

滤波器组框架理论及其在图信号处理中的应用

柴利[†], 易静文, 盛玉霞

(武汉科技大学冶金自动化与检测技术教育部工程研究中心, 武汉 430081)

摘要: 滤波器组框架理论是应用数学、信号处理、图像处理和数字通信等领域的重要问题之一,对滤波器组框架的分析和设计问题进行研究有着重要的科学意义和应用前景.近年来,随着高维非规则化数据信息大量涌现,很多学者开始研究图信号处理的滤波器组方法.因此对滤波器组框架理论及其在图信号处理中的应用进行了综述研究.首先对传统滤波器组框架理论的基础知识进行概述,总结滤波器组框架分析与设计方法;然后重点介绍两类图信号处理架构以及图滤波器组的最新研究成果;最后对未来的研究进行展望.

关键词: 滤波器组; 框架理论; 多采样率; 图信号; 图滤波器; 优化设计

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Filter bank frames: Theory and application in graph signal processing

CHAI Li[†], YI Jing-wen, SHENG Yu-xia

(Engineering Research Center of Metallurgical Automation and Measurement Technology, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China)

Abstract: Filter bank frame is one of the most important topics in applied mathematics, signal processing, image processing and digital communication. The analysis and design of filter bank frames have great scientific significance and practical merits. In recent years, with the emergence of high-dimensional data in irregular domains, many scholars began studying the filter bank methods in graph signals processing. In this paper, we review the filter bank theory and its applications in graph signal processing. After a brief introduction on the background knowledge of filter banks and frames, we summarize various methods in the analysis and design of filter bank frames. Then we present in detail two frameworks of graph signal processing and the state-of-the-art research on graph filter banks. Finally, some interesting problems of the future research are discussed.

Keywords: filter bank; frame theory; multirate; graph signal; graph filter; optimal design

0 引言

框架(Frame)理论和滤波器组(Filter bank)是描述和处理信息冗余性的数学方法.除了数学上的研究意义外,它还是量子计算、信息处理、网络传输和通信系统等领域的重要工具之一,已被广泛地应用于很多工程领域,如量子测量与量子计算、核磁共振成像技术、生物系统和蛋白质分类、编码理论、量化器优化设计、鲁棒信息传输、OFDM通信系统、图像与视频处理、传感器网络中的信息处理等等^[1-3]. Kovacevic等^[1]从信号处理的角度详细介绍了有关框架理论的基本知识和许多典型的应用领域.近几年,滤波器组又在深度卷积神经网络中得到应用^[4-5].

传统滤波器组框架理论通常用来处理低维规则

结构数据,如时间信号、空间信号和时空信号等.随着现代科技高速发展,高维非规则化数据信息大量涌现,如社交网络、能源网络、交通运输网络、神经网络等.如何对高维图结构数据进行处理成为一个备受关注且亟待解决的问题.借助代数图论和谱图理论,图信号处理成为近年来兴起的研究方向,用来处理高维加权图上的信号^[6-7].众多学者从各自角度出发,将传统滤波器组框架理论推广到图滤波器组框架中,取得了一系列成果,详见文献[8-10].

本文首先对传统滤波器组框架理论知识进行概述,并分别对滤波器组框架界计算与优化方法和综合滤波器组优化设计方法进行总结;然后,对谱图基础知识和两类图信号处理架构进行介绍,并探讨滤

收稿日期: 2017-10-31; 修回日期: 2017-12-16.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61625305, 61501337, 61701355).

作者简介: 柴利(1972—),男,教授,博士生导师,从事滤波器组框架理论、多采样率信号处理、网络控制理论及应用等研究; 易静文(1988—),女,讲师,博士,从事复杂多智能体网络分析与控制、图信号处理的研究.

[†]通讯作者. E-mail: chaili@wust.edu.cn

波器组框架在图信号处理中的应用进展; 最后, 对本文进行总结, 并给出进一步的研究方向.

1 滤波器组框架理论

在各种框架中, 实际应用最广泛的是由滤波器组实现的框架. 有限维框架、离散小波框架和离散 Gabor 框架都属于滤波器组框架. 本节介绍滤波器组基础知识、滤波器组框架理论及应用.

1.1 滤波器组基础

滤波器组是一组有着共同输入或共同输出的带通滤波器. 典型滤波器组的结构如图 1 所示^[11-12]. 其中左边部分为分析滤波器组, 右边部分为综合滤波器组. 分析滤波器组有一个输入多个输出, 其将输入信号分解成不同的子带信号, 每个分析滤波器 $H_i(z)$ 有不同的频率特性, 输入信号 $x(n)$ 通过 M 个分析滤波器 $H_i(z)$ 后, 得到 M 个不同的子带信号. 信号在子带分解后, 对每个通道 M_i 下采样 (Downsampling), 可降低信号的采样率. 下采样后的子带信号可以被编码、处理或者传输. 综合滤波器组具有多个输入一个输出, 其将处理后的子带信号通过带通滤波后再组合起来, 重构原始信号. 为保证重构信号 $\hat{x}(n)$ 与原信号 $x(n)$ 具有相同的采样频率, 在综合滤波器组前对各子带信号 M_i 上采样 (Upsampling). 也有论文将下采样称为抽取 (Decimation), 将上采样称为内插 (Interpolation), 两者实际并无区别, 本文统一称为下采样、上采样.

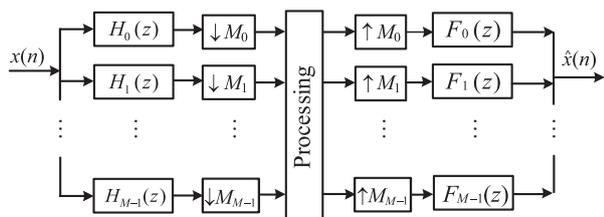


图 1 M 通道滤波器组

将每个通道的下采样因子 M_i 相同的滤波器组称为均匀滤波器组; 将下采样因子不同的滤波器组称为非均匀滤波器组. 将下采样因子和通道数相同的滤波器组称为临界采样滤波器组; 将下采样因子小于通道数的滤波器组称为过采样滤波器组. 如果滤波器组由理想滤波器构成, 没有混叠产生, 则可以完全重构 (Perfect reconstruction) 原始信号. 由于理想滤波器是不可实现的, 为了消除混叠, 需要选择合适的 $H_i(z)$ 和 $F_i(z)$, 使得 $\hat{x}(n) = x(n - m)$, 这样的滤波器组称为完全重构滤波器组.

多采样率信号处理的核心是信号采样率的转换和滤波器组. 信号的上/下采样是多采样率信号处理

的基本操作. 多相 (Polyphase) 结构是滤波器组的一种基本表示方法. 下面将分别介绍这些内容.

1.1.1 上/下采样

在处理信号时, 将信号 $x(n)$ 每隔 $M - 1$ 个点抽取 1 个点, 得到新序列 $y(n)$, 可以降低信号的采样率, 这个过程称之为 M 下采样. 下采样过程如图 2(a) 所示^[11,13]. 序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 在时域的关系为

$$y(n) = x(Mn). \tag{1}$$

下采样前后序列的 z 变换满足

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M} W^k), \tag{2}$$

其中 $W = e^{-j2\pi/M}$, 频域关系为

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\omega - 2\pi k)/M}). \tag{3}$$

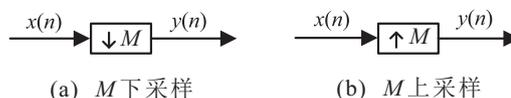


图 2 信号的上/下采样

将信号 $x(n)$ 作 M 倍下采样, 下采样后信号的频谱是原信号频谱的 M 倍扩展, 幅度变为原来的 $1/M$, 再分别以 $2\pi k (k = 1, 2, \dots, M - 1)$ 平移后叠加得到, 如图 3 所示^[11, 13]. 由输入输出的频谱变化可以看出, 经下采样后的频谱是多个拉伸了的原信号频谱经过平移叠加的结果, 容易产生混叠效应. 故在实际处理中, 通常需要在下采样前引入抗混叠滤波处理.

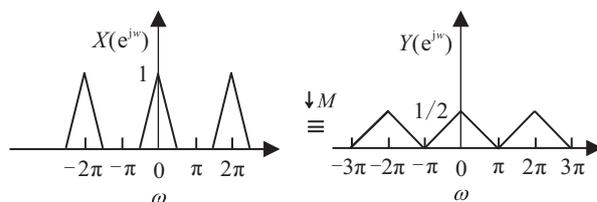


图 3 信号下采样后频谱的变化 ($M = 2$)

二维情况下, 下采样因子 M 为非奇异整数矩阵, 其矩阵系数决定了采样网格的方向和密度, $LAT(M)$ 表示向量 Mn 的集合. 空间域上, 通过对 $LAT(M)$ 网格进行筛选, 舍去不在网格上的数据点, 实现下采样操作^[11, 13]. 二维信号在空间域上的输入输出关系为

$$y(n) = x(Mn). \tag{4}$$

在频域上的输入输出关系为

$$Y(\omega) = \frac{1}{J(M)} \sum_{k \in N(M^T)} X(M^{-T}(\omega - 2\pi k)), \tag{5}$$

其中: $J(M) = |\det M|$, $N(M^T)$ 表示 $M^T x (x \in [0, 1)^2)$ 中的整数向量集合, M 为 2×2 整数矩阵^[11].

上采样过程和下采样过程相反, 上采样是在信

号 $x(n)$ 的相邻两点之间插入 $M - 1$ 个 0, 得到新序列 $y(n)$, 信号的采样率增加了 M 倍. 上采样过程如图 2(b) 所示^[11,13]. 序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 在时域的关系为

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{M}\right), & n = kM (k \text{ 为整数}); \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (6)$$

上采样前后序列的 z 变换满足

$$Y(z) = X(z^M), \quad (7)$$

频域关系为

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{jM\omega}). \quad (8)$$

上采样后信号的频谱是对原信号频谱的 M 倍压缩, 频谱周期由 2π 变为 $2\pi/M$, 如图 4 所示^[11,13].

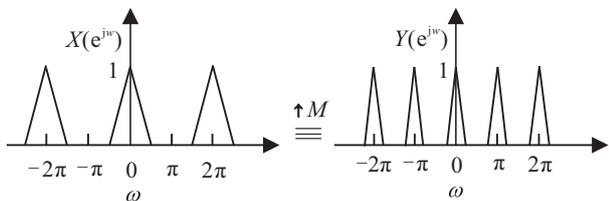


图 4 信号上采样后频谱的变化 ($M = 2$)

二维情况下, 在空间域的上采样操作指的是输入信号落在 $LAT(M)$ 上的点重新排列, 而对不在 $LAT(M)$ 上的点置 0. 与一维情况类似, 输出信号相对于原信号, 在频域上也将产生多个镜像^[11,13]. 在实际操作中, 通常在上采样操作后引入镜像滤波处理.

二维信号在空间域上的输入输出关系为

$$y(n) = \begin{cases} x(M^{-1}n), & n \in LAT(M); \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (9)$$

在频域上的输入输出关系为

$$Y(\omega) = X(M^T\omega). \quad (10)$$

上/下采样和传递函数级联后有如图 5 和图 6 所示的等效关系^[11,13].

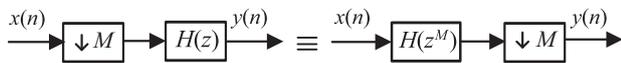


图 5 传递函数与下采样级联的等效变换关系

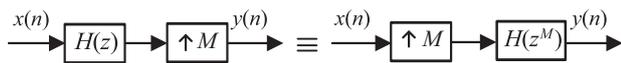


图 6 传递函数与上采样级联的等效变换关系

1.1.2 多相结构表示

多相结构是滤波器组的一种基本表示方法, 可以极大地简化滤波器组的设计. Vaidyanathan^[11] 将多相分解方法引入滤波器组中, 为滤波器组的实现提供了一种高效结构. 设第 i 个分析滤波器为 $H_i(z) =$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_i[n]z^{-n}$, 可将分析滤波器系数分成如下所示的 M 个组:

$$H_i(z) = \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} E_{i,k}(z^M), \quad (11)$$

其中第 k 个多相成分为

$$E_{i,k}(z^M) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_i[nM + k](z^M)^{-n}. \quad (12)$$

式(11)和(12)为类型 I 多相表示.

分析滤波器组可以表示成如下形式^[11,13]:

$$[H_0(z) \ H_1(z) \ \cdots \ H_{M-1}(z)]^T = E(z^M)[1 \ z^{-1} \ \cdots \ z^{-(M-1)}]^T, \quad (13)$$

其中

$$E(z^M) = \begin{bmatrix} E_{0,0}(z^M) & \cdots & E_{0,M-1}(z^M) \\ E_{1,0}(z^M) & \cdots & E_{1,M-1}(z^M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{M-1,0}(z^M) & \cdots & E_{M-1,M-1}(z^M) \end{bmatrix},$$

称其为分析滤波器组的多相矩阵.

设第 i 个综合滤波器 $F_i(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_i[n]z^{-n}$ 的系数可分成如下的 M 个组^[11,13]:

$$F_i(z) = \sum_{k=0}^{M-1} z^{-(M-1-k)} R_{i,k}(z^M), \quad (14)$$

其中第 k 个多相成分为

$$R_{i,k}(z^M) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_i[nM + M - 1 - k](z^M)^{-n}. \quad (15)$$

式(14)和(15)为类型 II 多相表示.

综合滤波器组可以表示成如下形式^[11,13]:

$$[F_0(z) \ F_1(z) \ \cdots \ F_{M-1}(z)] = [z^{-(M-1)} \ z^{-(M-2)} \ \cdots \ 1]R(z^M), \quad (16)$$

其中

$$R(z^M) = \begin{bmatrix} R_{0,0}(z^M) & \cdots & R_{M-1,0}(z^M) \\ R_{0,1}(z^M) & \cdots & R_{M-1,1}(z^M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{0,M-1}(z^M) & \cdots & R_{M-1,M-1}(z^M) \end{bmatrix},$$

称其为综合滤波器组的多相矩阵.

滤波器组的多相结构如图 7 所示. 应用等效变换关系, 可以得到如图 8 所示的更简洁的滤波器组等效多相结构^[11,13]. 图 8 中卷积运算是在下采样后上采样前进行的, 数据在低采样率时运算, 所以多相结构表示的滤波器组具有更好的计算效率.

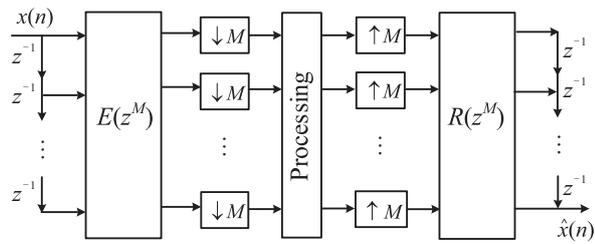


图7 滤波器组的多相结构表示

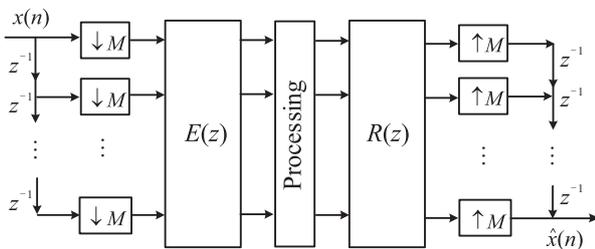


图8 滤波器组的等效多相结构表示

对于二维滤波器 $h(n)$ 和下采样矩阵 M , 同样可以对 $h(n)$ 进行多相分解, 将 $h(n)$ 分解成 $J(M)$ 组, 即

$$h_k(n) = h(nM + k), \quad k \in N(M), \quad (17)$$

$h_k(n)$ 是对 $h(n+k)$ 的 M 倍下采样. $h(n)$ 的 I 型多相分解形式为^[11]

$$H(z) = \sum_{k \in N(M)} \mathcal{Z}(-k) E_k(z^M). \quad (18)$$

如果将整数向量写成 $n = -k + Mn_0$ ($k \in N(M)$) 的形式, 则可以得到 $h(n)$ 的 II 型多相分解形式^[11]

$$H(z) = \sum_{k \in N(M)} \mathcal{Z}(k) R_k(z^M). \quad (19)$$

在滤波器组设计与分析中完全重构是重要的衡量标准. $R(z)E(z) = cz^{-l}I$ 为滤波器组完全重构的充分必要条件^[11]. 在分析滤波器组已知时, 综合滤波器组的设计问题可以转换为对分析滤波器组多相矩阵逆矩阵的求解问题.

1.1.3 滤波器组框架

框架理论最先由 Duffin 等^[14] 在研究非谐波 (Non-harmonic) Fourier 序列时创立的, 小波框架和 Gabor 框架是应用最广泛的两类框架^[15-16]. 20 世纪 80~90 年代, 与小波理论并行发展的滤波器组分析和设计方法使得小波的物理实现成为现实, 此后小波在信号处理、数据压缩与编码等领域得到了飞速发展和巨大应用.

框架的定义^[11-12]: 对于 Hilbert 空间 H 的一组序列 $\{\phi_i\}$, 如果存在两个常数 $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ 使得对于任意 $x \in H$ 都有

$$\alpha \|x\|^2 \leq \sum_i |\langle x, \phi_i \rangle|^2 \leq \beta \|x\|^2 \quad (20)$$

成立, 则称 $\{\phi_i\}$ 为空间 H 的一个框架, 其中 α 和 β 分别称为框架 $\{\phi_i\}$ 的上下界.

目前滤波器组框架理论在采样理论、系统建模、时频分析和小波理论中得到了广泛的应用, 成为上述领域的理论基础^[1, 3, 15-19]. 文献 [17-18] 的研究表明, 对于均匀过采样滤波器组, 其完全重构条件等价于它构成的信号空间的一个框架; 过采样余弦调制滤波器组作为一类特殊的滤波器组, 与 Gabor 框架在某种意义上是等价的^[16]. 另一方面, 离散小波框架可由非均匀过采样滤波器组实现, 在一定假设下, 离散小波框架与完全重构非均匀过采样滤波器组也是等价的^[11, 19].

1.2 滤波器组框架分析设计理论与应用

在框架理论中, 框架界 (Frame bounds) 与对偶框架 (Dual frames) 是两个非常重要的基本概念, 其分析和优化设计是框架理论研究的重要问题. 下面分别介绍滤波器组框架界计算和综合滤波器组优化设计的相关进展.

1.2.1 滤波器组框架界计算与优化

许多学者对框架界计算和对偶框架的求解问题开展了研究. Daubechies^[15] 在其小波经典专著中论述了框架界和对偶框架的逼近算法. Cvelkovic 等^[18] 首先建立了过采样滤波器组构成框架的充分必要条件, 并探讨了对偶框架求解的问题. 此后滤波器组框架便成为应用最广泛的一类框架, 引起广大学者关注. Bölcskei 等^[17] 系统地研究了过采样滤波器组框架的框架界计算及对偶框架的求解问题, 通过在频域分析滤波器组多相矩阵, 给出了滤波器组框架界的逼近计算方法.

对完全重构过采样滤波器组实现的框架, 其滤波器组多相矩阵可由有限维状态空间表示. 文献 [20] 基于状态空间方法给出了框架界和对偶框架的显式表达式. 对于一维滤波器组, 文献 [21] 采用状态空间方法给出了完全重构过采样滤波器组框架界的一种有效的计算方法.

滤波器组框架上下界比值 $\gamma = \beta/\alpha$ 是框架分析与设计中的一个重要参数^[3, 15-18, 22], 也是实际应用中衡量数值稳定性和噪声敏感性的重要性能指标之一. 嵌入数字水印中的图像经过框架界比值大的小波子带分解, 会产生较大的视觉斑点^[23]; 在对偶框架的逼近计算中, 算法收敛速度直接依赖于框架界比值, 比值越大, 收敛越慢^[17, 24]; 在数字通信的子带编码中, 框架界比值决定了解码接收器对信道噪声干扰的敏感性, 比值越大, 对噪声越敏感, 系统鲁棒性越差^[25]; 在平行核磁共振成像 (PMRI) 中, 框架界比值大小表明了图像重构算法对线圈模型不确定性和干扰

的敏感程度,影响着成像的质量^[26].

一般而言,给定一滤波器组框架,框架界比值越小,滤波器组框架的性能越好.仿酉滤波器组框架界比值为1,具有最好的性能^[15,27].在很多实际应用中,滤波器组还需要满足其他更重要的性能要求(如最好的频率选择性,线性相位等),仿酉滤波器组并不容易设计,一些情况下所得到的滤波器组框架往往具有较大的框架界比值.在另一些应用中(如PMRI),滤波器组(线圈特性)是事先确定的,不能改变.

文献[28]提出并解决了Gabor框架的双边预处理矩阵(Preconditioning matrix)设计问题.对于一维滤波器组框架,文献[29]利用状态空间方法中的KYP引理和线性矩阵不等式优化作为理论工具,提出了一种通过调节子带增益来减少框架界比值的方法,给出了最优的增益系数.文献[30]研究了滤波器组框架界比值的双边优化问题,给出了双边优化的实现方法.

1.2.2 综合滤波器组优化设计及应用

子带噪声抑制是综合滤波器组框架设计中的重要科学问题之一,在图像处理、压缩编码、量化、数字通信等领域有广泛应用.文献[31-32]研究了临界采样最优综合滤波器组的设计方法,所设计的综合滤波器组不具有完全重构性质.过采样滤波器组比临界采样滤波器组具有更大的设计自由度和更好的鲁棒性.文献[17-18]研究了过采样完全重构滤波器组的降噪方法,设计的综合滤波器组可以满足完全重构特性,但不能保证滤波器组的线性相位性质.文献[33-34]研究了完全重构综合滤波器组框架的鲁棒优化设计问题,对于给定的分析过采样滤波器组,给出了所有满足完全重构的综合滤波器组的参数化表示.

线性相位滤波器组可以消除相位失真,提高图像的重构质量和视觉效果^[35].格形结构可以保证滤波器组的线性相位特性^[36-37].用格形结构来设计滤波器组有许多优点,格形结构在每级系数量化时,量化敏感度小,能够保持结构不变,便于模块化实现;格形结构实现滤波器组所用的乘法器和延时器个数少,计算复杂性小,可以实现快速运算;用格形结构设计滤波器组是一种无约束优化设计方法.对于线性相位格形结构滤波器组的研究已有许多成果.文献[35,38-39]从不同角度研究了过采样线性相位完全重构滤波器组的格形结构,给出了线性相位特性、完全重构特性及存在性条件下的格形结构的实现方法.文献[40]利用状态空间方法研究了线性相位约束过采样综合滤波器组的优化设计问题,在已知格形结构分析

滤波器组和不同的噪声模型下,给出了一维最优格形结构综合滤波器组的显式表达式.文献[41-43]将滤波器组理论应用在MIMO通信系统中,利用状态空间方法,通过求解多相矩阵的逆矩阵来实现预编码器的设计.

二维滤波器组包括二维可分滤波器组和二维不可分滤波器组.二维可分滤波器组的优点是分析和设计简单,缺点是具有方向局限性.Vetterli^[44]首次将一维滤波器组理论推广到二维情况,证明了二维可分滤波器组可以看作由若干个同等的一维滤波器组张成的可分张量积.Vaidyanathan^[11]和Kovacevic等^[45]较早对多维不可分滤波器组框架分析与设计问题展开了研究.文献[45]建立了多维滤波器组和不可分多维小波框架的关系,给出了不可分多维小波FIR滤波器组实现.Zhou^[46]系统研究了多维正交滤波器组设计问题,提供了满足完全重构条件的滤波器组特征表示及其在图像处理中的应用.

文献[47]从控制理论角度分析了二维滤波器组的设计问题,对于给定的分析滤波器组,在噪声模型已知的情况下,基于二维系统的状态空间模型,给出了最优综合滤波器组的状态空间表达式.但是,该方法设计的综合滤波器组不具有特定的频率特性,且是二维IIR系统.文献[48]对二维滤波器组的鲁棒优化设计问题展开了研究,采用二维可分滤波器组代替IDCT,对JPEG压缩编码后的数据进行恢复,减少了量化噪声,得到了更好效果的重构图像,但所设计的滤波器并不能保持线性相位性质.文献[37,49]研究了二维滤波器组的格形结构实现方法.文献[50]讨论了二维可分格形结构滤波器组的最优设计问题,给出了一种迭代求解局部最优解的方法.还有一些学者研究了二维方向滤波器组的设计问题及其应用^[51-53].

结构相似性(SSIM)指标是一种有效的图像质量评价指标,由Wang等^[54]首次提出,它相对于最小均方差能够更好地反映两幅图像的相似性,被国际视频质量专家组推荐为图像和视频质量评价的主要指标之一^[55].文献[56]研究了以SSIM为优化指标的单通道线性均衡器设计问题,将非凸优化问题转换为拟凸问题,给出了一种基于二分法的迭代求解算法,在图像降噪和复原中取得了很好的效果.针对多通道均衡器设计问题,文献[57-58]给出了SSIM指标下的最优线性均衡器的显式表达式.对于多相矩阵为常数矩阵的一类特殊分析滤波器组,文献[59]给出了SSIM指标下的最优综合滤波器组的计算公式.

2 图滤波器组框架

近年来,图信号处理引起了信息和应用数学领域许多学者的关注^[6-7,60-62]. 在工程和科学领域存在很多应用图信号的实例. 例如,在图像处理领域,可以通过非局部和半局部的图像建立图像像素之间的联系,这种方法不仅可以考虑图像中像素位置的依赖关系,还可以处理图像中不同像素的噪声特性,在图像去噪、复原和压缩等应用中获得较好的效果^[63]. 在运输网络中,图信号处理的方法对于解决基于部分采样数据的半监督学习问题非常有效^[64].

在图信号处理中,信号的定义不再是均匀时域网格上的函数,而是图的节点上的向量. 图信号处理研究的基础问题是如何根据传统信号处理架构找到图信号在顶点域与谱图域的对应关系. 目前有两类被广泛应用的图信号处理架构: 1) 基于 Laplacian 矩阵的图信号处理架构^[6,8,65]; 2) 基于邻接矩阵的图信号处理架构^[7,66-67]. 本节介绍谱图知识和上述两类图信号处理架构,以及图滤波器组研究进展.

2.1 谱图基础知识

定义 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 是一个 $n(n \geq 2)$ 阶的有向加权图,其包含一个节点集合 $\mathcal{V} = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\}$ 、一个连边集合 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 和一个加权邻接矩阵 $\mathcal{A} = [a_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}]$. 节点下标属于一个有限索引集 $I = \{1, 2, \dots, n\}$. 当且仅当节点 ν_i 能接收到节点 ν_j 的信息时,连边 $e_{i,j} = (\nu_j, \nu_i)$ 存在,则对应有向图连边的邻接矩阵元素为非零,即 $e_{i,j} \in \mathcal{E} \Leftrightarrow a_{i,j} \neq 0$. 此外,对于任意 $i \in I$,有 $a_{i,i} = 0$,即图中不存在自环. 节点 ν_i 的邻居集合定义为 $N_i = \{\nu_j \in \mathcal{V} : (\nu_i, \nu_j) \in \mathcal{E}\}$. 节点 ν_i 的入度和出度分别为 $d_i^{\text{in}} = \sum_{j=1}^n a_{i,j}$ 和 $d_i^{\text{out}} = \sum_{j=1}^n a_{j,i}$. 图的 Laplacian 矩阵定义为 $\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A}$, 其中 $\mathcal{D} = \text{diag}\{d_1^{\text{in}}, \dots, d_n^{\text{in}}\}$, 且 Laplacian 矩阵 \mathcal{L} 不一定是对称的. 定义 Laplacian 矩阵 \mathcal{L} 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 其中 $0 = |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|$. 若 \mathcal{G} 是无向图,则 $a_{i,j} = a_{j,i}$, 即 Laplacian 矩阵 \mathcal{L} 是对称的,且所有的特征值都是非负实数. Laplacian 矩阵 \mathcal{L} 的零特征值对应的右特征向量为 $\mathbf{1}$, 即 $\mathcal{L}\mathbf{1}$. 当且仅当 $\mathbf{1}^T \mathcal{L} = 0$ 时,图 \mathcal{G} 是平衡图. 显然,无向图是平衡图. 从节点 ν_{i_1} 到节点 ν_{i_k} 的一条有向路径指的是有向图 \mathcal{G} 中存在边的有向序列 $(\nu_{i_1}, \nu_{i_2}), (\nu_{i_2}, \nu_{i_3}), \dots, (\nu_{i_{k-1}}, \nu_{i_k})$, 其中 $(\nu_{i_{j-1}}, \nu_{i_j}) \in \mathcal{E}, j = 2, 3, \dots, k$. 若任意两个不同的节点之间都有一条有向路径,则有向图称作是强连通的. 对于无向图,如果任意的两个

节点之间都有一条路径,则称该图是连通的.

2.2 基于 Laplacian 矩阵的图信号处理架构

针对无向图, Shuman 等^[6,65] 基于代数图论和谱图理论利用图的 Laplacian 矩阵建立了一个图信号处理架构. 在该架构下, Laplacian 矩阵的特征值对应图信号在谱图域上的频率, Laplacian 矩阵的特征向量对应 Fourier 变换因子.

2.2.1 图 Fourier 变换

无向图 \mathcal{G} 上信号 $x \in \mathbb{R}^N$ 的图 Fourier 变换 \hat{x} 被定义为^[6,65]

$$\hat{x}(\lambda_l) := \langle x, \mathbf{u}_l \rangle = \sum_{i=1}^N x(i) \mathbf{u}_l^*(i). \quad (21)$$

其中: $\{\mathbf{u}_l\}_{l=1,2,\dots,N}$ 是图 Laplacian 矩阵的一组正交特征向量, $\{\lambda_l\}_{l=1,2,\dots,N}$ 是对应的非负实特征值, 满足 $\mathcal{L}\mathbf{u}_l = \lambda_l \mathbf{u}_l$.

图 Fourier 反变换定义为^[6, 65]

$$x(i) = \sum_{l=1}^N \hat{x}(\lambda_l) \mathbf{u}_l(i). \quad (22)$$

对于连通图, Laplacian 矩阵零特征值是单根, 对应的特征向量 $\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{N})\mathbf{1}$, 即每个元素都相同且等于 $1/\sqrt{N}$, 相当于图信号的直流分量(DC component). 可以看出, Laplacian 矩阵的特征值和特征向量可以表征图信号在谱图域的频域信息: 较小的特征值对应的特征向量变化缓慢, 意味着较大权重的边连接的两个节点信号差别小, 对应传统频域分析中的低频信号; 较大的特征值对应的特征向量震荡越剧烈, 意味着较大权重的边连接的两个节点信号差别大, 对应传统频域分析中的高频信号.

图 Fourier 变换的表示方法并不唯一^[6], 利用图 Laplacian 矩阵的特征值 $\{\lambda_l\}_{l=1,2,\dots,N}$ 和特征向量 $\{\mathbf{u}_l\}_{l=1,2,\dots,N}$ 是图 Fourier 正变换和反变换的一种表示. 第 2 种常用表示是通过定义标准化图 Laplacian 矩阵(Normalized graph Laplacian)

$$\tilde{\mathcal{L}} := D^{-1/2} \mathcal{L} D^{-1/2}.$$

连通图的 $\tilde{\mathcal{L}}$ 矩阵的特征值为 $\{\tilde{\lambda}_l\}_{l=1,2,\dots,N}$, 满足 $0 = \tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2 \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_{\text{max}} \leq 2$. 特征向量为 $\{\tilde{\mathbf{u}}_l\}_{l=1,2,\dots,N}$, 其中零特征值对应的特征向量为

$$\tilde{\mathbf{u}}_1 := 1 / \sqrt{\sum_{i=1}^N d_i} [\sqrt{d_1} \quad \sqrt{d_2} \quad \dots \quad \sqrt{d_N}].$$

$\tilde{\mathcal{L}}$ 矩阵的谱同样对应着图信号在谱图域的频率信息. 第 3 种表示是通过定义随机游走矩阵(Random walk matrix) $P := D^{-1} \mathcal{A}$. 矩阵 P 中的元素 $p_{i,j}$ 表示图中从节点 ν_i 到节点 ν_j Markov 随机游走一步的概率.

对应的非对称图Laplacian矩阵定义为 $\mathcal{L}_a := I_N - P$, 其中 I_N 是单位阵。 \mathcal{L}_a 矩阵的谱和 $\tilde{\mathcal{L}}$ 矩阵的谱完全相同,且 $D^{-1/2}\tilde{\mathbf{u}}_l$ 是矩阵 \mathcal{L}_a 特征值 $\tilde{\lambda}_l$ 对应的特征向量。

2.2.2 图信号的平移

图信号在顶点域的卷积定义为^[6,65]

$$(x * h)(i) := \sum_{l=1}^N \hat{x}(\lambda_l) \hat{h}(\lambda_l) \mathbf{u}_l(i). \quad (23)$$

可以看出,图信号满足卷积性质:顶点域中图信号的卷积对应谱图域中图信号的乘积。

图信号在顶点域的平移 $T_k : R^N \rightarrow R^N$ 定义为^[6,65]

$$(T_k x)(i) := \sqrt{N}(x * \delta_k)(i) = \sqrt{N} \sum_{l=1}^N \hat{x}(\lambda_l) \mathbf{u}_l^*(\lambda_l) \mathbf{u}_l(i), \quad (24)$$

$$\text{其中 } \delta_k(i) = \begin{cases} 1, & i = k; \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

图信号的平移不满足移不变(Shift-invariant)性质,只能保证信号的均值不变,即 $\sum_{i=1}^N (T_k x)(i) = \sum_{i=1}^N x(i)$ 。与传统信号平移运算不同,图信号的平移不是等距算子,即 $\|T_k x\|_2 \neq \|x\|_2$ 。

2.2.3 图信号的滤波

谱图滤波定义如下^[6,65]:

$$\hat{y}(\lambda_l) = \hat{x}(\lambda_l) \hat{h}(\lambda_l). \quad (25)$$

其中: $\hat{h}(\cdot)$ 是滤波器的传递函数, $\hat{y}(\cdot)$ 是滤波后的图信号。利用图Fourier反变换,可以得到

$$y(i) = \sum_{l=1}^N \hat{x}(\lambda_l) \hat{h}(\lambda_l) \mathbf{u}_l(i). \quad (26)$$

也可写作 $y = \hat{h}(L)x$,其中

$$\hat{h}(L) := U \begin{bmatrix} \hat{h}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{h}(\lambda_N) \end{bmatrix} U^*.$$

若定义滤波器为一个 M 阶多项式

$$\hat{h}(\lambda_l) = \sum_{k=0}^M a_k \lambda_l^k,$$

其中 $\{a_k\}_{k=0,1,\dots,M}$ 是常数,则在顶点域,节点 ν_i 滤波后的输出信号可以表示为输入信号在 M -hop邻域上的线性组合^[6],即

$$y(i) = b_{i,i}x(i) + \sum_{j \in N(i,M)} b_{i,j}x(j).$$

$$b_{i,j} = \sum_{k=d_G(i,j)}^M a_k (L^k)_{i,j}, d_G(i,j) \text{ 为节点 } \nu_i \text{ 到节点 } \nu_j$$

的路径中边最少的数目,当 $d_G(i,j) > k$ 时, $(L^k)_{i,j} = 0$ 。

2.2.4 图信号的调制

图信号的调制 $M_k : R^N \rightarrow R^N, k \in \{1, 2, \dots, N\}$,定义为^[6,65]

$$(M_k x)(i) := \sqrt{N}x(i)\mathbf{u}_k(i). \quad (27)$$

对于连通图, M_1 是单位算子(Identity operator),即

$$(M_1 x)(i) = \sqrt{N}x(i)\mathbf{u}_1(i) = x(i).$$

在传统信号处理中,信号调制对应信号在频域的平移。但在图信号处理中,由于图结构的离散性质,这种对应关系并不严格成立。对于任意图信号 $x \in R^N$,调制运算 M_k 将信号的直流分量映射到 $\hat{x}(0)\mathbf{u}_k$ 。此外,若信号 x 在谱图域中定位在零特征值附近,调制后的信号 $M_k x$ 在谱图域中将定位在特征值 λ_k 附近。

2.2.5 图信号的下采样和降阶

由于图信号具有复杂的高维结构化特性,其下采样目前还没有确切的定义。文献[8]给出了理想情况的下采样需要满足的性质:令 $\mathcal{D} : \mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}) \rightarrow 2^{\mathcal{V}}$ 为下采样运算,表示保留加权无向图中在集合 $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$ 的节点,丢掉集合 $\mathcal{V}_1^C := \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_1$ 的节点。下采样 \mathcal{D} 满足:1)图信号的下采样会丢掉图中将近一半的节点;2)丢掉的节点之间没有高权重的连边,保留的节点之间也没有高权重的连边;3)便于计算实现。

在满足上述性质的前提下,文献[8]总结了目前常用的下采样方法:

1) 利用图Laplacian矩阵的最大特征向量选择节点,即根据 λ_{\max} 对应的特征向量 \mathbf{u}_{\max} 将节点分为两个集合,即 $\mathcal{V}_+ := \{i \in \mathcal{V} : \mathbf{u}_{\max}(i) \geq 0\}$ 和 $\mathcal{V}_- := \{i \in \mathcal{V} : \mathbf{u}_{\max}(i) < 0\}$;

2) 对于二分图,根据图的特性可以自然地将节点分为两个集合,并确保每个集合中的节点之间没有连边;

3) 利用邻接矩阵负实部最小的特征值对应的特征向量将无向图中的节点分为两个集合,对于正则图(Regular graph),该方法与利用Laplacian矩阵的最大特征向量进行下采样是完全等价的;

4) 根据节点状态的正负将图中的节点分为两个集合,正定(负定)节点域是指所有节点状态 $x(i) > 0$ ($x(i) < 0$)的最大连通子图;

5) 对于大规模的图,根据权重进行图的分割,求解NP难问题

$$\arg \max_{\mathcal{V}_1} \{\text{cut}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1^C)\} = \arg \max_{\mathcal{V}_1} \left\{ \sum_{i \in \mathcal{V}_1} \sum_{j \in \mathcal{V}_1^C} a_{i,j} \right\}. \quad (28)$$

可以看出,图信号的下采样是指对节点进行下采样得到一个节点的子集,但图信号除了包括节点还需要节点之间的拓扑结构.图降阶即是将原始图信号的Laplacian矩阵映射到下采样之后的节点上得到一个新的Laplacian矩阵的过程.Kron降阶是图降阶的一种方法,定义如下^[8]:

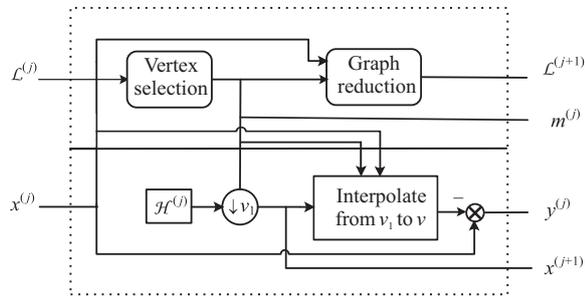
$$\mathcal{K}(\mathcal{L}, \mathcal{V}_1) := \mathcal{L}_{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1} - \mathcal{L}_{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1^c} \mathcal{L}_{\mathcal{V}_1^c, \mathcal{V}_1}^{-1} \mathcal{L}_{\mathcal{V}_1^c, \mathcal{V}_1}, \quad (29)$$

其中 $\mathcal{L}_{A,B}$ 是由行索引在集合 A 中、列索引在集合 B 中所对应的 \mathcal{L} 矩阵中的元素组成的维数为 $|A| \times |B|$ 的矩阵.降阶后的Laplacian矩阵为 $\mathcal{L}^{\text{Kron}} = [\mathcal{L}_{i,j}^{\text{Kron}}] = \mathcal{K}(\mathcal{L}, \mathcal{V}_1)$,对应的图定义为 $\mathcal{G}^{\text{Kron}} = \{\mathcal{V}_1, \mathcal{E}^{\text{Kron}}, \mathcal{A}^{\text{Kron}}\}$,其中 $\mathcal{E}^{\text{Kron}}$ 是降阶后的边集合, $\mathcal{A}^{\text{Kron}} = [a_{i,j}^{\text{Kron}}]$ 是降阶后的邻接矩阵,满足

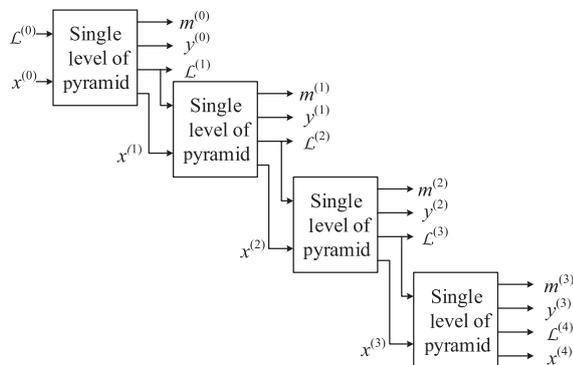
$$a_{i,j}^{\text{Kron}} = \begin{cases} -l_{i,j}^{\text{Kron}}, & i \neq j; \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

2.2.6 图信号的多尺度变换

在Laplacian架构下,图信号的上/下采样很难定义,其多尺度变换不存在传统滤波器组中的多相表示及其等效变换,因此在实现上比较复杂.在实际应用中多采用图小波结构或图Laplacian金字塔结构(如图9所示)进行图信号的多尺度变换,见文献[6,8].



(b) 单级金字塔结构



(b) 多级金字塔结构

图9 图信号的Laplacian金字塔结构^[8]

2.3 基于邻接矩阵的图信号处理架构

对于有向图或任意图,Sandryhaila等^[66-67]基于矩阵分析方法利用图的邻接矩阵建立了一种图信号

处理架构.下面简单介绍一些基本概念.

2.3.1 图Fourier变换

有向图 \mathcal{G} 上的信号 x 的图Fourier变换 \hat{x} 被定义为^[66-67]

$$\hat{x} = V^{-1}x, \quad (30)$$

其中 V 是邻接矩阵 \mathcal{A} 的特征向量矩阵,满足 $\mathcal{A} = V\mathcal{J}V^{-1}$, \mathcal{J} 是 \mathcal{A} 的约当标准型.

2.3.2 图信号的平移

对于任意图 \mathcal{G} ,信号 x 的单位平移算子(Unit shift operator)定义为^[66-67]

$$\tilde{x} = \mathcal{A}x, \quad (31)$$

其中 \tilde{x} 是单位平移后的信号.

对于环状图,即

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & j - i = 1 \pmod{N}; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

图信号的单位平移可以看作是在有限长周期时间序列上的单位时移.

2.3.3 图信号的滤波

图信号的滤波定义如下^[66-67]:

$$y = Hx. \quad (32)$$

其中: y 是滤波后的图信号;

$$H = h(\mathcal{A}) = h_0I + h_1\mathcal{A} + \dots + h_L\mathcal{A}^L \quad (33)$$

是多项式图滤波器,满足线性和移不变性质,即

$$H(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Hx_1 + \beta Hx_2,$$

$$\mathcal{A}(Hx) = H(\mathcal{A}x).$$

图滤波器 H 在频域的运算定义为

$$\hat{H} = V^{-1}HV. \quad (34)$$

对于任意图信号 x 和线性图滤波器 H , $y = Hx$ 和 $\hat{y} = \hat{H}\hat{x}$ 完全等价.当 \hat{H} 是对角矩阵时, \hat{H} 是图滤波器 H 对应的频域响应.

2.3.4 图信号的上/下采样

文献[9-10,68]定义图信号 x 的下采样为 $\mathcal{D}x$,其中 $\mathcal{D} = [I_{N/M} \ 0_{N/M} \ \dots \ 0_{N/M}] \in R^{(N/M) \times N}$ 是下采样因子为 M 的典型抽取(Canonical decimator).在文献[69-71]也有类似的关于下采样的定义.对应的上采样 $U \in R^{N \times (N/M)}$ 定义为 $U = \mathcal{D}^T$,满足 $DU = I_{N/M}$.

当邻接矩阵 \mathcal{A} 满足

$$\mathcal{A}^M = \begin{bmatrix} (\mathcal{A}^M)_{1,1} & 0 \\ (\mathcal{A}^M)_{2,1} & (\mathcal{A}^M)_{2,2} \end{bmatrix} \quad (35)$$

时,其中 $(\mathcal{A}^M)_{11} \in R^{(N/M) \times (N/M)}$,滤波器 H 和下采样级联后有如图10所示的等效关系,即

$$DH(\mathcal{A}^M) = H(\bar{\mathcal{A}})\mathcal{D}, \quad (36)$$

这里 $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{D}\mathcal{A}^M\mathcal{D}^T \in R^{(N/M) \times (N/M)}$.

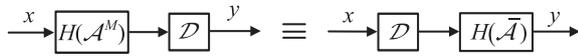


图10 图滤波器与下采样级联的等效变换关系^[9]

当邻接矩阵 \mathcal{A} 满足

$$\mathcal{A}^M = \begin{bmatrix} (\mathcal{A}^M)_{1,1} & (\mathcal{A}^M)_{1,2} \\ 0 & (\mathcal{A}^M)_{2,2} \end{bmatrix} \quad (37)$$

时,滤波器 H 和上采样级联后有如图11所示的等效关系,即

$$H(\mathcal{A}^M)\mathcal{D}^T = \mathcal{D}^T H(\bar{\mathcal{A}}). \quad (38)$$

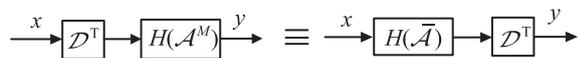


图11 图滤波器与上采样级联的等效变换关系^[9]

为了保证图10和图11中的等效关系同时成立,邻接矩阵 \mathcal{A} 应满足

$$\mathcal{A}^M = \begin{bmatrix} (\mathcal{A}^M)_{1,1} & 0 \\ 0 & (\mathcal{A}^M)_{2,2} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

2.3.5 多相结构表示

滤波器的多相表示是多采样率信号处理中非常实用的方法.与传统滤波器组类似,文献[9-10]将多相分解方法引入图滤波器中,定义多项式图滤波器的类型I多相表示为

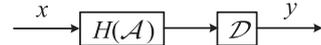
$$H(\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{M-1} \mathcal{A}^k E_k(\mathcal{A}^M); \quad (40)$$

类型II多相表示为

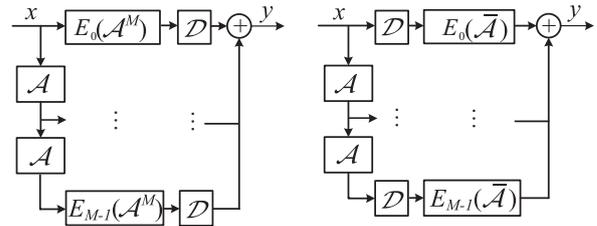
$$H(\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{M-1} \mathcal{A}^{M-1-k} R_k(\mathcal{A}^M). \quad (41)$$

图滤波器与下采样级联(图12(a))对应的类型I多相结构如图12(b)所示,若满足图10所示等效关系,则多相结构具有更简洁的形式,如图12(c)所示.同样,图滤波器与上采样级联(图13(a))对应的类型II多相结构如图13(b)所示,若满足图11所示等效关系,则多相结构具有更简洁的形式,如图13(c)所示.

图滤波器组结构如图14所示,与传统滤波器组类似,图中左边部分是分析滤波器组,右边部分是综合滤波器组.当图邻接矩阵同时满足图10和图11所示等效关系时,对分析滤波器组采用类型I多相分解,对综合滤波器组采用类型II多相分解,可以得到如图15所示的图滤波器组的多相实现.

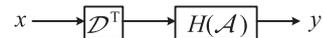


(a) 滤波器与下采样级联

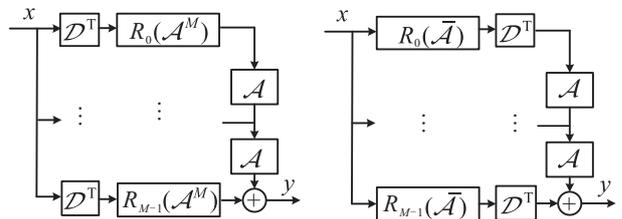


(b) 图(a)的多相表示 (c) 图(b)的等效多相结构

图12 图滤波器与下采样级联的类型I多相结构和等效多相结构^[9]



(a) 滤波器与上采样级联



(b) 图(a)的多相表示 (c) 图(b)的等效多相结构

图13 图滤波器与上采样级联的类型II多相结构和等效多相结构^[9]

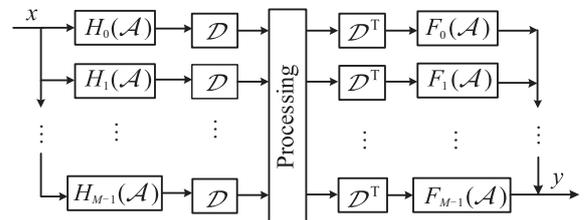


图14 图滤波器组结构

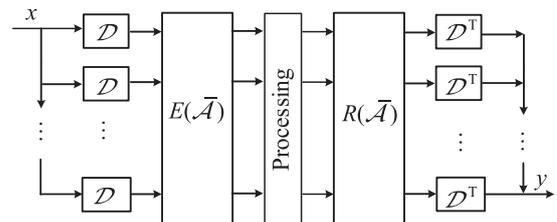


图15 图滤波器组的等效多相结构

2.4 图滤波器组框架的研究进展

基于Laplacian矩阵的图信号处理架构和基于邻接矩阵的图信号处理架构分别将传统信号处理中的概念推广到图信号处理中,在实际应用中各有优劣.在Laplacian矩阵架构下,通过图Fourier变换,可以直观地将图信号在谱图域的Laplacian矩阵特征值与传统时域信号在频域的频率对应,但通常要求网络拓扑图是无向的.此外,该架构下的多尺度变换没有多相等效结构,实现起来计算量大.而在邻接矩阵架

构下,网络拓扑图不要求是无向的,且传统多采样信号处理方法可直接推广到图信号处理中,但仅对特定结构的图信号,图滤波器组才有等效的多相结构。

2.4.1 图滤波器

在传统图像频域分析中,双边滤波器是不能进行谱滤波的,文献[72]将双边滤波器看作一个图结构,像素点当成节点,节点的亮度值作为信号值,滤波系数作为边的权重值;并定义了基于这类图结构的谱滤波器,滤波响应值可通过相应Laplacian矩阵的特征值和特征向量计算得出。此后,专家学者们利用谱图滤波器研究了图信号处理中的很多实际问题,如图像恢复与去噪^[73]、迭代一致^[74]、无线传感器网络的设计与实现^[75]等。

在信号处理领域,插值逼近方法常用于滤波器的设计实现。相关研究常以传统的Fallow结构^[76]为实现基础,采用多项式^[77-78]或多分段函数^[79]来逼近理想滤波器的时域冲激响应。在图信号处理中,Hammond等^[80]提出一种快速Chebyshev多项式逼近算法来构造图信号上的小波变换。Shuman等^[81]将该插值逼近方法进一步应用到高维信号的分布式信号处理中,定义了一类图Fourier变换算子。Sakiyama等^[82]采用Chebyshev多项式逼近算法给出了具有更好的幅频特性的谱图小波滤波器组实现。现有的研究主要是设计Chebyshev多项式逼近算法来实现信号处理中变换算子的快速计算。

此外,谱图滤波方法还可以应用于复杂多智能体网络的研究。传统的复杂多智能体网络一致性研究大都采用时域分析法,借助稳定性理论和Lyapunov泛函方法进行一致协议设计与一致性能分析,不能给出网络一致演化的本质物理解释,也不能给出最优的一致控制策略。文献[83]从图信号处理的角度,揭示了复杂多智能体网络一致演化的本质是图信号的低通(零频)滤波过程,通过谱图滤波器的设计,给出了网络有限时间一致的充分必要条件。进一步,针对网络拓扑未知的情况,借助谱图滤波方法,提出了一类周期控制协议以实现网络的一致性。

2.4.2 图小波与图滤波器组

小波变换与Fourier变换相比优势在于可以更准确地表示时频信息。很多研究者将传统小波滤波器组推广到图信号处理中,希望图结构小波也可以提供图信号顶点域与谱图域之间的折中表示。研究主要分两类:一是基于图的空间特征的顶点域^[84-85],实现图结构提升变换^[86];二是基于图谱特征的研究,主要方法是利用图Laplacian矩阵的特征值和特征向量,

如扩散小波^[87]、谱图小波^[80]和图滤波器组^[88-90]等。

文献[80]在Laplacian矩阵的频谱域中定义了小波缩放。作者进一步表明,对定位在小波缩放范围内的频谱图小波,可以快速地计算其框架界,并给出了Chebyshev多项式小波的近似计算算法。Narang等^[69,88]对任意的图结构设计了正交镜像滤波器组,给出了这类两通道图滤波器组能够消除混叠、完全重构和正交的充分必要条件,并设计了图双正交小波。进一步,在文献[89-90]中将基于图的小波滤波器组的设计思想应用到图像边界信息的编码中,实现了图像的重构。Tanaka和Sakiyama^[91-92]在图Laplacian矩阵的谱特性基础上将 M 通道临界采样和过采样滤波器组推广到图信号上,并借助多项式逼近方法构造了近似误差小的图小波和图滤波器组^[93]。Tay等^[94]针对二分图,给出了图滤波器组的多相表示,并采用梯形结构构造了双正交二分图滤波器组。文献[95-96]采用多项式方法分别构造了近似正交过采样滤波器组和临界采样双正交滤波器组,实现了图信号的完全重构。文献[97]针对临界采样两通道图滤波器组给出了快速高效的多相结构。Teke等^[9-10,68]进一步提出了 M 通道图滤波器组的多相表示,实现了图信号的完全重构。

3 总结与展望

滤波器组框架理论在信号处理领域具有重要的研究意义和应用价值,图滤波器组是目前非常热门的信号处理方法,被广泛地研究和应用。本文综述了滤波器组框架理论及其在图信号处理中的应用进展,重点介绍了两类图信号处理架构以及图滤波器组最新的研究现状。

最后,本文给出几个有待研究的问题:

1) 二维滤波器组的框架界比值优化与鲁棒设计问题。具有线性相位的二维可分滤波器组鲁棒优化设计问题不是平凡的,无法求得全局最优解,而对于二维不可分情形,尚未有保持线性相位的鲁棒优化设计方法。可针对几类特殊二维不可分滤波器组,研究其格形结构表示,将优化设计问题转化成格形结构最优参数的求解问题。

2) SSIM指标的线性相位滤波器组优化设计问题。基于SSIM指标的时不变系统的多通道均衡器最优设计问题是非凸的,在零均值条件下可得到显式最优解^[57-58]。对于一般的滤波器组,信号统计特性不再是平稳的,此时需要重新定义子带信号的均值、方差以及协方差,分析子带信号与原信号统计特性之间的关系及SSIM表示。

3) 图滤波器组在复杂多智能体网络中的应用问题^[83]. 建立复杂多智能体网络顶点域与谱图域之间的对应关系, 根据网络协作任务需求设计合适的谱图滤波器组, 获取网络中不同频谱的关键节点信息, 进而得到最优的协作信息获取策略.

参考文献(References)

- [1] Kovacevic J, Chebira A. Life beyond bases: The advent of frames, Part I[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2007, 24(4): 86-104.
- [2] Casazza P, Kutyniok G. Finite frames: Theory and applications[M]. New York: Birkhauser, 2012: 1-15.
- [3] Kovacevic J, Goyal V K, Vetterli M. Signal processing: Fourier and wavelet representations[J/OL]. [2017-10-01]. <http://www.fourierandwavelets.org/>.
- [4] Lecun Y, Bengio Y, Hinton G. Deep learning[J]. *Nature*, 2015, 521(7553): 436-444.
- [5] Andrearczyk V, Whelan P F. Using filter banks in convolutional neural networks for texture classification[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2016, 84: 63-69.
- [6] Shuman D I, Narang S K, Frossard P, et al. The emerging field of signal processing on graphs: Extending high-dimensional data analysis to networks and other irregular domains[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2012, 30(3): 83-98.
- [7] Sandryhaila A F, Moura J M. Big data analysis with signal processing on graphs: Representation and processing of massive data sets with irregular structure[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2014, 31(5): 80-90.
- [8] Shuman D I, Faraji M J, Vandergheynst P A. Multiscale pyramid transform for graph signals[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2016, 64(8): 2119-2134.
- [9] Teke O, Vaidyanathan P P. Extending classical multirate signal processing theory to graphs, Part I: Fundamentals[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2017, 65(2): 409-422.
- [10] Teke O, Vaidyanathan P P. Extending classical multirate signal processing theory to graphs, Part, II: M -channel filter banks[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2017, 65(2): 423-437.
- [11] Vaidyanathan P P. Multirate systems and filter banks[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1993.
- [12] 胡广书. 现代信号处理教程[M]. 第2版. 北京: 清华大学出版社, 2015: 125-143.
(Hu G S. Modern signal processing[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2015: 125-143.)
- [13] 陶然, 张惠云, 王越. 多抽样率数字信号处理理论及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007: 167-180.
(Tao R, Zhang H Y, Wang Y. Multirate digital signal processing theory and applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2007: 167-180.)
- [14] Duffin R J, Schaeffer A C. A class of nonharmonic fourier series[J]. *Trans Amer Math Soc*, 1952, 72(2): 341-366.
- [15] Daubechies I. Ten lectures on wavelets[M]. Philadelphia: SIAM, 1992: 53-106.
- [16] Feichtinger H G, Strohmer T. Gabor analysis and algorithms: Theory and applications[M]. Boston MA: Birkhauser, 1998: 295-322.
- [17] Bölcskei H, Hlawatsch F, Feichtinger H G. Frame-theoretic analysis of oversampled filter banks[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1998, 46(12): 3256-3268.
- [18] Cvelkovic Z, Vetterli M. Oversampled filter banks[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1998, 46(5): 1245-1255.
- [19] Vetterli M, Kovacevic J. Wavelets and subband coding[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1995: 97-189.
- [20] Chai L, Zhang J, Zhang C, et al. Frame theory based analysis and design of oversampled multirate filter banks: Direct computational method[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2007, 55(2): 507-519.
- [21] Chai L, Zhang J, Zhang C, et al. Efficient computation of frame bounds using LMI based optimization[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2008, 56(7): 3029-3033.
- [22] Bayram I, Selesnick I E. On the frame bounds of iterated filter banks[J]. *Applied & Computation Harmonic Analysis*, 2009, 27(2): 255-262.
- [23] Marusic S, Tay D B H, Deng G, et al. Even-length biorthogonal wavelets for digital watermarking[C]. *Proc of Int Symposium on Signal Processing and Its Applications*. Wollongong, 2005, 1: 17-20.
- [24] Gröchenig K. Acceleration of the frame algorithm[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1993, 41(12): 3331-3340.
- [25] Bernardini R, Rinaldo R. Bounds on error amplification in oversampled filter banks for robust transmission[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2006, 54(4): 1399-1411.
- [26] Chen Z, Zhang J, Li S, et al. FB analysis of PMRI and its application to H_∞ sense reconstruction[C]. *Proc of IEEE Int Conf on Image Processing*. San Antonio, 2007, 3: 129-132.
- [27] Gao X Q, Nguyen T Q, Strang G. On factorization of M -channel paraunitary filter banks[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2001, 49(7): 1433-1446.
- [28] Balzas P, Feichtinger H G, Hampejs M, et al. Double preconditioning for Gabor frames[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2006, 54(12): 4597-4610.
- [29] Chai L, Zhang J, Zhang C, et al. Bound ratio optimization of filter bank frames[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2010, 58(1): 209-220.
- [30] Chai L, Zhang J, Han Q L. Optimal two-sided diagonal scaling for filter bank frames[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2011, 59(12): 5830-5841.
- [31] Vikalo H, Hassibi B, Erdogan A T, et al. On robust signal reconstruction in noisy filter banks[J]. *Signal Processing*, 2005, 85(1): 1-14.
- [32] Zhang J, Yang R, Zhang C, et al. Mixed H_2/H_∞ design of IIR multirate filter banks subject to subband noises[C]. *Proc of Asian Control Conf*. Melbourne, 2004, 2: 1324-1329.
- [33] Chai L, Zhang J, Zhang C, et al. Optimal noise reduction in oversampled PR filter banks[J]. *IEEE Trans on Signal*

- Processing, 2009, 57(10): 3844-3857.
- [34] Sheng Y, Chai L, Zhang J. Robust optimal post-filter in oversampled lapped transform: Theory and application in image coding[J]. Signal Processing, 2013, 93(9): 2516-2524.
- [35] Tanaka Y, Ikehara M, Nguyen T Q. A lattice structure of biorthogonal linear-phase filter banks with higher order feasible building blocks[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2008, 55(8): 2322-2331.
- [36] Li B, Gao X. Lattice structure for regular linear phase paraunitary filter bank with odd decimation factor[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2014, 21(1): 14-17.
- [37] Gao X, Li B, Xiao F. Lattice structure for generalized-support multidimensional linear phase perfect reconstruction filter bank[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2013, 22(12): 4853-4864.
- [38] Gan L, Ma K. Oversampled linear-phase perfect reconstruction filterbanks: Theory, lattice structure and parameterization[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2003, 51(3): 744-759.
- [39] Gan L, Ma K. Time-domain oversampled lapped transforms: Theory, structure, and application in image coding[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2004, 52(10): 2762-2775.
- [40] Chai L, Zhang J, Sheng Y. Optimal design of oversampled synthesis FBs with lattice structure constraints[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2011, 59(8): 3549-3559.
- [41] Li S, Zhang J, Chai L. Optimal zero-forcing precoding design-oversampled FB frame approach[C]. Proc of IEEE Int Conf on Acoustics, Speech and Signal Processing. Dallas, 2010: 2546-2549.
- [42] Li S, Zhang J. Some properties of generalized inverse of non-square systems[C]. Proc of IEEE Conf on Decision and Control. Los Angeles, 2014: 6446-6451.
- [43] Li L, Gu G. Design of optimal zero-forcing precoders for MIMO channels via optimal full information control[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2005, 53(8): 3238-3246.
- [44] Vetterli M. Multidimensional sub-band coding: Some theory and algorithms[J]. Signal Processing, 1984, 6(2): 97-112.
- [45] Kovacevic J, Vetterli M. Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for R^n [J]. IEEE Trans on Information Theory, 1992, 38(3): 533-555.
- [46] Zhou J. Multidimensional multirate systems: Characterization, design and applications[D]. Illinois: University of Illinois at Urbana-Champaign, 2005.
- [47] Yang R, Zhang C, Xie L. H_2/H_∞ design of 2D multirate filter banks subject to subband noises[C]. Proc of Int Conf on Control and Automation. Shanghai, 2003: 103-107.
- [48] Calvagno G, Mian G A, Rinaldo R, et al. Two-dimensional separable filters for optimal reconstruction of JPEG-coded image[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems for Video Technology, 2001, 11(7): 777-787.
- [49] Muramatsu S, Aizawa N. Lattice structures for 2-D non-separable oversampled lapped transforms[C]. Proc of IEEE Int Conf on Acoustics Speech and Signal Processing. Vancouver, 2013: 5632-5636.
- [50] Chai L, Sheng Y, Zhang J. Synthesis filter bank optimization with lattice structure constraints in 2D separable image processing[C]. Proc of IEEE Int Conf on Acoustics, Speech and Signal Processing. Prague, 2011: 4376-4379.
- [51] Muramatsu S, Dandan H, Kobayashi T, et al. Directional lapped orthogonal transform: Theory and design[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2012, 21(5): 2434-2448.
- [52] Liang L, Shi G, Xie X. Nonuniform directional filter banks with arbitrary frequency partitioning[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2011, 20(1): 283-288.
- [53] Do M N, Vetterli M. The contourlet transform: An efficient directional multiresolution image representation [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2005, 14(12): 2091-2106.
- [54] Wang Z, Bovik A C, Sheikh H R, et al. Image quality assessment: From error visibility to structural similarity[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2004, 13(4): 600-612.
- [55] Video Quality Experts Group(VQEG). SSIM index for image quality assessment[J/OL]. [2017-09-28]. <https://www.its.bldrdoc.gov/vqeg/vqeg-home.aspx>.
- [56] Channappayya S S, Bovik A C, Caramanis C, et al. Design of linear equalizers optimized for the structural similarity index[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2008, 17(6): 857-872.
- [57] Chai L, Sheng L, Zhang J. SSIM performance limitation of linear equalizers[C]. Proc of IEEE Int Conf on Acoustics, Speech and Signal Processing. Florence, 2014: 1220-1224.
- [58] Chai L, Sheng Y. Optimal design of multichannel equalizers for the structural similarity index[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2014, 23(12): 5626-5637.
- [59] Chai L, Sheng Y, Zhang J. Design of synthesis filter banks for the structural similarity index[C]. Proc of IEEE Int Conf on Image Processing. Melbourne, 2013: 849-853.
- [60] Agaskar A, Lu Y M. A spectral graph uncertainty principle[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2013, 59(7): 4338-4356.
- [61] 王冬丽, 周彦. 基于图变换的图像压缩采样与分类[J]. 控制与决策, 2015, 30(4): 617-622.
(Wang D L, Zhou Y. Graph-transform based image compressive sampling and classification[J]. Control and Decision, 2015, 30(4): 617-622.)
- [62] Thanou N. Graph signal processing[M]. Florida: CRC Press, 2016: 275-290.
- [63] Chen S, Sandryhaila A, Moura J M F, et al. Signal recovery on graphs: Variation minimization[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2015, 63(17): 4609-4624.
- [64] Belkin M, Matveeva I, Niyogi P. Regularization and semi-supervised learning on large graphs[M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2004: 624-638.
- [65] Shuman D I, Ricaud B, Vandergheynst P. Vertex-frequency analysis on graphs[J]. Applied & Computational Harmonic Analysis, 2016, 40(2): 260-291.

- [66] Sandryhaila A, Moura J M F. Discrete signal processing on graphs[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2012, 61(7): 1644-1656.
- [67] Sandryhaila A, Moura J M F. Discrete signal processing on graphs: Frequency analysis[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2014, 62(12): 3042-3054.
- [68] Teke O, Vaidyanathan P P. Graph filter banks with M -channels, maximal decimation, and perfect reconstruction[C]. *Proc of IEEE Int Conf on Acoustics, Speech and Signal Processing*. Shanghai, 2016: 4089-4093.
- [69] Narang S K, Ortega A. Perfect reconstruction two-channel wavelet filter banks for graph structured data[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2012, 60(6): 2786-2799.
- [70] Chen S, Varma R, Sandryhaila A, et al. Discrete signal processing on graphs: Sampling theory[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2015, 63(24): 6510-6523.
- [71] Nguyen H, Do M. Downsampling of signals on graphs via maximum spanning trees[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2015, 63(1): 182-191.
- [72] Gadde A, Narang S K, Ortega A. Bilateral filter: Graph spectral interpretation and extensions[C]. *Proc of IEEE Int Conf on Image Processing*. Melbourne, 2013: 1222-1226.
- [73] Tian D, Mansour H, Knyazev A, et al. Chebyshev and conjugate gradient filters for graph image denoising[C]. *Proc of IEEE Int Conf on Multimedia and Expo Workshops*. Chengdu, 2015: 1-6.
- [74] Sandryhaila A, Kar S, Moura J M F. Finite-time distributed consensus through graph filters[C]. *Proc of IEEE Int Conf on Acoustics, Speech and Signal Processing*. Florence, 2014: 1080-1084.
- [75] Shi X, Feng H, Zhai M, et al. Infinite impulse response graph filters in wireless sensor networks[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(8): 1113-1117.
- [76] Farrow C W. A continuously variable digital delay element[C]. *Proc of IEEE Int Symposium on Circuits and Systems*. Espoo, 1988, 3: 2641-2645.
- [77] Gardner F M. Interpolation in digital modems, Part I: Fundamentals[J]. *IEEE Trans on Communications*, 1993, 41(3): 501-507.
- [78] Erup I, Gardner F M, Harris R A. Interpolation in digital modems, Part II: Implementation and performance[J]. *IEEE Trans on Communications*, 1993, 41(6): 998-1008.
- [79] Vesma J, Saramaki T. Interpolation filters with arbitrary frequency response for all-digital receivers[C]. *Proc of IEEE Int Symposium on Circuits and Systems*. Atlanta, 1996, 2: 568-571.
- [80] Hammond D K, Vandergheynst P, Gribonval R. Wavelets on graphs via spectral graph theory[J]. *Applied & Computational Harmonic Analysis*, 2011, 30(2): 129-150.
- [81] Shuman D I, Vandergheynst P, Frossard P. Chebyshev polynomial approximation for distributed signal processing[C]. *Proc of Int Conf on Distributed Computing in Sensor Systems & Workshops*. Barcelona, 2011: 1-8.
- [82] Sakiyama A, Watanabe K, Tanaka Y. Spectral graph wavelets and filter banks with low approximation error[J]. *IEEE Trans on Signal and Information Processing Over Networks*, 2016, 2(3): 230-245.
- [83] Yi J W, Chai L. Graph filter design for multi-agent system consensus[C]. *Proc of IEEE Conf on Decision and Control*. Melbourne, 2017: 1082-1087.
- [84] Crovella M, Kolaczyk E. Graph wavelets for spatial traffic analysis[C]. *Proc of Joint Conf of the IEEE Computer and Communications*. San Francisco, 2003: 1848-1857.
- [85] Gavish M, Nadler B, Coifman R R. Multiscale wavelets on trees, graphs and high dimensional data: Theory and applications to semi supervised learning[C]. *Proc of Int Conf on Machine Learning*. Haifa, 2010: 367-374.
- [86] Shen G, Ortega A. Transform-based distributed data gathering[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2009, 58(7): 3802-3815.
- [87] Coifman R R, Maggioni M. Diffusion wavelets[J]. *Applied & Computational Harmonic Analysis*, 2006, 21(1): 53-94.
- [88] Narang S K, Ortega A. Compact support biorthogonal wavelet filterbanks for arbitrary undirected graphs[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2013, 61(19): 4673-4685.
- [89] Narang S K, Chao Y H, Ortega A. Graph-wavelet filterbanks for edge-aware image processing[C]. *Proc of IEEE Statistical Signal Processing Workshop*. Ann Arbor: IEEE, 2012: 141-144.
- [90] Narang S K, Chao Y H, Ortega A. Critically sampled graph-based wavelet transforms for image coding[C]. *Proc of IEEE Signal and Information Processing Association Summit and Conf*. Taipei, 2013: 1-4.
- [91] Tanaka Y, Sakiyama A. M -channel oversampled graph filter banks[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2014, 62(14): 3578-3590.
- [92] Sakiyama A, Tanaka Y. Oversampled graph laplacian matrix for graph filter banks[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2014, 62(24): 6425-6437.
- [93] Sakiyama A, Watanabe K, Tanaka Y. Spectral graph wavelets and filter banks with low approximation error[J]. *IEEE Trans on Signal and Information Processing over Networks*, 2016, 2(3): 230-245.
- [94] Tay D B H, Zhang J. Techniques for construction biorthogonal bipartite graph filter banks[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2015, 63(21): 5772-5783.
- [95] Tay D B H, Tanaka Y, Sakiyama A. Near orthogonal oversampled graph filter banks[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2016, 23(2): 277-281.
- [96] Tay D B H, Tanaka Y, Sakiyama A. Critically sampled graph filter banks with polynomial filters from regular domain filter banks[J]. *Signal Processing*, 2017, 131: 66-72.
- [97] Tay D B H, Ortega A. Bipartite graph filter banks: Polyphase analysis and generalization[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2017, 65(18): 4833-4846.