文章编号: 1001-0920(2018)05-0950-10 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2017.1430

混杂奇异摄动系统的研究综述

王燕舞[†], 杨 武

(1. 华中科技大学 自动化学院，武汉 430074；
2. 华中科学大学 图像信息处理与智能控制教育部重点实验室，武汉 430074)

摘 要: 混杂奇异摄动理论及其应用是近年来的研究热点. 鉴于此, 介绍了一般化的混杂奇异摄动系统模型, 概括了混杂奇异摄动系统的分析方法, 总结了混杂奇异摄动系统分析与综合的研究现状及其应用领域, 并对该研究领域未来的研究方向进行了展望.

关键词: 奇异摄动系统；混杂特征；分析与综合

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A

Survey on hybrid singularly perturbed systems

WANG Yan-wu[†], *YANG Wu*

(1. School of Automation，Huazhong University of Science and Technology，Wuhan 430074, China；2. Key Laboratory of Image Processing and Intelligent Control，Ministry of Education，Huazhong University of Science and Technology，Wuhan 430074，China)

Abstract: Hybrid singularly perturbed theory and its application are research hotspots in recent years. In this paper, a general hybrid singularly perturbed system model is introduced. Some analysis methods for hybrid singularly perturbed system are reviewed. The developments on both the analyzing and synthesizing of the hybrid singularly perturbed system are summarized. The applications of the system theory are also included. Finally, the future directions in this field are prospected.

Keywords: singularly perturbed system；hybrid feature；analysis and synthesis

0 引 言

混杂系统(HS)是一类由连续子系统和离散子系统相互作用而构成的动态系统[1], 而混杂奇异摄动系统(HSPS)则是一类具有快变和慢变动力学的混杂系统. 在多时间尺度特征和混杂特征的共同影响下, HSPS常常呈现出复杂的动态演化行为.

HSPS研究具有广泛的工程应用背景. 例如, 航空航天、电力、化学和机械等工程领域中大量研究对象具有显著的多时间尺度特性[2], 而且受系统自身的多进程、多工况等因素, 以及外部复杂环境因素的影响, 上述系统在实际运行过程中会产生状态瞬变、模态切换等现象. 特别是随着计算机、传感器和通信等技术的蓬勃发展与广泛应用, 系统在演化中还将涉及逻辑运算、符号操作与监督决策等离散事件行为. 综上所述, 采用HSPS建模理论来描述上述工程问题是十分恰当和必要的.

HSPS研究同样具有重要的理论意义. 一方面, 直接将常规HS的分析与设计方法应用于HSPS会导致数值病态问题[2]; 另一方面, 混杂特征的存在使得将现有的奇异摄动系统结果推广到HSPS是非平凡的. 因此, HSPS理论研究是一项富有挑战性的研究课题, 并已成为当前控制领域的研究前沿和热点之一.

本文首先介绍一般化的HSPS模型, 然后总结其分析方法和研究现状. 由于缺乏能控性和能观性的相关研究报道, 且关于离散时间HSPS[3-8]的研究工作较少, 本文着重讨论连续时间HSPS稳定性、综合设计与应用3个方面的研究成果, 并展望未来可能的研究方向.

1 HSPS模型

连续时间HSPS的动力学模型描述如下[9-11]:

收稿日期: 2017-10-27；**修回日期:** 2017-12-13.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61773172, 61572210, 51537003)；湖北省自然科学基金重点项目(2017CFA035).

作者简介: 王燕舞(1976−), 女, 教授, 博士生导师, 从事混杂系统及其应用等研究；杨武(1989−), 男, 博士生, 从事奇异摄动系统的研究.

[†]通讯作者. E-mail: wangyw@hust.edu.cn

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,z,\varepsilon),(x,z)\in C\times\Psi;\\ \varepsilon\dot{z}=g(x,z,\varepsilon),(x,z)\in C\times\Psi;\end{cases}\tag{1}$$

$$(x,z)^{+}\in G(x,z),(x,z)\in D\times\Psi.\tag{2}$$

其中: $x\in\boldsymbol{R}^n$ 和 $z\in\boldsymbol{R}^m$ 分别表示模型(1)和(2)中慢变子状态和快变子状态; $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$ 表示奇异摄动参数,用于衡量快变动力学与慢变动力学的分离程度; 闭集 $C\subseteq\boldsymbol{R}^n, D\subseteq\boldsymbol{R}^n$; 紧集 $\Psi\subseteq\boldsymbol{R}^m$; 非线性函数 $f: C\times\Psi\times\boldsymbol{R}_{\geqslant 0}\mapsto\boldsymbol{R}^n, g: C\times\Psi\times\boldsymbol{R}_{\geqslant 0}\mapsto\boldsymbol{R}^m$, 集值函数 $G(\cdot)$ 是外半连续、局部有界且非空的.

注1 方程(1)和(2)分别用于刻画连续时间动态部分和离散事件动态部分,而所有可能发生的事件由集合 $D\times\Psi$ 表示.

注2 HSPS模型(1)和(2)具有一般性: 1)脉冲奇异摄动系统、切换奇异摄动系统和马尔科夫跳变奇异摄动系统均可由模型(1)和(2)描述; 2)文献[12-17]中讨论的仅含快变子系统且具有混杂特征的一类HSPS也是模型(1)和(2)的特例; 3)基于采样控制、网络化控制等混杂控制策略的奇异摄动系统综合模型同样可以表示为模型(1)和(2).

注3 若方程 $0=g(x,z,0)$ 存在 $k\geqslant 1$ 个孤立解,则称模型(1)和(2)是标准型HSPS,否则称其为非标准型HSPS.

2 HSPS分析方法

从控制理论角度而言,经典的奇异摄动系统分析方法包括奇异摄动分解方法、奇异摄动参数依赖的Lyapunov函数方法和基于状态变换的Lyapunov函数方法. 此外,学者们也对奇异摄动分解方法进行了一些改进. 对于HSPS,则需结合系统的混杂特征对上述方法进行调整. 下面分别讨论这些方法.

2.1 奇异摄动分解方法

奇异摄动分解方法[18]的思想是先将含有奇异摄动参数的高阶系统转化为不同时间尺度下独立于奇异摄动参数的降阶子系统(分别为降阶系统和边界层系统),进而基于降阶子系统的相关结果导出原系统相应问题的解.

基于奇异摄动分解方法,综合脉冲系统理论相关知识,文献[19-22]建立了脉冲奇异摄动系统的稳定性充分条件;综合运用奇异摄动分解方法和切换系统分析方法,文献[23]分别建立了任意切换规则下连续时间切换奇异摄动系统的稳定性充分准则;此外,借助于随机系统理论和奇异摄动分解方法,文献[24-25]研究了马尔科夫跳变奇异摄动系统的均方指数稳定性问题;结合混杂系统分析方法,文献[26-27]进一步获得了连续时间HSPS模型(1)和(2)的实用稳定性结论.

值得注意的是,采用奇异摄动分解方法分析HSPS有一个基本前提: 研究对象需是标准型奇异摄动系统. 事实上,含有时变时滞等因素的奇异摄动系统往往是非标准型的. 此时,奇异摄动分解方法便不再适用.

2.2 奇异摄动参数依赖的Lyapunov函数方法

奇异摄动参数依赖的Lyapunov函数方法由以色列学者Fridman[28]提出. 该方法不需对原系统作快慢分解处理,只需构造合适的奇异摄动参数依赖的Lyapunov函数或泛函. 该方法同时适用于标准型和非标准型奇异摄动系统.

两类常见的奇异摄动参数依赖的Lyapunov函数可描述如下:

$$V_1=\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}P_1 & \varepsilon P_3\\ \varepsilon P_3^{\mathrm{T}} & \varepsilon P_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix}.\tag{3}$$

其中: 矩阵 $P_1>0, P_2>0$.

$$V_2=\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}P_1+\varepsilon P_4 & \varepsilon P_3\\ \varepsilon P_3^{\mathrm{T}} & \varepsilon P_2+\varepsilon^2 P_5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix}.\tag{4}$$

其中: 矩阵 $P_1>0, P_2>0, P_4=P_4^{\mathrm{T}}, P_5=P_5^{\mathrm{T}}$.

注4 函数 V_1 中的矩阵 P_1 和 P_2 分别用于处理慢变和快变动力学部分,矩阵 P_3 用于处理慢变和快变动力学的交互部分. 函数 V_1 是 V_2 在条件 $P_4=0$ 和 $P_5=0$ 下的特例. 矩阵 P_4 和 P_5 可分别揭示更多慢变和快变动力学信息. 因此,基于函数 V_2 所导出的结果通常具有较小保守性.

注5 在函数 V_1 和 V_2 的基础上,可通过增加相应的积分项构造新的奇异摄动参数依赖的Lyapunov泛函,用于分析含时滞项的奇异摄动系统和采样控制下的奇异摄动系统. 此外,针对切换奇异摄动系统和马尔科夫跳变奇异摄动系统,则可将函数 V_1 或 V_2 推广至模态依赖的形式.

基于函数 V_1, 文献[29]研究了一类奇异摄动系统的鲁棒采样控制问题;在此基础上,文献[30]进一步改进了函数 V_1, 获得了保守性更小的鲁棒镇定判别条件;通过采用或推广函数 V_1, 文献[31-33]将研究对象分别拓展至非线性奇异摄动系统、切换奇异摄动系统和马尔科夫跳变奇异摄动系统.

基于函数 V_2, 针对奇异摄动系统执行机构存在饱和的情形,文献[34]给出了该系统采样控制控制器存在的条件. 此外,函数 V_2 的推广形式还被用于切换奇异摄动系统[35]和马尔科夫跳变奇异摄动系统[36].

值得注意的是,由于缺乏系统性的Lyapunov函数或泛函构造方法,采用奇异摄动参数依赖的

Lyapunov函数方法分析HSPS只能依靠研究经验,从而给HSPS的分析带来了不便.

2.3 基于状态变换的Lyapunov函数方法

基于状态变换的Lyapunov函数方法[37]的关键在于引入恰当的状态变换. 考虑如下所示的线性时不变奇异摄动系统:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \varepsilon\dot{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix}.$$

其中: $x\in \boldsymbol{R}^n$ 和 $z\in \boldsymbol{R}^m$ 分别表示系统的慢变子状态和快变子状态; $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$ 表示奇异摄动参数; $A_{ij}(i,j=1,2)$ 表示维数合适的系统矩阵,这里 A_{22} 是非奇异矩阵.

针对上述系统,两类常见的状态变换分别如下:

$$\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_n & 0\\ -L & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\zeta\\ \eta\end{bmatrix},\tag{5}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_n & \varepsilon H\\ -L & I_m-\varepsilon LH\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\zeta\\ \eta\end{bmatrix}.\tag{6}$$

其中: ζ 和 η 分别表示状态变换后系统的慢变和快变子状态; L 和 H 分别满足矩阵方程

$$A_{21}-A_{22}L+\varepsilon LA_{11}-\varepsilon LA_{11}L=0,$$

$$\varepsilon(A_{11}-A_{12}L)H-H(A_{22}+\varepsilon LA_{12})+A_{12}=0.$$

注6 状态变换(5)可解耦出奇异摄动系统中的快变动力学部分,而状态变换(6)可解耦出奇异摄动系统中的慢变和快变动力学部分. 通常, L 和 H 可分别取值为 $A_{22}^{-1}A_{21}$ 和 $A_{12}A_{22}^{-1}$.

注7 对于切换奇异摄动系统和马尔科夫跳变奇异摄动系统,可将状态变换(5)或(6)推广至模态依赖的形式.

基于状态变换(5),文献[38]使用基于状态变换的Lyapunov函数方法建立了一类含未知非线性脉冲奇异摄动系统的指数稳定性条件. 近年来,针对系统中同时存在脉冲效应和切换现象的情形,文献[39-41]使用模态依赖的状态变换(5),综合基于状态变换的Lyapunov函数方法和最小驻留时间方法导出了该系统的稳定性判别准则.

基于状态变换(6),文献[42-44]使用基于状态变换的Lyapunov函数方法分析了事件驱动机制采样控制下奇异摄动系统的稳定性问题;文献[45-49]综合网络化控制系统分析方法和基于状态变换的Lyapunov函数方法,讨论了时滞和带宽约束等因素对奇异摄动系统的影响.

值得注意的是,虽然基于状态变换的Lyapunov函数方法适用于标准型线性奇异摄动系统和具有既定结构的非线性奇异摄动系统(通常由线性和非线性两部分构成,其中线性部分对应于标准型线性奇异摄动系统,非线性部分不做限制),但无法适用于一般化的HSPS. 此外,在运用该方法的过程中,含奇异摄动参数的相关项往往被处理为扰动项而未被充分使用,故所得结论具有一定的保守性.

2.4 奇异摄动分解方法的改进

近年来,一些学者对奇异摄动分解方法做了改进,提出了一些新的分析方法,例如基于快慢分解的平均方法和基于快慢分解的Lyapunov算子方法.

文献[9-11]提出了基于快慢分解的平均方法,其思想是先导出高阶系统在快变时间尺度下的边界层系统,再结合平均方法导出平均系统,基于平均系统和边界层系统的相关结果进而导出原系统相应问题的解. 综合运用基于快慢分解的平均方法和混杂系统分析方法,文献[9-11]建立了连续时间一般化的HSPS实用稳定性充分条件,并给出了原奇异摄动系统与平均系统两者解的逼近程度. 文献[50]研究了极值搜索控制器作用下混杂系统的实用稳定分析问题.

文献[25]提出了一类基于快慢分解的Lyapunov算子方法,研究了状态和控制变量同时含有噪声时马尔科夫跳变奇异摄动系统的均方指数稳定性. 该方法对标准型和非标准型奇异摄动系统均适用.

3 HSPS的稳定性

不同于常规系统的稳定性分析,奇异摄动系统的稳定性问题通常需要考虑奇异摄动参数的影响,一般要求所建立的稳定性条件对任意 $\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon})$ 或 $\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]$ 都成立,其中 $\bar{\varepsilon}$ 是正标量. $\bar{\varepsilon}$ 可作为衡量奇异摄动系统的稳定性指标, $\bar{\varepsilon}$ 的大小可用于检验分析方法的优劣.

下面先介绍脉冲奇异摄动系统、切换奇异摄动系统和马氏跳奇异摄动系统的稳定性成果,最后总结一般化HSPS的稳定性研究成果.

3.1 脉冲奇异摄动系统

脉冲效应可用来刻画系统在运行过程中的状态瞬变行为,如电力系统中频率或电压的瞬变、机械系统中的碰撞行为等. 根据脉冲作用对稳定性的影响,脉冲可分为起扰动作用的脉冲和起镇定作用的脉冲.

针对脉冲起扰动作用的情形,文献[19-20]利用奇异摄动分解方法和最小脉冲间隔下界方法,最早将经典奇异摄动系统稳定性结论推广到脉冲奇异摄动系统中;文献[21]进一步结合随机系统和时滞系统分析方法,将文献[19-20]的结论推广到系统中含随机噪声和时变时滞的情形. 值得注意的是,文献[19-21]

建立的稳定性结论仅对充分小的奇异摄动参数成立.

针对脉冲起镇定作用的情形,文献[38]综合采用基于状态变换的Lyapunov函数方法和脉冲间隔上下界方法,建立了含未知非线性项脉冲奇异摄动系统的全局指数稳定的充分条件;文献[22]结合时滞系统理论、奇异摄动分解方法和脉冲间隔上下界方法,将文献[38]的结论进一步拓展到脉冲项有时滞(脉冲时滞)的情形. 文献[22, 38]的结果均显式地给出了$\bar{\varepsilon}$的表达式.

注8 文献[19-21]要求降阶系统的连续部分是渐近稳定的,而文献[22, 38]对降阶系统中连续部分的稳定性不做限制. 此外,文献[22, 38]的稳定性结论同样适用于脉冲起扰动作用的情形.

上述脉冲奇异摄动系统所考虑的脉冲是时间依赖的. 对于脉冲依赖于系统状态的情形,尚缺乏相关的研究成果. 此外,对于脉冲奇异摄动系统的综合和优化问题,目前也未见有相应的研究报道.

3.2 切换奇异摄动系统

切换奇异摄动系统具有广泛的工程背景. 热轧带钢轧机的关键制造环节[51]以及DC-DC转换器[52]等都可建模为切换奇异摄动系统模型. 切换奇异摄动系统中各个子系统是否激活由切换规则决定. 通常而言,切换规则可分为任意切换和受限切换(包括依赖时间的切换和依赖状态的切换).

在任意切换规则下,文献[23]采用奇异摄动分解方法和公共Lyapunov 函数方法,以LMI形式导出了切换奇异摄动系统的渐近稳定性条件,其结果表明降阶子系统的渐近稳定性无法保证原系统在奇异摄动参数趋于零时维持渐近稳定性. 针对一类切换奇异摄动系统中执行机构存在饱和约束的情形,文献[53]进一步分析了该系统在状态反馈控制下闭环系统的渐近稳定性.

在依赖时间的切换规则下,文献[32]借助于平均驻留时间方法和函数(3),分别研究了切换奇异摄动系统中子系统均为Hurwitz稳定和部分子系统是不稳定情形的指数稳定性问题. 针对系统中同时存在稳定和不稳定子系统,且含有时滞的情形,文献[54]结合奇异摄动分解方法和时滞系统比较原理, 建立了时滞切换奇异摄动系统的指数稳定性充分判据.

在依赖状态的切换规则下,文献[55]采用奇异摄动分解方法研究了一类切换奇异摄动系统的鲁棒稳定性,建立了LMI形式的鲁棒稳定性判定准则,并将奇异摄动参数上界的估计问题转化为凸优化问题求解.

此外, 文献 [56-58] 基于“最坏轨迹”(Worst trajectory) 概念研究了平面切换奇异摄动系统的二次稳定性、全局一致渐近稳定性、稳定性和无界性,但是所采用的分析方法不适用于高维奇异摄动系统. 基于奇异摄动分解方法,文献[59]进一步将文献[54]的研究工作推广到奇异摄动系统同时存在脉冲效应和切换现象的情形.

注9 文献[23, 32, 54]只给出了$\bar{\varepsilon}$的存在性条件,未能给出$\bar{\varepsilon}$的估计式,文献[53, 55]则通过求解相应的凸优化问题得到了$\bar{\varepsilon}$.

值得注意的是,对于切换奇异摄动系统中子系统均是不稳定的情形,如何设计合理的切换规则以确保整个系统的稳定性仍是一个开放性问题.

3.3 马尔科夫跳变奇异摄动系统

马尔科夫跳变奇异摄动系统中各子系统的激活过程通常描述为有限状态马氏过程,例如工业反应器[25,60]、直流电机[61]和隧道二极管电路[62]等. 通常,马尔科夫跳变奇异摄动系统的转移概率矩阵可分为定常转移概率矩阵和时变转移概率矩阵.

在定常转移概率矩阵的情形下,文献[24-25, 63]研究了马尔科夫跳变奇异摄动系统的稳定性问题. 其中,文献[24]结合随机系统分析方法和奇异摄动分解方法,建立了随机噪声作用下系统均方指数稳定性充分条件;文献[25]则运用基于快慢分解的Lyapunov算子方法建立了随机噪声影响下系统的均方指数稳定性判定准则;此外,文献[63]采用模态依赖的函数(3)导出了马尔科夫跳变奇异摄动系统的随机稳定性条件.

时变转移概率矩阵又可分为转移概率矩阵已知和转移概率矩阵未知两类. 针对时变转移概率矩阵已知的情形,文献[64-65]利用奇异摄动分解方法分别建立了降阶子系统和原系统的随机稳定性充分条件. 该研究结果表明:若边界层系统是渐近稳定的,则原系统与降阶系统的稳定性保持一致. 针对转移概率矩阵存在有界未知扰动的情形,文献[66]基于模态依赖的函数(3),讨论了鲁棒控制下马尔科夫跳变奇异摄动系统的随机渐近稳定性问题;文献[36]借助于函数(4),研究了转移概率已知、存在有界不确定性、部分未知以及部分可观测情形下闭环系统的稳定性问题.

3.4 一般化的HSPS

一般化的HSPS可由模型(1)和(2)描述. 一般化的HSPS研究有助于解决移动机器人的控制问题[26]和Boost变换器的脉冲宽度调制控制问题[67]. 目前,对一般化HSPS的研究工作集中在稳定性分析方面,主要结论如下.

基于奇异摄动分解方法,文献[26-27]建立了一般化的HSPS半全局渐近实用稳定性结论. 该研究表明:若边界层系统和降阶系统均是集合全局渐近稳定的,则对于任意充分小的ε,原系统也是集合半全局渐近实用稳定的.

基于快慢分解的平均方法,文献[9-11]改进了文献[26-27]的结论,所得结论不要求边界层系统关于集合$\varPsi$是不变的;文献[50]只需假设降阶系统是连续且半全局实用渐近稳定的,进一步弱化了对降阶系统的约束.

上述研究工作仅给出了$\bar{\varepsilon}$的存在性条件,如何获得最优的$\bar{\varepsilon}$仍缺乏相关的研究报道. 此外,以上建立的稳定性结论均为半全局的,如何建立关于一般化HSPS的全局稳定性结果仍是一项极具挑战的研究.

4 HSPS的综合

出于不同需求,实际应用中可能会对HSPS提出不同的要求,例如稳定性、对未知或不确定性的容忍能力(即鲁棒性)、控制代价最优、跟踪或同步、状态估计等. 当HSPS自身无法满足预期的要求时,需要设计适当的控制器,即HSPS的综合. 下面从不同的控制目标或需求出发,介绍HSPS镇定控制、鲁棒控制、线性二次型调节、同步控制和状态估计5个方面的研究工作.

4.1 镇定控制器设计

HSPS的镇定控制器设计目标是要确保相应的闭环系统满足预期的稳定性要求. 根据是否含有奇异摄动参数,可将镇定控制器分为ε无关和ε相关的两类.

4.1.1 ε无关的镇定控制器

文献[23, 53, 68]综合奇异摄动分解方法和切换系统分析方法,为不同类型切换奇异摄动系统设计了ε无关的镇定控制器;文献[25, 64-65]结合随机系统理论给出了马尔科夫跳变奇异摄动系统状态反馈控制器存在的充分条件;借助于采样控制策略,文献[34, 42-44, 69-70]设计了采样控制器,实现了对奇异摄动系统的镇定控制;在基于模型的网络化控制框架下,文献[45-49]研究了奇异摄动系统的镇定控制问题.

4.1.2 ε相关的镇定控制器

文献[32]利用平均驻留时间方法和奇异摄动参数依赖的Lyapunov函数方法,设计了一类ε相关的镇定控制器,实现了对子系统均为Hurwitz稳定和部分子系统是不稳定两种情形下切换奇异摄动系统的镇定控制;文献[35]结合驻留时间方法和模态依赖的函数(4),设计了一类ε相关的状态反馈控制器,实现了执行机构存在饱和约束下切换奇异摄动系统的镇定控制,并估计了ε依赖的吸引域的大小. 设计上述ε相关的镇定控制器要求ε是已知的. 当ε未知时,上述ε相关的镇定控制器可退化为ε无关的镇定控制器.

上述研究工作仅讨论了几类特殊HSPS的镇定控制器设计问题,怎样设计一般化HSPS的ε无关或相关的镇定控制器仍缺乏相关的研究报道.

4.2 鲁棒控制器设计

HSPS的鲁棒控制器设计目标是要确保相应的闭环系统既满足预期的稳定性要求,又能容忍一定的不确定性或未知.

文献[29]采用函数(3),研究了一类含不确定项奇异摄动系统的H_∞采样控制器设计问题;在此基础上,文献[30]借助于脉冲奇异摄动系统的分析方法,推广并改进了文献[29]的相关结论;文献[31]则结合T-S模糊处理技术,将文献[29]的结论推广到系统中含有未知非线性的情形.

文献[71]给出了一类含不确定项切换奇异摄动系统的H_∞状态反馈控制器存在的充分条件;文献[72]综合滑模控制理论和函数(3),设计了一类自适应滑模控制律,实现了对含有未知非线性项的马尔科夫跳变奇异摄动系统的鲁棒镇定控制;文献[73]则设计了一类模态依赖的复合控制器去实现马尔科夫跳变奇异摄动系统的鲁棒镇定控制.

同样地,上述结论仅给出了$\bar{\varepsilon}$的存在性条件,未能给出$\bar{\varepsilon}$的估计式. 特别地,缺乏设计具有无穷大奇异摄动参数上界的鲁棒镇定控制器的研究工作.

4.3 线性二次型调节器设计

HSPS的线性二次型调节器设计目标是要确保相应的闭环系统既满足预期的稳定性要求,又能使得既定的代价函数(通常为系统状态和控制变量的二次型时间积分)达到最小.

文献[74]综合利用奇异摄动分解方法和采样控制方法,研究了一类线性时不变奇异摄动系统的线性二次型调节器的设计问题;文献[75]提出了一类迭代并行算法用于求解马尔科夫跳变奇异摄动系统的线性二次型调节器的增益矩阵,所设计的线性二次型调节器可使代价函数达到次最优;文献[76]则进一步将文献[75]的工作推广到系统中状态变量和控制变量同时含有随机噪声的情形. 针对多参数马尔科夫跳变奇异摄动系统中状态含有随机噪声的情形,文献[77]结合博弈论和奇异摄动理论,提出了二次型调节器增益矩阵计算的迭代算法. 此后,文献[78]进一步将文献[77]的工作推广到系统中状态变量和控制变

量同时含有随机噪声的情形.

值得注意的是, 文献[74-78]所设计的线性二次型调节器均是无限时间调节器, 对HSPS的有限时间二次型调节器的研究工作尚未见有关报道.

4.4 同步控制器设计

同步是复杂动态网络的典型动力学特征之一. 近年来, 针对一类节点由奇异摄动系统描述的复杂动态网络(即奇异摄动复杂网络), 文献[79-82]建立了该网络不同形式的同步判定准则.

当网络自身无法实现同步时, 可设计合适的同步控制器来实现网络的同步. 文献[83]综合利用图论方法和奇异摄动参数依赖的Lyapunov函数方法, 设计了两类牵制控制器, 实现了固定和自适应网络拓扑下, 一类耦合多时间尺度神经网络的簇同步. 针对一类节点为非线性奇异摄动系统的复杂动态网络, 文献[84-85]基于主从同步和奇异摄动参数依赖的Lyapunov函数方法的思想, 研究了网络间的主从同步问题. 其中, 文献[84]设计了一类时间驱动的采样同步控制器, 文献[85]则设计了一类事件驱动的采样同步控制器. 文献[86]综合利用图论方法和奇异摄动分解方法, 设计了分布式控制器, 以实现无向非负图下线性奇异摄动网络的一致性; 文献[87]则将文献[86]的研究工作推广到有向二分图的情形; 文献[88-89]进一步将文献[87]的研究推广到节点含有时滞以及时变网络拓扑的情形.

上述设计的同步控制器只能确保奇异摄动复杂网络中节点状态实现渐近同步, 怎样设计合适的同步控制器以实现奇异摄动复杂网络的有限时间同步是一个值得深入研究的课题.

4.5 状态估计器设计

状态估计器的设计目的在于通过量测数据去估计动态系统内部状态.

文献[90]给出了一类连续时间奇异摄动系统的离散时间观测器存在的充分条件; 文献[91]运用多速率采样控制策略, 研究了存在测量时滞时奇异摄动系统的观测器设计问题. 针对通信网络存在数据丢包的情形, 文献[92]提出了一类奇异摄动系统的H_∞滤波的设计方法; 文献[84]研究了一类节点具有多时间尺度特征的复杂动态网络的状态估计问题.

在上述状态估计器研究工作中, 研究对象本身不具备混杂特征. 不难发现, 关于HSPS状态估计器的设计问题仍缺乏系统性的研究.

5 HSPS的应用研究

HSPS研究结果在实际工程中有着重要的应用价值, 既可以解决受控对象本身为HSPS的分析和控制问题, 亦可采用混杂奇异摄动的控制思想解决受控对象是一般系统的控制问题.

文献[26]将HSPS的相关结论应用于分析移动机器人的控制问题, 其控制目标是设计合理的控制器, 使移动机器人被控制到指定的位置和方向. 文献[26]所研究的移动机器人本身建模为一般系统, 并不是奇异摄动系统. 文中指出, 采用已有的连续状态反馈控制方法无法实现该系统的控制任务. 文献[26]设计了一类混杂奇异摄动控制器, 该控制器动力学是快变的, 而移动机器人动力学是慢变的. 因此, 受控的移动机器人模型由HSPS描述. 应用HSPS的相关结论, 文献[26]给出了该控制器的设计方案.

文献[61]将HSPS的相关结论应用于直流串励电动机(Series dc motor)的控制问题. 直流串励电动机中转子角速度动力学通常是慢变的, 而电枢电流动力学是快变的. 考虑到转子转动惯量存在轻惯量、中惯量和大惯量3种形式, 文献[61]将直流串励电动机建模成马尔科夫跳变奇异摄动系统, 采用奇异摄动参数依赖的Lyapunov函数方法和T-S模糊处理技术分别设计了该电机的模糊状态控制器和模糊动态输出状态控制器, 实现了对该电机的鲁棒镇定控制需求.

注10　在上述移动机器人的控制问题中, 研究对象本身不具有多时间尺度特征和混杂特征, 但在混杂奇异摄动控制器下, 受控移动机器人模型可以描述为HSPS. 而在上述直流串励电动机的控制问题中, 受控对象本身就可建模成HSPS.

为了更加直观地体现HSPS研究在实际工程领域的应用情况, 下面以PFC变换器为例, 扼要地介绍HSPS研究结果如何应用于分析PFC变换器.

通常而言, PFC变换器中电容电压是慢变的, 而电容电流是快变的. PFC变换器可建模为如下切换系统[52]:

$$[\dot{v}_C\quad \dot{i}_L]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{C(R+R_C)} & \dfrac{h_2R}{C(R+R_C)} \\ \dfrac{-h_2R}{L(R+R_C)} & \dfrac{-R_L-h_2(R\|R_C)}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{v_{in}}{L} \end{bmatrix}.$$

对上述模型做规范化处理, 可将上述模型表示为如下标准形式:

$$\frac{d}{\mathrm{d}\bar{t}}\begin{bmatrix} \bar{v}_C \\ \varepsilon\bar{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & h_2 \\ -h_2 & \delta_0+\dfrac{h_2R_C}{R} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{v}_C \\ \bar{i}_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ R+R_C \end{bmatrix} w.$$

其中: h_2表示切换函数, 其他符号定义可参考文献[52]. 显然, 上述PFC变换器模型是一个HSPS. 文献

[52]采用基于快慢分解的平均方法,获得了该PFC变换器动力学演化的相关结果.

HSPS的相关结论还被广泛应用于下列领域:工业反应器[25,60]、热轧带钢轧机[51]、隧道二极管电路[62]和Boost变换器[67]等,在此不再一一介绍.

6 多参数HSPS

以上研究多集中于讨论双时间尺度HSPS的分析、综合和应用方面.在控制理论和实际工程应用中,还将会遇到具有多时间尺度的混杂奇异摄动系统(多参数HSPS).截止目前,关于多参数HSPS的分析与综合研究仍处于初步探索阶段,相关研究报道不多[77-78].文献[77]研究了如下含有随机噪声的马尔科夫跳变多参数奇异摄动系统:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x(t)=&\Big[A_\varepsilon(r_t)x(t)+\sum_{m=1}^{N}B_\varepsilon(r_t)u_m(t)\Big]\mathrm{d}t+\\&C_\varepsilon(r_t)x(t)\mathrm{d}w(t).\end{aligned}\tag{7}$$

其中:$\{r_t,t\geqslant 0\}$表示取值于有限状态集的马尔科夫过程,$x(t)$、$u_m(t)$和$w(t)$分别表示状态、控制输入和随机噪声.矩阵$A_\varepsilon(r_t)$、$B_\varepsilon(r_t)$和$C_\varepsilon(r_t)$具有如下结构:

$$A_\varepsilon(r_t)=\begin{bmatrix}A_{11}(r_t) & A_{12}(r_t)\\ \Pi_\varepsilon^{-1}A_{21}(r_t) & \Pi_\varepsilon^{-1}A_{22}(r_t)\end{bmatrix},$$

$$B_\varepsilon(r_t)=\begin{bmatrix}B_1(r_t)\\ \Pi_\varepsilon^{-1}B_2(r_t)\end{bmatrix},$$

$$C_\varepsilon(r_t)=\begin{bmatrix}C_{11}(r_t) & \mu C_{12}(r_t)\\ \Pi_\varepsilon^{-1}\hat{\varepsilon}^\delta C_{21}(r_t) & \Pi_\varepsilon^{-1}\hat{\varepsilon}^\delta C_{22}(r_t)\end{bmatrix},$$

$$\Pi_\varepsilon=\mathrm{diag}\{I_{n_0},\varepsilon_1 I_{n_1},\cdots,\varepsilon_N I_{n_N}\}.$$

其中:$\varepsilon_k>0\,(k=1,2,\cdots,N)$是小参数,其他参数定义详见文献[77].特别地,假设小参数满足关系式

$$0<\check{k}_{ij}\leqslant\varepsilon_j/\varepsilon_i\leqslant\hat{k}_{ij}<\infty.\tag{8}$$

其中$\check{k}_{ij}$和$\hat{k}_{ij}$为已知正标量,用于刻画小参数间的大小关系,即各个时间尺度分离的程度.显然,由于小参数$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_N$的存在,系统(7)中存在$N+1$个时间尺度.

针对系统(7),运用奇异摄动分解方法和博弈论相关知识,文献[77]研究了该系统的二次型调节器设计问题,提出了调节器增益矩阵计算的迭代算法.文献[78]进一步将文献[77]的工作推广到系统中状态变量和控制变量同时含有随机噪声的情形.

7 结论与展望

HSPS的研究吸引了众多科研人员的关注,取得了较为丰富的研究成果.受篇幅和作者能力的限制,未能一一介绍.相对于常规系统而言,混杂特性和多时间尺度特征的共同作用给HSPS的分析与综合都带来了巨大的挑战,下列问题仍然值得进一步的深入研究,主要包括:

1) HSPS的能控性和能观性等研究.能控性和能观性是动态系统的两个基本结构特性.现有的HSPS研究工作多集中在稳定性分析,对HSPS的能控性和能观性缺乏了解.此外,已有的一般化HSPS稳定性结论均为半全局的,尚未见有全局稳定性的研究报道.最后,除文献[33]外,HSPS的无源性、耗散性等性能分析问题同样缺乏研究.

2) 多参数HSPS的分析与综合.除文献[77-78]外,本文介绍的其余HSPS模型仅具有双时间尺度特征.事实上,具有三时间以及更多时间尺度特征的动态系统(即多参数奇异摄动系统)同样广泛存在于实际工程中.如何将具有双时间尺度特征的HSPS分析与综合结论推广到多参数HSPS仍有待探索.

3) 新的HSPS分析方法的探索.奇异摄动分解方法的适用对象仅局限于标准型奇异摄动系统.基于状态变换的Lyapunov函数方法不适用于一般化的非线性HSPS.基于快慢分解的平均方法所建立的稳定性结论仅仅是半全局的.虽然奇异摄动参数依赖的Lyapunov函数方法的适用对象更广,但缺乏系统性的Lyapunov函数或泛函构造方法.因此,发展能够同时适用于标准型和非标准型HSPS的分析方法可作为今后研究工作的重点.此外,现有的大量研究工作仅给出了奇异摄动系统参数上界的存在性条件,未能给出其具体表达式或求解算法,提出新的分析方法或算法,以求解更优的ε仍是一个重要的研究课题.

参考文献(References)

[1] Goebel R, Sanfelice R G, Teel A R. Hybrid dynamical systems[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2009, 29(2): 28-93.

[2] Kokotović P, Khalil H K, O'reilly J. Singular perturbation methods in control: Analysis and design[M]. Philadephia: SIAM, 1999.

[3] Malloci I, Daafouz J, Iung C. Stability and stabilization of two time scale switched systems in discrete time[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(6): 1434-1438.

[4] 陈旋, 陈金香. 离散时间切换双时标系统的建模与状态反馈控制[J]. 新型工业化, 2016, 6(6): 11-16.
(Chen X, Chen J X. Modeling and state feedback control of discrete-time singularly perturbed systems[J]. The J of New Industrialization, 2016, 6(6): 11-16.)

[5] 陈旋,陈金香.标准离散时间切换奇异摄动系统的H_∞控制[J]. 新型工业化, 2016, 6(9): 35-41.
(Chen X, Chen J X. H_∞ control for switched standard

discrete-time singularly perturbed systems[J]. The J of New Industrialization, 2016, 6(9): 35-41.)
[6] Wang G, Zhang Q, Sreeram V. H_∞ control for discrete-time singularly perturbed systems with two Markov processes[J]. J of the Franklin Institute, 2010, 347(5): 836-847.
[7] Litkouhi B, Khalil H. Multirate and composite control of two-time-scale discrete-time systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1985, 30(7): 645-651.
[8] Yuan Y, Wang Z, Guo L. Distributed quantized multi-modal H_∞ fusion filtering for two-time-scale systems[J]. Information Sciences, 2018, 432: 572-583.
[9] Wang W, Teel A R, Nešić D. Averaging tools for singularly perturbed hybrid systems[C]. Proc of the Australian Control Conf. Melbourne: IEEE, 2011: 88-93.
[10] Wang W, Teel A R, Nešić D. Analysis for a class of singularly perturbed hybrid systems via averaging[J]. Automatica, 2012, 48(6): 1057-1068.
[11] Wang W, Teel A R, Nešić D. Novel results in averaging analysis of singularly perturbed hybrid systems[C]. Proc of the 50th IEEE Conf on Decision and Control and European Control Conf. Orlando: IEEE, 2011: 8038-8043.
[12] Filar J A, Gaitsgory V, Haurie A B. Control of singularly perturbed hybrid stochastic systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(2): 179-190.
[13] Tsai C C, Haddad A H. Analysis of singularly perturbed stochastic hybrid systems[C]. Proc of the American Control Conf. Boston: IEEE, 1991: 1563-1568.
[14] Tsai C C, Haddad A H. Averaging, aggregation and optimal control of singularly perturbed stochastic hybrid systems[J]. Int J of Control, 1997, 68(1): 31-50.
[15] Hekimova M A, Bainov D D. Periodic solutions of singularly-perturbed systems of differential equations with impulse effect[J]. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 1985, 36(4): 520-537.
[16] Zhu W, Xu D, Yang C. Exponential stability of singularly perturbed impulsive delay differential equations[J]. J of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 328(2): 1161-1172.
[17] Li X, Shen J, Akca H, et al. LMI-based stability for singularly perturbed nonlinear impulsive differential systems with delays of small parameter[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 250: 798-804.
[18] Klimushchev A I, Krasovskii N N. Uniform asymptotic stability of systems of differential equations with a small parameter in the derivative terms[J]. J of Applied Mathematics and Mechanics, 1961, 25(4): 1011-1025.
[19] Simeonov P S, Bainov D D. Stability of the solutions of singularly perturbed systems with impulse effect[J]. J of Mathematical Analysis and Applications, 1988, 136(2): 575-588.
[20] Simeonov P S, Bainov D D. Exponential stability of the solutions of singularly perturbed systems with impulse effect[J]. J of Mathematical Analysis and Applications, 1990, 151(2): 462-487.
[21] Chen W H, Chen F, Lu X. Exponential stability of a class of singularly perturbed stochastic time-delay systems with impulse effect[J]. Nonlinear Analysis, 2010, 11(5): 3463-3478.
[22] Chen W H, Wei D, Lu X. Exponential stability of a class of nonlinear singularly perturbed systems with delayed impulses[J]. J of the Franklin Institute, 2013, 350(9): 2678-2709.
[23] Malloci I, Daafouz J, Iung C. Stabilization of continuous-time singularly perturbed switched systems[C]. Proc of the 48th IEEE Conf on Decision and Control. Shanghai: IEEE, 2009: 6371-6376.
[24] Socha L. Stability of singularly perturbed nonlinear stochastic hybrid systems[J]. Stochastic Analysis and Applications, 2016, 34(3): 365-388.
[25] Drăgan V, Mukaidani H. Exponential stability in mean square of a singularly perturbed linear stochastic system with state-multiplicative white-noise perturbations and Markovian switching[J]. IET Control Theory and Applications, 2016, 10(9): 1040-1051.
[26] Sanfelice R G, Teel A R. On singular perturbations due to fast actuators in hybrid control systems[J]. Automatica, 2011, 47(4): 692-701.
[27] Sanfelice R G, Teel A R, Goebel R, et al. On the robustness to measurement noise and unmodeled dynamics of stability in hybrid systems[C]. Proc of the American Control Conf. Minneapolis: IEEE, 2006: 4061-4066.
[28] Fridman E. Effects of small delays on stability of singularly perturbed systems[J]. Automatica, 2002, 38(5): 897-902.
[29] Fridman E. Robust sampled-data H_∞ control of linear singularly perturbed systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(3): 470-475.
[30] Chen W H, Wang Z, Wei D, et al. Robust sampled-data H_∞ control of uncertain singularly perturbed systems using time-dependent Lyapunov functionals[J]. Int J of Systems Science, 2015, 46(15): 2832-2852.
[31] 郭兴进, 牛艳霞, 卜春霞. 基于T-S模型的奇异摄动系统的采样鲁棒H_∞控制[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(21): 246-253.
(Guo X J, Niu Y X, Bu C X. Robust sampled-data H_∞ control of nonlinear singularly perturbed systems based on T-S fuzzy model[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2013, 43(21): 246-253.)
[32] Ma L, Cai C. Stability analysis and stabilization synthesis of singularly perturbed switched systems: An average dwell time approach[J]. Cogent Engineering, 2016, 3(1): 1276875.
[33] Wang Y, Wang Q, Zhou P, et al. Delay-dependent passivity and passification for uncertain singularly perturbed Markovian jump systems with time-varying delay[J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2012, 31(6): 2179-2194.
[34] Yan Y, Ma X, Yang C, et al. Sampled-data control for singularly perturbed systems with actuator saturation[C]. Proc of the American Control Conf. Seattle: IEEE, 2017:

5756-5761.

[35] Lian J, Wang X. Exponential stabilization of singularly perturbed switched systems subject to actuator saturation[J]. Information Sciences, 2015, 320: 235-243.

[36] Wang G, Huang C, Zhang Q, et al. Stabilisation bound of stochastic singularly perturbed systems with Markovian switching by noise control[J]. IET Control Theory and Applications, 2014, 8(5): 367-374.

[37] Chang K W. Singular perturbations of a general boundary value problem[J]. SIAM J on Mathematical Analysis, 1972, 3(3): 520-526.

[38] Chen W H, Yuan G, Zheng W X. Robust stability of singularly perturbed impulsive systems under nonlinear perturbation[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2013, 58(1): 168-174.

[39] Rejeb J B, Morărescu I C, Girard A, et al. Stability analysis of singularly perturbed switched and impulsive linear systems[C]. Proc of the 55th IEEE Conf on Decision and Control. Las Vegas: IEEE, 2016: 5521-5526.

[40] Rejeb J B, Morărescu I C, Girard A, et al. Design of $O(\varepsilon)$ dwell-time graph for stability of singularly perturbed hybrid linear systems[C]. Proc of the American Control Conf. Seattle: IEEE, 2017: 1193-1198.

[41] Rejeb J B, Morărescu I C, Girard A, et al. Stability analysis of a general class of singularly perturbed linear hybrid systems[J]. Automatica, 2018, 90: 98-108.

[42] Bhandari M, Fulwani D M, Gupta R. Event triggered control of two time scale system[C]. Proc of Indian Control Conf. Guwahati: IEEE, 2017: 309-314.

[43] Bhandari M, Fulwani D M, Gupta R. Event triggered composite control of two time scale system[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2017, DOI: 10.1109/TCSII.2017.2723161

[44] Bhandari M, Fulwani D M, Gupta R. Event triggered control of singularly perturbec linear system based on its slow and fast model[C]. Proc of IEEE Int Conf on Industrial Technology. Toronto: IEEE, 2017: 791-796.

[45] Wang G, Wang Z, Naidu D S. On model-based networked control of singularly perturbed systems[C]. Proc of the Chinese Control Conf. Kunming: IEEE, 2008: 53-57.

[46] Yu H, Wang Z, Zheng Y. On the model-based networked control for singularly perturbed systems[J]. J of Control Theory and Applications, 2008, 6(2): 153-162.

[47] Yu H, Zhang B. Stability of model-based networked control singularly perturbed systems with time-varying transmission times[C]. Proc of the Chinese Control and Decision Conf. Yinchuan: IEEE, 2016: 5722-5725.

[48] Yu H, Lu G, Zheng Y. On the model-based networked control for singularly perturbed systems with nonlinear uncertainties[J]. Systems & Control Letters, 2011, 60(9): 739-746.

[49] Wang Z, Wang G, Liu W. Stabilisation of two-time scale systems with a finite feedback data rate[J]. IET Control Theory and Applications, 2010, 4(11): 2603-2612.

[50] Kutadinata R J, Moase W H, Manzie C. Extremum-seeking in singularly perturbed hybrid systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2017, 62(6): 3014-3020.

[51] Malloci I, Daafouz J, Iung C, et al. Switched system modeling and robust steering control of the tail end phase in a hot strip mill[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2009, 3(3): 239-250.

[52] Kimball J W, Krein P T. Singular perturbation theory for DC-DC converters and application to PFC converters[J]. IEEE Trans on Power Electronics, 2008, 23(6): 2970-2981.

[53] Ma X, Wang Q, Zhou L, et al. Controller design and analysis for singularly perturbed switched systems with actuator saturation[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2016, 26(15): 3404-3420.

[54] Alwan M, Liu X, Ingalls B. Exponential stability of singularly perturbed switched systems with time delay[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2008, 2(3): 913-921.

[55] Deaecto G S, Daafouz J, Geromel J C. H_2 and H_∞ performance optimization of singularly perturbed switched systems[J]. SIAM J on Control and Optimization, 2012, 50(3): 1597-1615.

[56] El Hachemi F, Sigalotti M, Daafouz J. Stability of planar singularly perturbed switched systems[C]. Proc of the American Control Conf. San Francisco: IEEE, 2011: 1464-1469.

[57] El Hachemi F, Sigalotti M, Daafouz J. Characterization of stability transitions and practical stability of planar singularly perturbed linear switched systems[C]. Proc of the 50th IEEE Conf on Decision and Control and European Control Conf. Orlando: IEEE, 2011: 423-428.

[58] El Hachemi F, Sigalotti M, Daafouz J. Stability analysis of singularly perturbed switched linear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2012, 57(8): 2116-2121.

[59] Alwan M S, Liu X. Stability of singularly perturbed switched systems with time delay and impulsive effects[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71(9): 4297-4308.

[60] Shen S X, Xia Q, Rao M, et al. Near-optimum regulators for singularly perturbed systems with random parameters[C]. Proc of the 31st IEEE Conf on Decision and Control. Arizona: IEEE, 1992: 3056-3061.

[61] Nguang S K, Assawinchaichote W, Shi P. Robust H_∞ control design for fuzzy singularly perturbed systems with Markovian jumps: An LMI approach[J]. IET Control Theory and Applications, 2007, 1(4): 893-908.

[62] Assawinchaichote W, Nguang S K, Shi P. Robust H_∞ fuzzy filter design for uncertain nonlinear singularly perturbed systems with Markovian jumps: An LMI approach[J]. Information Sciences, 2007, 177(7): 1699-1714.

[63] Liu H P, Sun F C, Sun Z Q. H_∞ control for Markovian jump linear singularly perturbed systems[J]. IEE Proceedings-Control Theory and Applications, 2004, 151(5): 637-644.

[64] Tsai C C. Feedback control of singularly perturbed stochastic hybrid systems[C]. Proc of the American

Control Conf. Seattle: IEEE, 1995: 2478-2482.

[65] Tsai C C. Composite stabilization of singularly perturbed stochastic hybrid systems[J]. Int J of Control, 1998, 71(6): 1005-1020.

[66] Liu H, Sun F, Li C. Robust control of uncertain Markov jump singularly perturbed systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2005, 31(5): 779-781.

[67] Wang W, Teel A R, Nei D. Averaging in singularly perturbed hybrid systems with hybrid boundary layer systems[C]. Proc of the 51st IEEE Conf on Decision and Control. Maui: IEEE, 2012: 6855-6860.

[68] Alwan M S, Liu X, Sugati T G. Switched singularly perturbed systems with reliable controllers[C]. Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering. Switzerland: Springer, 2016: 379-388.

[69] Lennarston B. Multirate sampled-data control of two-time-scale systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1989, 34(6): 642-644.

[70] Abdelrahim M, Postoyan R, Daafouz J. Event-triggered control of nonlinear singularly perturbed systems based only on the slow dynamics[J]. Automatica, 2015, 52: 15-22.

[71] Chen X, Chen J. State feedback H_∞ control of switched linear singularly perturbed systems[C]. Proc of the Chinese Guidance, Navigation, and Control Conf. Nanjing: IEEE, 2016: 33-37.

[72] Wang Y, Zhou P, Wang Q, et al. Sliding mode control of singularly perturbed Markovian jump delayed systems with nonlinearity[J]. Int J of Adaptive Control and Signal Processing, 2013, 27(8): 718-728.

[73] Drăgan V, Shi P, Boukas E K. Control of singularly perturbed systems with Markovian jump parameters: An H_∞ approach[J]. Automatica, 1999, 35(8): 1369-1378.

[74] Kando H, Iwazumt T. Multirate digital control design of an optimal regulator via singular perturbation theory[J]. Int J of Control, 1986, 44(6): 1555-1578.

[75] Borno I, Gajic Z. Parallel algorithms for optimal control of weakly coupled and singularly perturbed jump linear systems[J]. Automatica, 1995, 31(7): 985-988.

[76] Drăgan V, Mukaidani H. Near optimal linear quadratic regulator for a singularly perturbed linear stochastic system with multiplicative white noise perturbations and Markovian jumping[C]. Proc of the 54th IEEE Conf on Decision and Control. Osaka: IEEE, 2015: 7838-7843.

[77] Mukaidani H, Yamamoto T. Nash strategy for multiparameter singularly perturbed Markov jump stochastic systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2012, 6(14): 2337-2345.

[78] Mukaidani H, Yamamoto T, Drăgan V. Nash strategy of multiparameter singularly perturbed markov jump stochastic systems with state- and control-dependent noise[C]. Proc of the American Control Conf. Montreal: IEEE, 2012: 1621-1626.

[79] Cai C, Wang Z, Xu J, et al. Decomposition approach to exponential synchronisation for a class of non-linear singularly perturbed complex networks[J]. IET Control Theory and Applications, 2014, 8(16): 1639-1647.

[80] Cai C, Wang Z, Xu J, et al. An integrated approach to global synchronization and state estimation for nonlinear singularly perturbed complex networks[J]. IEEE Trans on Cybern, 2015, 45(8): 1597-1609.

[81] Cai C, Xu J, Liu Y, et al. Synchronization for linear singularly perturbed complex networks with coupling delays[J]. Int J of General Systems, 2015, 44(2): 240-253.

[82] Zhai S, Yang X S. Bounded synchronisation of singularly perturbed complex network with an application to power systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2014, 8(1): 61-66.

[83] Yang W, Wang Y W, Shen Y, et al. Cluster synchronization of coupled delayed competitive neural networks with two time scales[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 90(4): 2767-2782.

[84] Rakkiyappan R, Sivaranjani K. Sampled-data synchronization and state estimation for nonlinear singularly perturbed complex networks with time-delays[J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 84(3): 1623-1636.

[85] Sivaranjani K, Rakkiyappan R, Cao J, et al. Synchronization of nonlinear singularly perturbed complex networks with uncertain inner coupling via event triggered control[J]. Applied Mathematics and Computation, 2017, 311: 283-299.

[86] Rejeb J B, Morărescu I C, Daafouz J. Synchronization in networks of linear singularly perturbed systems[C]. Proc of the American Control Conf. Boston: IEEE, 2016: 4293-4298.

[87] Yang W, Wang Y W, Xiao J W, et al. Bipartite consensus for multiple two-time scales agents over the signed digraph[C]. Int Conf on Control, Automation, Robotics and Vision. Phuket: IEEE, 2016: 1-6.

[88] Yang W, Wang Y W, Xiao J W, et al. Modulus consensus in a network of singularly perturbed systems with collaborative and antagonistic interactions[J]. Int J of Control, 2017, 90(12): 2667-2676.

[89] Yang W, Wang Y W, Xiao J W, et al. Coordination of networked delayed singularly perturbed systems with antagonistic interactions and switching topologies[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 89(1): 741-754.

[90] Shouse K R, Taylor D G. Discrete-time observers for singularly perturbed continuous-time systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1995, 40(2): 224-235.

[91] Yang C, Zhang L, Zhou L. Observer design for singularly perturbed systems with multirate sampled and delayed measurements[J]. J of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2016, 138(5): 051007(9).

[92] Wang Y, Wang Q, Duan D. H_∞ filtering for singularly perturbed systems with variable sampling and missing measurements[J]. IMA J of Mathematical Control and Information, 2015, 33(2): 485-495.

(责任编辑: 齐　霁)