

饱和约束控制系统的吸引域估计

林宗利^{1†}, 李元龙²

- (1. 美国弗吉尼亚大学 电机与计算机工程系, 夏洛茨维尔 22904-4743;
2. 上海交通大学 系统控制与信息处理教育部重点实验室, 上海 200240)

摘要: 饱和约束控制系统的吸引域估计是非线性系统领域的一个基本问题, 主要涉及到饱和约束的处理和 Lyapunov 函数的选取. 围绕这两个关键问题, 梳理解决饱和约束控制系统吸引域估计问题的一系列方法, 总结了文献及最近的一些研究结果.

关键词: 饱和约束控制系统; 吸引域; 执行器饱和; Lyapunov 函数

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Estimation of domain of attraction for linear systems with actuator saturation

LIN Zong-li^{1†}, LI Yuan-long²

- (1. Department of Electrical and Computer Engineering, University of Virginia, Charlottesville 22904-4743, USA;
2. Key Laboratory of System Control and Information Processing of Ministry of Education of China, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: The estimation of the domain of attraction of a linear system subject to actuator saturation is one of the fundamental problems in nonlinear control. Solving this problem involves the treatment of the saturation function and the choice of the Lyapunov function. For the two problems, this paper reviews a series of approaches to estimate the domain of attraction of saturated system, and summarizes results in the literature, including some of our recent results.

Keywords: saturated systems; domain of attraction; actuator saturation; Lyapunov functions

0 引言

在实际的工程控制系统中, 由于物理特性的限制和安全运行的要求, 执行器饱和(有界输入)的现象几乎随处可见. 近几十年来, 控制领域的学者们对饱和约束控制系统给予了广泛关注, 系统地研究了饱和约束控制系统的全局稳定与镇定、半全局镇定以及局部稳定与镇定等各种问题, 获得了非常可观的研究成果.

全局镇定问题. 有界输入下线性系统能够被全局渐近镇定的一个前提是, 该线性系统所有状态在有界输入下都可以被转移到状态空间的原点. 那么一个基本的问题就是如何判断一个线性系统的所有状态在有界输入下能否被转移到原点, 这需要借助有界输入下渐近零可控(Asymptotically null controllable by bounded control, 简称 ANCBC)的概念^[1]. 如果对于状态空间内的任意一点, 都会存在一个容许的有界输入

将该状态点在有限时间内或者渐近地驱动到原点, 则该系统便是有界输入下渐近零可控的(ANCBC). 实际上, 一个线性系统在有界输入下可实现全局镇定当且仅当它是 ANCBC. 文献[2]证明了一个线性系统是 ANCBC 当且仅当该系统作为一个线性系统是可控的, 且其所有开环极点都位于闭的左半平面. 因此, 只有 ANCBC 线性系统才能实现有界输入下的全局渐近镇定.

在构造全局镇定控制器方面, 文献[3]指出, 对于多积分器系统, 如果积分器的数目超过 2 个, 则线性反馈不可能实现全局镇定. 这意味着对于一般的 ANCBC 线性系统, 在有界输入下必须借助非线性控制器实现全局镇定. 文献[4]创造性地构造了嵌套饱和形式的有界非线性控制器来全局镇定积分器链系统. 文献[5]在继承嵌套饱和型控制器的基础上, 针对一般形式的 ANCBC 线性系统分别给出了嵌套饱和

收稿日期: 2017-11-21; 修回日期: 2018-01-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61733018, 61603250); 上海市自然科学基金项目(17ZR1445400).

作者简介: 林宗利(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性系统、受限控制及其应用等研究; 李元龙(1984—), 男, 助理教授, 博士, 从事受限控制理论及其应用的研究.

[†]通讯作者. E-mail: zl5y@virginia.edu

型与级联饱和型全局镇定控制器的设计方法.

半全局镇定问题. 对于一般的 ANCBC 系统, 线性反馈不可能实现全局镇定, 但是因其具有形式简单且易实现等优点, 在 ANCBC 线性系统的镇定问题上受到了人们广泛的关注. 文献[6-7]提出低增益反馈理论, 并指出线性反馈所能达到的最好效果是半全局镇定. 所谓半全局镇定, 即对于状态空间中一个任意给定且包含原点的有界集 B , 都会存在一个状态反馈使得起始于 B 的所有系统轨迹均收敛到原点. 低增益反馈矩阵是一族参数化的增益矩阵, 记为 $F(\varepsilon)$, 且随着 ε 逼近零, $F(\varepsilon)$ 也逼近于零矩阵. 低增益反馈实现半全局镇定的主要思想是, 对于任意给定的有界集 B , 不管其有多大, 总会存在一个 ε , 使得在 B 上所有输入均不饱和, 即在 B 上, 含执行器饱和的闭环线性系统保持线性系统的特性.

目前设计低增益反馈的方法主要有3类: 一类是基于特征值配置的方法^[6-7], 将开环极点向左平移 ε ; 另一类设计方法基于参数 H_2 ^[8] 或参数 H_∞ ^[9] 代数 Riccati 方程, 将它们的解用于构造低增益反馈; 第3种方法结合上述两类方法, 设计基于参数 Lyapunov 方程解的设计方法^[10], 也因此同时具有上述两类方法的优点, 即可将增益矩阵表示为 ε 的显式函数的同时提供 Lyapunov 函数.

局部稳定与镇定问题. 首先介绍有界输入下零可控性的相关内容^[11]. 一个状态 x_0 在时间 T 上是零可控的, 如果存在一个容许控制 u 使得系统的状态轨迹 $x(t)$ 满足 $x(0) = x_0$ 和 $x(T) = 0$. 在时间 T 上所有零可控的状态的集合称为时间 T 上的零可控域, 记为 $C(T)$. 另外, 一个状态 x_0 是零可控的, 如果存在一个 $T \in [0, +\infty)$ 满足 $x_0 \in C(T)$. 所有零可控状态的集合称为零可控域, 记为 C . 显然, $C = \bigcup_{T \in [0, +\infty)} C(T)$. 对于一个 ANCBC 系统, C 为整个状态空间. 开环不稳定的线性系统在有界输入下是不可能实现全局镇定的, 这意味着其零可控域不再是整个状态空间. 这样就产生了一个基本问题, 如何描述在有界输入下线性系统的局部零可控域 C . 文献[12-13]系统研究了这一问题, 通过利用系统状态方程的解, 给出了零可控域的一般性描述, 并指出饱和输入下开环不稳定线性系统的零可控域边界是由其反时间系统的一组边界轨迹 (Extremal trajectories) 构成的.

对于有界输入下一般的开环不稳定线性系统, 其零可控域的精确描述是很复杂的, 更感兴趣的是在给定控制律的情况下估计闭环系统的吸引域. 本文重点关注一类饱和约束控制系统, 即如下所示的带有饱

和输入的线性系统:

$$\dot{x} = Ax + B \text{sat}(u), \quad u = Fx. \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态, $u \in \mathbf{R}^m$ 为控制输入信号, $F \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 为线性反馈增益, $\text{sat}: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ 为标量的向量型饱和函数. 对于 $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$, $\text{sat}(u)$ 的表达式为

$$\text{sat}(u) = [\text{sat}(u_1), \text{sat}(u_2), \dots, \text{sat}(u_m)]^T,$$

$$\text{sat}(u_j) = \text{sign}(u_j) \min\{1, |u_j|\}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

对于一个初始状态 $x(0) = x_0$, 记系统(1)的状态轨迹为 $\phi(t, x_0)$, 则系统(1)原点的吸引域可定义为

$$S := \{x_0 \in \mathbf{R}^n : \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x_0) = 0\}.$$

根据上述定义, 吸引域 S 是系统 $\dot{x} = Ax + \text{sat}(u)$ 零可控域 C 的子集. 作为一类特殊且结构简单的系统, 即单输入的二阶反稳定系统(1), 其吸引域的性质和特点已得到相当深入的研究. 例如, 文献[14]指出, 吸引域 S 的边界记为 ∂S , 是一条封闭曲线; 文献[12]证明了 ∂S 是单输入二阶系统(1)唯一的极限环, 且 S 是凸的; 此外, 文献[12]还研究了 S 与 C 的关系, 即在特定的高增益线性反馈下, 增益越大, S 越接近于 C . 然而, 对于形式更一般的系统(1), 其吸引域边界 ∂S 是几乎无法精确解析刻画的.

既然直接解析描述 ∂S 是不可行的, 一个退而求其次的办法是估计吸引域 S . 估计饱和约束控制系统(1)的吸引域是非线性系统领域中一个很基本的研究问题, 这方面学者们付出了大量心血并获得了可观的研究成果^[15-27]. 在这些研究成果中, 使用频率最高的工具之一是不变集^[17]. 如果起始于某个集合内任意一个状态, 其轨迹一直保留在该集合内, 则该集合称为不变集. 显然, 吸引域 S 是一个不变集. 如果起始于一个不变集的所有状态, 其轨迹最终收敛到原点, 则该不变集可用来估计系统的吸引域. 一般地使用收缩不变集估计系统吸引域, Lyapunov 函数的水平集是常用的收缩不变集. 一个 Lyapunov 函数水平集是收缩不变的, 如果该 Lyapunov 函数在该集合中任意非零点上沿系统轨迹的时间导数都小于零.

使用不变集来估计饱和约束控制系统(1)的吸引域涉及到两个方面: 饱和约束的处理和 Lyapunov 函数的选取. 由于饱和函数的非线性, 需要利用其某些特性或者将其表示成某些可方便处理的形式. Lyapunov 函数的选取需要选定适当的 Lyapunov 函数, 建立可确保其水平集为收缩不变集的条件. 下面将分别从饱和约束的处理和 Lyapunov 函数的选取这两个方面介绍饱和约束控制系统(1)的吸引域估计.

在开始本文主要内容之前,首先给出一些符号的定义.对于方阵 $A, \text{He}(A) = A + A^T$. 给定两个非负整数 $m, n, m \leq n, I[m, n]$ 表示整数集 $\{m, m + 1, \dots, n\}, C_n^m$ 表示组合数, I_m 表示 m 维单位矩阵. 对于正定矩阵 $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和正数 $\rho, E(P, \rho) = \{x \in \mathbf{R}^n : x^T P x \leq \rho\}$.

1 饱和约束的处理

比较典型的处理饱和约束的方法有局部扇区条件(Local sector condition)和凸包表示法(Convex hull representation),下面分别详细叙述这两种处理饱和约束的方法以及它们在吸引域估计中的应用.

1.1 局部扇区条件

局部扇区条件是将饱和函数置于线性扇区内,从而得到不等式形式的扇区条件,给定矩阵 $H \in \mathbf{R}^{m \times n}$,记

$$L(H) = \{x \in \mathbf{R}^n : \|Hx\|_\infty \leq 1\}.$$

显然, $L(H)$ 表示 Hx 未饱和的区域,即 $\text{sat}(Hx)$ 的线性区域. 局部扇区条件可描述为如下引理.

引理1^[22] 令 $F, H \in \mathbf{R}^{m \times n}$,对于每一个状态 $x \in L(H)$,以及任意的正定对角矩阵 $S \in \mathbf{R}^{m \times m}$,以下不等式成立:

$$(Fx - \text{sat}(Fx))^T S (\text{sat}(Fx) - Hx) \geq 0. \quad (2)$$

图1给出了 $m = 1$ 和 $n = 1$ 情况下局部扇区条件的几何解释,其中 $H > 0$. 注意到 $L(H) = [-x_0, x_0] = [-H^{-1}, H^{-1}]$,显然当 $x \in [-x_0, x_0]$ 时,饱和线性反馈 $\text{sat}(Fx)$ 位于直线 Fx 和 Hx 组成的扇区内. 值得注意的是,不等式(2)只有当 x 位于局部区域 $L(H)$ 上才是成立的,这也就是不等式(2)被称为局部扇区条件的原因. 如果令 $H = 0$,则局部扇区条件(2)将变为(全局)扇区条件,即

$$(Fx - \text{sat}(Fx))^T S (\text{sat}(Fx)) \geq 0. \quad (3)$$

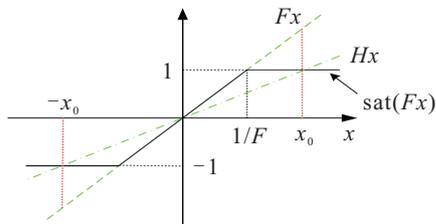


图1 局部扇区条件的几何解释

局部扇区条件的一般使用方法是,将非负项 $(Fx - \text{sat}(Fx))^T S (\text{sat}(Fx) - Hx)$ 加到 Lyapunov 函数沿系统轨迹的时间导数上,形成一个由系统状态和饱和函数构成的增广状态向量的二次型函数. Lyapunov 函数水平集的收缩不变性可由定义这个二

次型函数中矩阵的负定性来确保.

考虑二次 Lyapunov 函数 $V(x) = x^T P x$ 以及其水平集椭圆 $E(P) = \{x \in \mathbf{R}^n : V(x) \leq 1\}$,如果 $E(P) \subseteq L(H)$,同时有

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x^T P \dot{x} \leq \\ &2x^T P (Ax + B \text{sat}(Fx)) + \\ &2(Fx - \text{sat}(Fx))^T S (\text{sat}(Fx) - Hx) = \\ &\eta^T \begin{bmatrix} \text{He}(PA - F^T S H) & PB + F^T S + H^T S \\ \star & -2S \end{bmatrix} \eta < 0, \\ &\forall x \in E(P) \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

其中 $\eta = [x^T \text{sat}^T(Fx)]^T$,则椭圆 $E(P)$ 是系统(1)的收缩不变集.

根据以上分析,有如下定理1.

定理1 给定正定矩阵 $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$,如果存在矩阵 $H \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 和正定对角矩阵 $S \in \mathbf{R}^{m \times m}$,满足

$$\begin{bmatrix} \text{He}(PA - F^T S H) & PB + F^T S + H^T S \\ \star & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (4)$$

以及 $E(P) \subseteq L(H)$,则椭圆 $E(P)$ 是系统(1)的收缩不变集.

这样,满足定理1的椭圆 $E(P)$ 可以作为系统(1)的一个吸引域估计.

1.2 传统型凸包表示法

除了局部扇区条件,另一种广泛使用的处理饱和约束的方法是传统型凸包表示法. 首先定义一组矩阵,令 D 为一组 $m \times m$ 对角矩阵构成的集合,其中每个对角矩阵的对角元素或者是1或者是0. 以 $m = 2$ 为例,有

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

D 中有 2^m 个对角矩阵,每个对角矩阵依次记为 D_i ($i \in I[1, 2^m]$). 令 $D_i^- = I_m - D_i$,有 $D_i^- \in D$. 给定两个矩阵 $F, H \in \mathbf{R}^{m \times n}$,矩阵 $D_i F + D_i^- H$ 是由矩阵 F 中的某些行和矩阵 H 中另外一些行互补拼合而成,矩阵 F, H 中的哪些行被选择组合成 $D_i F + D_i^- H$,分别由 D_i 和 D_i^- 中为1的对角元素来决定. 传统型凸包表示法^[12,24-25]叙述如下.

引理2 令 $F, H \in \mathbf{R}^{m \times n}$,对于每一个状态 $x \in L(H)$,有

$$\text{sat}(Fx) \in \text{co}\{D_i F x + D_i^- H x : i \in I[1, 2^m]\}, \quad (5)$$

其中 $\text{co}\{\cdot\}$ 为一组向量构成的凸包.

由凸包的定义可知,存在一组满足 $\sum_{i=1}^{2^m} \alpha_i(x) = 1$ 的非负标量函数 $\alpha_i(x), i \in I[1, 2^m]$,使得

$$\text{sat}(Fx) = \sum_{i=1}^{2^m} \alpha_i(x)(D_i F + D_i^- H)x.$$

考虑二次Lyapunov函数,对于每个 $x \in L(H)$,有

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x^T P(Ax + B\text{sat}(Fx)) = \\ &= 2x^T \sum_{i=1}^{2^m} \alpha_i(x)(P(A + B(D_i F + D_i^- H)))x. \end{aligned}$$

定理2^[12,25] 给定正定矩阵 $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$,如果存在矩阵 $H \in \mathbf{R}^{m \times n}$,满足

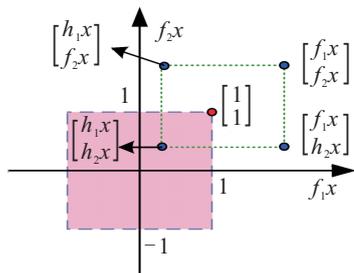
$$\text{He}(P(A + BD_i F + BD_i^- H)) < 0, i \in I[1, 2^m], \quad (6)$$

以及 $E(P) \subseteq L(H)$,则椭球 $E(P)$ 是系统(1)的收缩不变集.

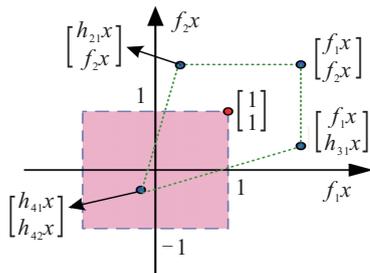
注1 处理饱和约束的局部扇区条件(2)和传统型凸包表示法(5)均引入了辅助矩阵 H ,前者仍然含有饱和函数,而后者凸包的顶点均是状态的线性函数,因此传统型凸包表示法的处理更加“彻底”,较之局部扇区条件具有更小的保守性.对于单输入的特殊情况,即 $m = 1$,由式(5)可知, $\text{sat}(Fx) \in \text{co}\{Fx, Hx\}$,即当 $x \in L(H)$ 时, $\text{sat}(Fx)$ 位于由 Fx 和 Hx 组成扇区内,此时传统型凸包表示法(5)等价于局部扇区条件(2).

为了更直观地理解传统型凸包表示法,以 $m = 2$ 为例,图2(a)给出了传统型凸包表示法在输入空间上的几何表示.图中, f_j 和 h_j 分别为矩阵 F 和 H 的第 j 行, $j = 1, 2$,阴影区域表示 $L(H)$,有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_1 x \\ f_2 x \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H \right) x, \\ \begin{bmatrix} h_1 x \\ f_2 x \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H \right) x, \end{aligned}$$



(a) 传统型



(b) 改进型

图2 凸包表示法的几何示意图

$$\begin{bmatrix} f_1 x \\ h_2 x \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} H \right) x,$$

$$\begin{bmatrix} h_1 x \\ h_2 x \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} H \right) x.$$

值得注意的是,由于凸包中的每个顶点共用了公共辅助矩阵 H ,凸包的形状必然为矩形(在三维及三维以上输入空间中为长方体和多维长方体).

1.3 改进型凸包表示法

如第1.2节所述,传统型凸包的各个顶点共用唯一的辅助矩阵 H ,因此凸包的形状必然是矩形(多维长方体),这种形状上的约束会导致传统型凸包表示法在处理饱和函数时的保守性.可以观察到,如果将图2(a)中的顶点 Hx (其对应的对角矩阵 $D_i^- = I_2$) 移动到阴影区域中的其他位置,则会形成一个新凸包,即形状更一般的四边形,如图2(b)所示.图中, h_{ij} 为矩阵 $H_i \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ 的第 j 行, $j = 1, 2, i = 1, 2, 3, 4$,有

$$\begin{bmatrix} f_1 x \\ f_2 x \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H_1 \right) x,$$

$$\begin{bmatrix} h_{21} x \\ f_2 x \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H_2 \right) x,$$

$$\begin{bmatrix} f_1 x \\ h_{32} x \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} H_3 \right) x,$$

$$\begin{bmatrix} h_{41} x \\ h_{42} x \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} H_4 \right) x.$$

此时,饱和线性反馈 $\text{sat}(Fx)$ 依旧位于新凸包内,且新凸包的每个顶点各自对应着一个彼此独立的辅助矩阵,从而使得凸包形状不再受到公共辅助矩阵的约束.基于上述事实,给出处理饱和约束的改进型凸包表示法.

引理3^[26] 令 $F, H_i \in \mathbf{R}^{m \times n}, i \in I[1, 2^m]$,对于每个状态 $x \in L(H_i), \forall i \in I[1, 2^m]$,有

$$\text{sat}(Fx) \in \text{co}\{D_i Fx + D_i^- H_i x : i \in I[1, 2^m]\}. \quad (7)$$

显然,如果令 $H_i = H, i \in I[1, 2^m]$,则改进型凸包表示法(7)将退化为传统型凸包表示法(5).改进型凸包表示法为凸包的每个顶点引入了独立的辅助矩阵 H_i ,在不改变凸包表现形式的基础上,大大增加了自由变量的数量,降低了处理饱和约束的保守性,从而可得到一组保守性更小的可确保椭球 $E(P)$ 收缩不变性的充分条件^[21,23,26].

定理3 给定正定矩阵 $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$,如果存在矩阵 $H_i \in \mathbf{R}^{m \times n}, i \in I[1, 2^m]$,满足

$$\text{He}(P(A + BD_i F + BD_i^- H_i)) < 0, i \in I[1, 2^m], \quad (8)$$

以及 $E(P) \subseteq \bigcap_{i=1}^{2^m} L(H_i)$, 则椭圆 $E(P)$ 是系统 (1) 的收缩不变集.

注2 局部扇区条件和凸包表示法不仅可以处理单层饱和函数 $\text{sat}(Fx)$, 经过扩展后, 也可用来处理嵌套饱和函数和分段线性函数, 详细结果参见文献 [16,20,28-31].

1.4 优化问题

通过使用处理饱和约束的不同方法, 定理 1~定理 3 给出了确保椭圆 $E(P)$ 收缩不变性的充分条件, 满足定理 1~定理 3 中任一组条件的椭圆 $E(P)$ 均可作为饱和约束控制系统 (1) 的一个吸引域估计. 在所有的吸引域估计中, 最感兴趣的是其中最大的收缩不变椭圆. 为了找到一个尽可能大的椭圆, 需要构建以椭圆收缩不变性条件为约束的优化问题. 首先需要—个衡量椭圆 $E(P)$ 大小的标准, 令 $X_R \subset \mathbf{R}^n$ 为具有某种期望形状且包含零点的有界闭集, 称为形状参考集. 对于某一正实数 α , 记 $\alpha X_R = \{\alpha x : x \in X_R\}$. 显然, 对于一个集合 S , 满足 $\alpha X_R \subseteq S$ 的 α 越大, 集合 S 也越大. 本文选择多面体形状参考集, 即 $X_R = \text{co}\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, 其中 $x_p \in \mathbf{R}^n, p \in I[1, N]$. 特别地, 当 $N = 1$, 即 $X_R = \{x_1\}$ 时, 一个最大的 α 意味着集合 S 在 x_1 方向上是最大的. 根据上述叙述, 可以通过最大化参数 α 获得最大的吸引域估计. 以定理 2 为例, 相应的优化问题构造如下:

$$\max_{P>0, H} \alpha. \quad (9)$$

$$\text{s.t. a) } \alpha X_R \subseteq E(P);$$

$$\text{b) } \text{He}(P(A + BD_i F + BD_i^- H)) \leq 0, \\ i \in I[1, 2^m];$$

$$\text{c) } E(P) \subseteq L(H).$$

为了求解上述优化问题, 需要将集包含约束条件 a) 和 c) 转化为可数值计算的矩阵不等式条件. 约束条件 a) 等价于

$$\alpha^2 x_p^T P x_p \leq 1, \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_p^T \\ \alpha^2 & P^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, p \in I[1, N].$$

约束条件 c) 等价于

$$h_j P^{-1} h_j^T \leq 1, \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & h_j P^{-1} \\ \star & P^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \in I[1, m],$$

其中 h_j 为矩阵 H 的第 j 行. 此外, 约束条件 b) 可写为

$$\text{He}(AP^{-1} + BD_i F P^{-1} + BD_i^- H P^{-1}) < 0,$$

其中 $i \in I[1, 2^m]$. 令 $\gamma = 1/\alpha^2, Q = P^{-1}, Z = H P^{-1}$, 则优化问题 (9) 可等价于下列线性矩阵不等式

(Linear matrix inequality, LMI) 形式的优化问题^[12,25]:

$$\min_{Q>0, Z} \gamma. \quad (10)$$

$$\text{s.t. a) } \begin{bmatrix} \gamma & x_l^T \\ x_l & Q \end{bmatrix} \geq 0, l \in I[1, p];$$

$$\text{b) } \text{He}(AQ + BD_i F Q + BD_i^- Z) \leq 0, \\ i \in I[1, 2^m];$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 1 & z_j \\ z_j^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, j \in I[1, m].$$

其中 z_j 为矩阵 Z 的第 j 行. 类似地, 可以根据定理 1 和定理 3 构建与式 (10) 相似的线性矩阵不等式优化问题, 求解相应的最大收缩不变椭圆.

1.5 数值仿真

例1 考虑带有下列参数的饱和约束控制系统 (1):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0.4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1.4 & 3 \\ 0 & -0.7 \end{bmatrix}, \\ F = \begin{bmatrix} -0.4698 & -0.0770 \\ -0.8318 & 0.7640 \end{bmatrix}.$$

选取形状参考集 $X_R = \{x_1\}$, 其中 $x_1 = [0 \ 1]^T$. 分别求解以定理 1~定理 3 中椭圆收缩不变性条件为约束的优化问题, 得到

$$\alpha_{\text{opt}}^{\text{局部扇区}} = 7.7739,$$

$$P_{\text{opt}}^{\text{局部扇区}} = \begin{bmatrix} 0.0201 & -0.0038 \\ -0.0038 & 0.0165 \end{bmatrix};$$

$$\alpha_{\text{opt}}^{\text{传统凸包}} = 8.1039,$$

$$P_{\text{opt}}^{\text{传统凸包}} = \begin{bmatrix} 0.0184 & -0.0034 \\ -0.0034 & 0.0152 \end{bmatrix};$$

$$\alpha_{\text{opt}}^{\text{改进凸包}} = 8.8249,$$

$$P_{\text{opt}}^{\text{改进凸包}} = \begin{bmatrix} 0.0157 & -0.0026 \\ -0.0026 & 0.0128 \end{bmatrix}.$$

从 α_{opt} 的数值看, 利用改进型凸包表示法处理饱和和约束可获得最大的收缩不变椭圆, 传统型凸包表示法次之, 两者均优于局部扇区条件. 此外, 为了形象地比较上述 3 种结果, 在图 3 中展示了 3 个最优椭圆, 其中基于改进型凸包表示法的最优椭圆 (实线) 最大, 这表明较之传统型凸包表示法 (虚线) 和局部扇区条件 (点线), 改进型凸包表示法在处理饱和和约束方面具有最小的保守性.

另一方面, 通过仿真得到系统 (1) 真实吸引域的边界, 即图 3 中最外层的封闭曲线. 尽管改进型凸包表示法在 3 种处理饱和和约束方法中保守性最小, 但

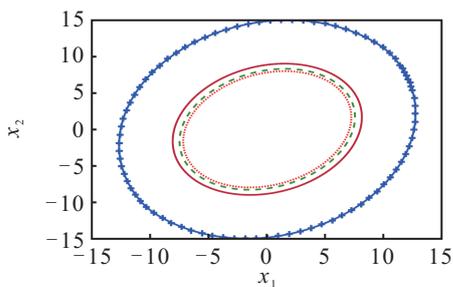


图3 最大收缩不变椭球

是基于它和二次Lyapunov函数得到的吸引域估计距离系统真实的吸引域还存在较大差距. 下一节将从Lyapunov函数选取角度讨论获得更大的吸引域估计.

2 Lyapunov函数的选取

2.1 二次Lyapunov函数

作为处理饱和约束的主要工具,局部扇区条件和凸包表示法可用于将二次Lyapunov函数沿系统轨迹的时间导数表达成一个负定的二次型函数,从而进一步得到使得二次Lyapunov函数的时间导数为负的线性矩阵不等式条件. 基于该条件,构建相应的优化问题,得到最优的收缩不变椭球,以作为饱和约束控制系统的吸引域估计.

很自然地会有这样一个问题:通过求解优化问题得到的最优收缩不变椭球是不是最大的? 首先给出最大收缩不变椭球的定义.

定义1 记 $\rho_c := \sup\{\rho : E(P, \rho) \text{ 收缩不变}\}$, 椭球 $E(P, \rho_c)$ 是最大收缩不变椭球.

根据上述定义,有以下两个事实: 1) 对于任一 $x \in E^\circ(P, \rho_c) \setminus \{0\}$, $\dot{V}(x) < 0$; 2) 存在某些 $x_0 \in \partial E(P, \rho_c)$ 使得 $\dot{V}(x_0) = 0$. 其中: $E^\circ(P, \rho_c) = \{x : x^T P x < \rho_c\}$, $\partial E(P, \rho_c) = \{x : x^T P x = \rho_c\}$.

对于单输入的饱和约束控制系统(1), $\text{sat}(Fx) \in \text{co}\{Fx, Hx\}$, $x \in L(H)$, 其中 H 是辅助反馈矩阵. 给定满足 $\text{He}(P(A + BF)) < 0$ 的正定矩阵 P , 根据定理2可知, 满足条件 $\text{He}(P(A + BH)) < 0$ 和 $E(P, \rho) \subseteq L(H)$ 的椭球 $E(P, \rho)$ 是收缩不变的. 为了求解一个尽可能大的收缩不变椭球, 建立如下优化问题:

$$\begin{aligned} & \max_{H \in \mathbf{R}^{1 \times n}} \rho. \\ & \text{s.t. a) } (A + BH)^T P + P(A + BH) \leq 0; \\ & \quad \text{b) } \rho H P^{-1} H^T \leq 1. \end{aligned} \tag{11}$$

记 ρ^* 是优化问题(11)的最优解. 由于文献[32-33]已经证明了式(11)中的两个约束条件也是椭球收缩不变性的必要条件, 有 $\rho^* = \rho_c$.

例2 考虑带有如下参数的单输入饱和约束控制系统(1):

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1.223 & 1 \\ -2.248 & 6 \end{bmatrix}^T.$$

令 $P = \begin{bmatrix} 2.4628 & -1.5372 \\ -1.5372 & 1.3307 \end{bmatrix}$. 求解优化问题(10), 可得 $\rho^* = 1.4686$. 为了验证最优椭球 $E(P, \rho^*)$ 是最大收缩不变椭球, 沿着椭球边界 $\partial E(P, \rho^*)$ 将二次Lyapunov函数 $V(x) = x^T P x$ 的时间导数绘于图4中, 图4中横坐标 θ 表示 $\partial E(P, \rho^*)$ 上 x 的角度.

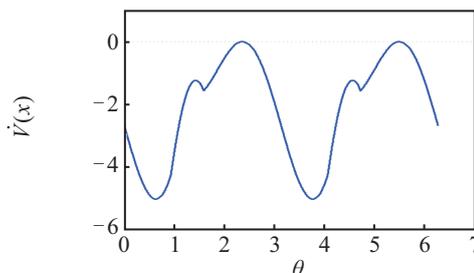


图4 沿着椭球边界 $\partial E(P, \rho^*)$ 的 $\dot{V}(x)$ (例2)

显然, $\dot{V}(x)$ 在 $\partial E(P, \rho^*)$ 上的最大值为0, 即存在 $x_0 \in \partial E(P, \rho^*)$ 使得 $\dot{V}(x_0) = 0$. 因此, 最优椭球 $E(P, \rho^*)$ 为最大收缩不变椭球, 即 $\rho^* = \rho_c$.

对于多输入系统而言, 确保椭球收缩不变性的充分条件不一定是必要的. 构建如下优化问题:

$$\begin{aligned} & \max_{H \in \mathbf{R}^{m \times n}} \rho. \\ & \text{s.t. a) } \text{He}(P(A + BD_i F + BD_i^- H)) \leq 0, \\ & \quad i \in I[1, 2^m]; \\ & \quad \text{b) } \rho h_j P^{-1} h_j^T \leq 1, j \in I[1, m]. \end{aligned} \tag{12}$$

记 ρ^* 为优化问题(12)的最优解.

例3 考虑如下系统参数:

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.8828 & -0.1455 \\ 0.2842 & -0.0896 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 2.6921 & -9.1511 \\ -0.9778 & -18.2487 \end{bmatrix}.$$

令 $P = \begin{bmatrix} 0.2773 & -0.3815 \\ -0.3815 & 7.8606 \end{bmatrix}$, 求解优化问题(12), 可得 $\rho^* = 0.0342$. 如图5中虚线所示, $\dot{V}(x)$ 在 $\partial E(P, \rho^*)$ 上的最大值小于0, 也即意味着 $\rho^* \neq \rho_c$.

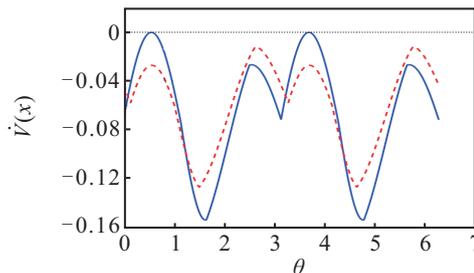


图5 沿椭球边界 $\partial E(P, \rho^*)$, $\partial E(P, 0.0448)$ 的 $\dot{V}(x)$ (例3)

考虑另一个两输入的系统.

例4

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1.2231 & -2.2486 \\ 0.5402 & 9.1254 \end{bmatrix}.$$

令 $P = \begin{bmatrix} 4.4628 & -3.0372 \\ -3.0372 & 3.3307 \end{bmatrix}$. 求解优化问题

(12), 可得 $\rho^* = 0.7258$. 与例3不同的是, $\dot{V}(x)$ 在 $\partial E(P, \rho^*)$ 上的最大值等于0, 如图6所示, 即 $\rho^* = \rho_c$.

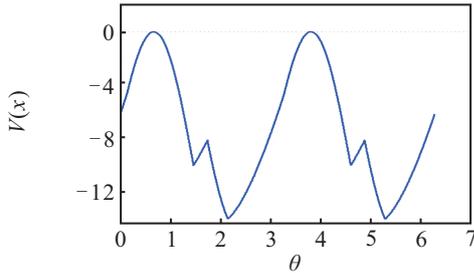


图6 沿着椭球边界 $\partial E(P, \rho^*)$ 的 $\dot{V}(x)$ (例4)

对于不同的多输入饱和约束控制系统(1), 通过求解优化问题(12), 有的可得到最大收缩不变椭球, 有的则不能. 这意味着只有当优化问题(12)的最优解满足某些附加条件时, 才能得到最大收缩不变椭球. 文献[34]提供了一组附加条件, 并证明了当这些附加条件满足时, 最优椭球 $E(P, \rho^*)$ 必然是最大收缩不变椭球, 即 $\rho^* = \rho_c$. 在例3和例4中, 例4中的最优解满足文献[34]提出的附加条件, 而例3未满足. 尽管文献[34]中判定最大收缩不变椭球的方法仍存在局限, 但应该指出的是, 该方法已经是目前利用线性矩阵不等式来求解最大收缩不变椭球最好的结果.

当优化问题(12)的最优解不能满足文献[34]给出的附加条件时, 针对如何求解最大收缩不变椭球, 文献[35-36]提出了一种基于代数计算的求解方法. 对于任意的多输入饱和约束控制系统(1), 均能得到其最大收缩不变椭球, 结果无保守性. 对于例3, 利用代数算法可得到 $\rho_c = 0.0448$. 图5验证了 $E(P, 0.0448)$ 是最大收缩不变椭球.

2.2 凸包Lyapunov函数

二次Lyapunov函数因其简易性被广泛地应用于饱和约束控制系统的稳定性分析及控制器设计. 然而, 在系统分析与综合过程中, 使用二次Lyapunov函数会存在很大的保守性. 如图5所示, 基于二次Lyapunov函数的吸引域估计与真实的吸引域之间存在较大的差距, 为了降低由二次Lyapunov函数带来的保守性, 学者们提出了多种非二次Lyapunov函

数, 其中凸包Lyapunov函数(Convex hull Lyapunov function)^[37] 由于具有良好的特性而备受关注. 给定一组正定矩阵 $Q_j \in \mathbf{R}^{n \times n}, j \in I[1, J]$. 令 $\Gamma = \left\{ \gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_J]^T \in \mathbf{R}^J : \gamma_j \geq 0, \sum_{j=1}^J \gamma_j = 1 \right\}$. 凸包Lyapunov函数定义为

$$V_c(x) := \min_{\gamma \in \Gamma} x^T \left(\sum_{j=1}^J \gamma_j Q_j \right)^{-1} x. \quad (13)$$

显然, $V_c(x)$ 是二次齐次的, 即 $V_c(\alpha x) = \alpha^2 V_c(x)$. 当 $J = 1$ 或 $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_J$ 时, $V_c(x)$ 将退化为二次Lyapunov函数 $V(x) = x^T Q_1^{-1} x$. 此外, $V_c(x)$ 是凸的且连续可微的. 定义 $V_c(x)$ 的一个水平集为 $L_{V_c}(1) = \{x \in \mathbf{R}^n : V_c(x) \leq 1\}$. 显然, 椭球 $E(Q_j^{-1}) \subset L_{V_c}(1)$, 且有

$$L_{V_c}(1) = \text{co}\{E(Q_j^{-1}) : j \in I[1, J]\} = \left\{ \sum_{j=1}^J \gamma_j x_j : x_j \in E(Q_j^{-1}), \gamma \in \Gamma \right\},$$

即由一组椭球 $E(Q_j^{-1})$ 组成的凸包构成了 $V_c(x)$ 的水平集 $L_{V_c}(1)$. 如果 $x \in \partial L_{V_c} \cap \partial E(Q_j^{-1})$, 则有

$$x^T Q_j^{-1} (Q_k - Q_j) Q_j^{-1} x \leq 0, k \in I[1, J].$$

这一特性在凸包Lyapunov函数用于吸引域估计过程中起到重要作用^[38]. 凸包Lyapunov函数的其他性质见文献[37,39-40].

如果采用传统型凸包表示法处理饱和约束, 则有如下定理4.

定理4^[38] 考虑饱和约束控制系统(1), 如果存在矩阵组 $H_j \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 和非负标量组 $\beta_{ijk}, i \in I[1, 2^m], j, k \in I[1, J]$, 满足

$$\text{He}((A + B(D_i F + D_i^- H_j)) Q_j) < \sum_{k=1}^J \beta_{ijk} (Q_k - Q_j), i \in I[1, 2^m], j \in I[1, J]; \quad (14)$$

$$h_{jl} Q_j h_{jl}^T \leq 1, l \in I[1, m], j \in I[1, J]. \quad (15)$$

其中 h_{jl} 为矩阵 H_j 的第 l 行. 则水平集 $L_{V_c}(1)$ 是收缩不变的.

注意到, 每一个 Q_j 对应着相互独立的辅助矩阵 H_j . 令 $J = 1$ 或者 $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_J$, 定理4将退化为定理2. 为了获得尽可能大的吸引域估计, 构建如下优化问题:

$$\max_{Q_j > 0, Z_j, \beta_{ijk} \geq 0, \mu_{pj} \geq 0} \alpha. \quad (16)$$

$$\text{s.t. a) } \begin{bmatrix} 1 & \alpha x_p^T \\ \alpha x_p & \sum_{j=1}^J \mu_{pj} Q_j \end{bmatrix} \geq 0, p \in I[1, N];$$

$$\begin{aligned}
 & \text{b) } \text{He}((A + BD_i F)Q_j + BD_i^- Z_j) < \\
 & \quad \sum_{k=1}^J \beta_{ijk}(Q_k - Q_j), \quad i \in I[1, 2^m]; \\
 & \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & z_{jl} \\ z_{jl}^T & Q_j \end{bmatrix} \geq 0, \quad l \in I[1, m], \quad j \in I[1, J]; \\
 & \text{d) } \sum_{j=1}^J \mu_{pj} = 1, \quad p \in I[1, N].
 \end{aligned}$$

其中: a) 等价于集包含条件 $\alpha X_R \in L_{V_c}(1)$, $X_R = \text{co}\{x_p : p \in I[1, N]\}$, z_{jl} 为矩阵 $Z_j = H_j Q_j$ 的第 l 行.

与优化问题 (10) 不同, 优化问题 (16) 是基于双线性矩阵不等式 (Bilinear matrix inequality, BMI) 的, 因为其约束条件 a) 和 b) 中含有未知正定矩阵和未知标量的乘积项, 优化问题 (16) 不是一个凸优化问题. 一般来讲, BMI 优化问题的全局最优解很难得到. 一个退而求其次的方法是通过构建一个迭代的 LMI 算法求解 BMI 问题. 对应优化问题 (16), 文献 [38] 提供了一种基于 path-following^[41] 的迭代算法. 该迭代算法以优化问题 (10) 的最优解为初始值. 尽管这样的初始值选择会影响到迭代算法的最终解, 但可以保证迭代算法的最终解不会比初始值差.

如果选择改进型凸包表示法处理饱和和约束, 则有如下定理 5, 包含了更多的辅助矩阵.

定理 5^[36] 考虑饱和约束控制系统 (1), 如果存在矩阵组 $H_{ij} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 和非负标量组 $\beta_{ijk}, i \in I[1, 2^m], j, k \in I[1, J]$, 满足

$$\begin{aligned}
 & \text{He}((A + B(D_i F + D_i^- H_{ij}))Q_j) < \\
 & \quad \sum_{k=1}^J \beta_{ijk}(Q_k - Q_j), \quad i \in I[1, 2^m], \quad j \in I[1, J]; \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$h_{ijl} Q_j h_{ijl}^T \leq 1, \quad l \in I[1, m], \quad j \in I[1, J]. \quad (18)$$

其中 h_{ijl} 为矩阵 H_{ij} 的第 l 行. 则水平集 $L_{V_c}(1)$ 是收缩不变的.

为了验证凸包 Lyapunov 函数在吸引域估计方面的优越性, 仍以例 1 中的系统为例. 选取形状参考向量 $x_1 = [0 \quad 1]^T$ 且令 $J = 2$, 求解相应的优化问题, 可得到如下结果:

$$\begin{aligned}
 & \alpha^{\text{凸包Lyapunov+传统凸包}} = 9.9277, \\
 & Q_1^{\text{凸包Lyapunov+传统凸包}} = \begin{bmatrix} 80.1160 & 15.3911 \\ 15.3911 & 101.6478 \end{bmatrix}, \\
 & Q_2^{\text{凸包Lyapunov+传统凸包}} = \begin{bmatrix} 78.2320 & 20.1708 \\ 20.1708 & 98.8530 \end{bmatrix}; \\
 & \alpha^{\text{凸包Lyapunov+改进凸包}} = 10.5416,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_1^{\text{凸包Lyapunov+改进凸包}} &= \begin{bmatrix} 89.2195 & 15.5048 \\ 15.5048 & 113.9083 \end{bmatrix}, \\
 Q_2^{\text{凸包Lyapunov+改进凸包}} &= \begin{bmatrix} 87.4854 & 22.0836 \\ 22.0836 & 110.0265 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

从 α 数值结果看, 定理 5 可获得最大的吸引域估计, 因为其引入了最多的辅助矩阵. 另一方面, 凸包 Lyapunov 函数得到的 α 均比二次 Lyapunov 函数得到的大, 这表明在吸引域估计方面凸包 Lyapunov 函数比二次 Lyapunov 函数具有更小的保守性.

将上面得到的凸包 Lyapunov 函数水平集绘于图 7 中 (由内而外依次为基于二次 Lyapunov 函数的定理 1、定理 2、定理 3 和基于凸包 Lyapunov 函数的定理 4、定理 5). 图中点划线闭合区域为利用凸包 Lyapunov 函数和传统凸包表示法得到的吸引域估计, 外层虚线闭合区域则是使用凸包 Lyapunov 函数和改进型凸包表示法得到的吸引域估计, 内部的 3 个吸引域估计是第 1 节中采用二次 Lyapunov 函数得到的. 显然, 基于凸包 Lyapunov 函数的吸引域估计明显比利用二次 Lyapunov 函数得到的大, 更接近真实的吸引域.

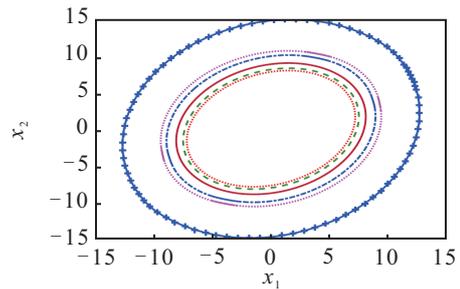


图 7 基于不同方法的吸引域估计 (1)

注 3 另外一种由多个子二次函数组成且广泛使用的复合型 Lyapunov 函数是最大 Lyapunov 函数 (Max quadratic Lyapunov function)^[38], 定义为

$$V_{\max}(x) = \max\{x^T P_j x : j \in I[1, J]\},$$

其中 P_j 为正定矩阵. 水平集 $\{x : V_{\max}(x) \leq 1\}$ 为 J 个椭圆 $E(P_j)$ 的交集, 文献 [39] 已经证明了 $V_c(x)$ 与 $V_{\max}(x)$ 之间的共轭性, 使用最大 Lyapunov 函数估计饱和和约束控制系统吸引域的相关结果见文献 [38].

2.3 分段二次 Lyapunov 函数

凸包 Lyapunov 函数和最大 Lyapunov 函数等复合型 Lyapunov 函数是由若干个子二次函数通过不同方式组合得到的, 从“一”到“多”实现了对二次 Lyapunov 函数的拓展, 从而获得了更大的吸引域估计.

另外一种对二次 Lyapunov 函数的扩展则引入了饱和和约束的信息. 例如, 文献 [18] 提出了一种依赖饱和的 Lyapunov 函数 (Saturation-dependent Lyapunov

function), 通过饱和系数将若干个子二次函数组合而成; 文献 [42-43] 将饱和 (死区) 函数的积分项加到二次 Lyapunov 函数中, 构成了 Lure-Postnikov 型 Lyapunov 函数, 即

$$V_L(x) = x^T P x + \sum_{j=1}^m \int_0^{u_j} dz(\sigma) w_j d\sigma.$$

其中: $dz(u) = u - \text{sat}(u)$ 表示死区函数, $w_j > 0$. 考虑到死区函数的特有性质, $V_L(x)$ 可等价地写成

$$V_L(x) = \begin{bmatrix} x \\ dz(u) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ dz(u) \end{bmatrix},$$

其中 $W = \text{diag}\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$. 其随后又被扩展成具有更多自由变量的分段二次 Lyapunov 函数 (Piecewise quadratic Lyapunov function)^[19], 即

$$V_P(x) = \begin{bmatrix} x \\ dz(u) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ dz(u) \end{bmatrix},$$

其中矩阵 $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} =: P \in \mathbf{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ 为正定矩阵. 通过将饱和 (死区) 函数的特殊性质 (如死区函数的类扇区条件^[19]、饱和函数局部的时间导数为 0^[27] 等) 融入到 $V_P(x)$ 的方向导数中, 可以得到保守性更小的局部稳定性条件, 继而获得更大的吸引域估计.

然而, 分段二次 Lyapunov 函数仍然存在保守性. 由于 $dz(u)$ 是系统状态的函数, 对于所有的系统状态 $x \in \mathbf{R}^n$, 增广向量 $\xi := [x^T \ dz^T(u)]^T \in \mathbf{R}^{n+m}$ 必然遍历不了整个 \mathbf{R}^{n+m} 空间. 因此, 用矩阵 P 的正定性保证 $V_P(x)$ 在局部非零区域上为正, 是存在保守性的. 为了降低这样的保守性, 可利用死区函数的局部扇区条件

$$dz^T(u) S_0 (u - dz(u) - H_0 \xi) \geq 0, \quad u = Fx,$$

构造扩展型分段二次 Lyapunov 函数^[44-45], 即

$$V_G(x) = V_P(x) + 2dz^T(u) S(u - dz(u) - H_0 \xi) = \xi^T \begin{bmatrix} P_1 & * \\ \Xi & P_3 - \text{He}(S_0(I_m + H_{02})) \end{bmatrix} \xi := \xi^T G \xi.$$

其中: S_0 为任意对角正定矩阵, $\|H_0 \xi\| \leq 1, H_0 \in \mathbf{R}^{m \times (n+m)}$; $\Xi = P_2^T + S_0(F - H_{01}), H_{01} \in \mathbf{R}^{m \times n}, H_{02} \in \mathbf{R}^{m \times m}, [H_{01} \ H_{02}] = H_0$.

与 $V_P(x)$ 不同的是, $V_G(x)$ 在 G 非正定的情况下也能在局部非零区域内保持正定性. 对于所有满足 $\|H_0 \xi\| \leq 1$ 的非零 x, P 的正定性和局部扇区条件可确保 $V_G(x) > 0$, 但矩阵 G 不必满足正定性; 当 $H_0 = 0$ 时, 有

$$G = \begin{bmatrix} P_1 & * \\ P_2^T + S_0 F & P_3 - 2S_0 \end{bmatrix}.$$

显然, 当 S_0 的元素都充分大时, G 将不满足正定性.

定义 $V_G(x)$ 的水平集

$$E_G(P, S_0, H_0) = \{x \in \mathbf{R}^n : V_G(x) \leq 1, \|H_0 \xi\|_\infty \leq 1\}.$$

水平集 $E_G(P, S_0, H_0)$ 的收缩不变性条件在下面定理 6 中给出.

定理 6^[45] 考虑饱和约束控制系统 (1), 给定正定矩阵 $P \in \mathbf{R}^{(n+m) \times (n+m)}$, 如果存在对角矩阵组 $S_j, j \in I[0, 3] (S_0 > 0, S_1 > 0)$ 和矩阵组 $H_{01}, H_{11} \in \mathbf{R}^{m \times n}, H_{02}, H_{12} \in \mathbf{R}^{m \times m}$, 满足

$$\text{He} \left(\sum_{j=0}^3 \Xi_j + \Psi_0 + \Psi_1 \right) < 0, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & h_{jk} \\ * & P \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 0, 1, k \in I[1, m], \quad (20)$$

则水平集 $E_G(P, S_0, H_0)$ 是系统 (1) 的一个收缩不变集. 其中: h_{jk} 为矩阵 $H_j = [H_{j1} \ H_{j2}] (j = 0, 1)$ 的第 k 行, 且有

$$\begin{cases} \Psi_0 = [0 \ I_m \ 0]^T S_0 [F - H_{01} \ -I_m - H_{02}] \times \\ \quad \begin{bmatrix} A + BF & -B & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}, \\ \Psi_1 = [0 \ I_m]^T S_0 [F - H_{01} \ -I_m - H_{02} \ 0], \\ \Xi_0 = [I_{n+m} \ 0]^T P \begin{bmatrix} A + BF & -B & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}, \\ \Xi_1 = [0 \ I_m \ 0]^T S_1 [F - H_{11} \ -I_m - H_{12} \ 0], \\ \Xi_2 = [0 \ I_m]^T S_2 [F(A + BF) \ -FB \ -I_m], \\ \Xi_3 = [0 \ I_m \ 0]^T S_3 [F(A + BF) \ -FB \ -I_m]. \end{cases} \quad (21)$$

令 $S_0 = 0_m, V_G(x)$ 将退化为 $V_P(x)$. 相应地, $H_0 = 0, \Psi_0 = 0$ 和 $\Psi_1 = 0$, 此时定理 6 中的条件 (19) 和 (20) 可确保 $V_P(x)$ 水平集 $\{x \in \mathbf{R}^n : V_P(x) \leq 1\}$ 的收缩不变性.

根据定理 6 中水平集 $E_G(P, S_0, H_0)$ 的收缩不变性条件, 为获得尽可能大的水平集作为吸引域估计, 构建如下优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{P > 0, H_0, H_1, S_0, S_2, S_3 > 0, S_4, S_5} \gamma &= \text{tr}(G); \quad (22) \\ \text{s.t. a) 不等式 (19),} \\ \text{b) 不等式 (20).} \end{aligned}$$

上述优化问题是 BMI 问题, 可参考文献 [19] 的方法, 建立基于直接迭代策略的求解算法, 得到优化问题

(22)的一个次优解.

下面仍然以例1中的饱和约束控制系统为例. 求解优化问题(22), 可得到

$$G = \begin{bmatrix} 0.0084 & -0.0011 & -0.0012 & -0.0063 \\ -0.0011 & 0.0089 & -0.0004 & 0.0045 \\ -0.0012 & -0.0004 & 0.0001 & 0.0001 \\ -0.0063 & 0.0045 & 0.0001 & -0.0133 \end{bmatrix},$$

特征值集合为 $\{-0.0157, -0.0001, 0.0077, 0.0121\}$. 显然, G 是非正定的. 将相应的水平集 $E_G(P, S_0, H_0)$ 绘于图8中, 如外层实线所示(由内而外依次为基于二次Lyapunov函数的定理1、定理2、定理3和基于分段二次Lyapunov函数、扩展型分段二次Lyapunov函数方法). 外层短划线所示的区域是由分段二次Lyapunov函数得到的吸引域估计, 最内侧3个区域是二次Lyapunov函数的结果. 很明显, 基于扩展型分段二次Lyapunov函数的吸引域估计最大.

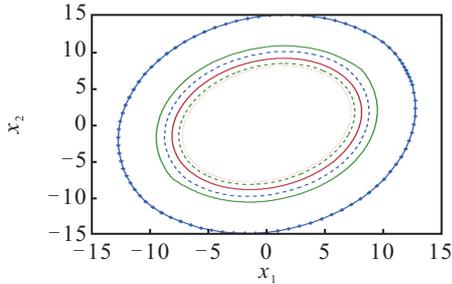


图8 基于不同方法的吸引域估计(2)

注4 利用扩展型分段二次Lyapunov函数和凸包Lyapunov函数得到的吸引域估计均明显大于二次Lyapunov函数方法. 在例1中, 前者得到的吸引域估计略大于后者. 尽管没有理论结果表明扩展型分段二次Lyapunov函数一定优于凸包Lyapunov函数, 但前者对应的优化问题的计算量明显小于后者, 即在每次迭代中, 前者需要求解 $2m + 1$ 个线性矩阵不等式, 后者需要求解 $J(2^m + \sum_{j=1}^J jC_m^j)$ 个线性矩阵不等式.

3 结论

本文介绍了饱和约束的多种处理方法和不同的Lyapunov函数, 总结了它们在饱和约束控制系统吸引域估计中的应用. 这些处理方法和Lyapunov函数也成功地用于饱和约束控制系统的鲁棒稳定性分析、抗积分器溢满补偿器设计等. 此外, 本文介绍的方法已在磁悬浮轴承^[46]、超高速航行器^[47]等吸引域估计中得到应用.

参考文献(References)

[1] Schmitendorf W, Barmish B. Null controllability of linear systems with constrained controls[J]. SIAM J on Control

and Optimization, 1980, 18(4): 327-345.

[2] Sontag E D. An algebraic approach to bounded controllability of linear systems[J]. Int J of Control, 1984, 39(1): 181-188.

[3] Sussmann H J, Yang Y. On the stabilizability of multiple integrators by means of bounded feedback controls[C]. Proc of the 30th IEEE Conf on Decision and Control. Brighton: IEEE, 1991: 70-72.

[4] Teel A R. Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls[J]. Systems & Control Letters, 1992, 18(3): 165-171.

[5] Sussmann H J, Sontag E D, Yang Y. A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1994, 39(12): 2411-2425.

[6] Lin Z. Low gain feedback[M]. London: Springer, 1999: 7-42.

[7] Lin Z, Saberi A. Semi-global exponential stabilization of linear systems subject to "input saturation" via linear feedbacks[J]. Systems & Control Letters, 1993, 21(3): 225-239.

[8] Lin Z, Stoorvogel A A, Saberi A. Output regulation for linear systems subject to input saturation[C]. Proc of the 33rd IEEE Conf on Decision and Control. Lake Buena Vista: IEEE, 1994: 2362-2367.

[9] Teel A R. Semi-global stabilizability of linear null controllable systems with input nonlinearities[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1995, 40(1): 96-100.

[10] Zhou B, Duan G, Lin Z. A parametric Lyapunov equation approach to the design of low gain feedback[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(6): 1548-1554.

[11] Hu T, Lin Z. On semi-global stabilizability of antistable systems by saturated linear feedback[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(7): 1193-1198.

[12] Hu T, Lin Z. Control systems with actuator saturation: Analysis and design[M]. Boston: Birkhauser, 2001: 55-67.

[13] Hu T, Lin Z, Qiu L. An explicit description of null controllable regions of linear systems with saturating actuators[J]. Systems & Control Letters, 2002, 47(1): 65-78.

[14] Alvarez J, Suarez R. Planar linear systems with single saturated feedback[J]. Systems & Control Letters, 1993, 20(4): 319-326.

[15] Alamo T, Cepeda A, Limon D, et al. A new concept of invariance for saturated systems[J]. Automatica, 2006, 42(9): 1515-1521.

[16] Bateman A, Lin Z. An analysis and design method for discrete-time linear systems under nested saturation[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(8): 1305-1310.

[17] Blanchini F. Set invariance in control[J]. Automatica, 1999, 35(11): 1747-1767.

[18] Cao Y, Lin Z. Stability analysis of discrete-time systems with actuator saturation by a saturation-dependent

- Lyapunov function[J]. *Automatica*, 2003, 39(10): 1235-1241.
- [19] Dai D, Hu T, Teel A R, et al. Piecewise quadratic Lyapunov functions for systems with deadzones or saturations[J]. *Systems & Control Letters*, 2009, 58(5): 365-371.
- [20] Fiacchini M, Tarbouriech S, Prieur C. Quadratic stability for hybrid systems with nested saturations[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2012, 57(7): 1832-1838.
- [21] Alamo T, Cepeda A, Limon D. Improved computation of ellipsoidal invariant sets for saturated control systems[C]. Proc of the 44th IEEE Conf on Decision and Control and the 2005 European Control Conf. Seville: IEEE, 2005: 6216-6221.
- [22] Gomes da Silva Jr J, Tarbouriech S. Antiwindup design with guaranteed regions of stability: An LMI-based approach[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(1): 106-111.
- [23] Tarbouriech S, Garcia G, Gomes da Silva Jr J M, et al. Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators[M]. London: Springer, 2011: 52-71.
- [24] Hu T, Lin Z, Chen B. Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation[J]. *Systems & Control Letters*, 2002, 45(2): 97-112.
- [25] Hu T, Lin Z, Chen B. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbances[J]. *Automatica*, 2002, 38(2): 351-359.
- [26] Li Y, Lin Z. Improvements to the linear differential inclusion approach to Stability analysis of linear systems with saturated linear feedback[J]. *Automatica*, 2013, 49(3): 821-828.
- [27] Li Y, Lin Z. Stability and performance of saturated systems via partitioning of the virtual input space[J]. *Automatica*, 2015, 53: 85-93.
- [28] Li Y, Lin Z. Saturation-based switching anti-windup design for linear systems with nested input saturation[J]. *Automatica*, 2014, 50(11): 2888-2896.
- [29] Tarbouriech S, Prieur C, Jr Gomes da Silva J M. Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2006, 51(8): 1364-1371.
- [30] Zhou B, Zheng W, Duan G. An improved treatment of saturation nonlinearity with its application to control of systems subject to nested saturation[J]. *Automatica*, 2011, 47(2): 306-315.
- [31] Hu T, Lin Z. Absolute stability with a generalized sector condition[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(4): 535-548.
- [32] Hu T, Lin Z. Exact characterization of invariant ellipsoids for linear systems with saturating actuators[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(1): 164-169.
- [33] Hu T, Lin T, Shamash Y. On maximizing the convergence rate for linear systems with input saturation[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(7): 1249-1253.
- [34] Hu T, Lin Z. On the tightness of a recent set invariance condition under actuator saturation[J]. *Systems & Control Letters*, 2003, 49(5): 389-399.
- [35] Li Y, Lin Z. A complete characterization of the maximal contractively invariant ellipsoids of linear systems under saturated linear feedback[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2015, 60(1): 179-185.
- [36] Li Y, Lin Z. The maximal contractively invariant ellipsoids for discrete-time linear systems under saturated linear feedback[J]. *Automatica*, 2017, 76: 336-344.
- [37] Hu T, Lin Z. Composite quadratic Lyapunov functions for constrained control systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(3): 440-452.
- [38] Hu T, Teel A R, Zaccarian L. Stability and performance for saturated systems via quadratic and nonquadratic Lyapunov functions[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2006, 51(11): 1770-1785.
- [39] Goebel R, Teel A R, Hu T, et al. Conjugate convex Lyapunov functions for dual linear differential inclusions[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2006, 51(4): 661-666.
- [40] Hu T, Lin Z. Properties of the composite quadratic Lyapunov functions[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(7): 1162-1167.
- [41] Hindi H, Boyd S. Analysis of linear systems with saturating using convex optimization[C]. Proc of the 37th IEEE Conf on Decision and Control. Tampa: IEEE, 1998: 903-908.
- [42] Jr Gomes da Silva J M, Tarbouriech S, Reginatto R. Analysis of regions of stability for linear systems with saturating inputs through an anti-windup scheme[C]. Proc of the 2002 Int Conf on Control Applications. Glasgow: IEEE, 2002: 1106-1111.
- [43] Kapila V, Sparks A G, Pan H. Control of systems with actuator saturation nonlinearities: An LMI approach[J]. *Int J of Control*, 2001, 74(6): 586-599.
- [44] Li Y, Lin Z. On the generalized piecewise lyapunov function approach to estimating the domain of attraction of a saturated system[C]. Proc of the 1st IFAC Conf on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems. Saint Petersburg: IFAC, 2015: 120-125.
- [45] Li Y, Lin Z. Stability and performance of control systems with actuator saturation[M]. Boston: Birkhauser, 2018: 289-293.
- [46] Hu T, Lin Z, Jiang W, et al. Constrained control design for magnetic bearing systems[J]. *J Dynamic System Measurement and Control*, 2005, 127(4): 601-616.
- [47] Qiang B, Le Z. Switching anti-windup design on enlarging the domain of attraction for a supercavitating vehicle subject to actuator saturation[J]. *J Dynamic System Measurement and Control*, 2017, 139(9): 1-12.

(责任编辑: 郑晓蕾)