1369.
(Wei Q T, Chen M, Wu Q X. Backstepping-based attitude control for a quadrotor UAV with input saturation and attitude constraints[J]. Control Theory & Applications, 2015, 32(10): 1361-1369.)

(责任编辑: 郑晓蕾)