

基于PSO非均匀样条插值的混合结构柔性臂抑振轨迹规划

龙腾, 李恩[†], 杨国栋, 杨磊, 范俊峰, 梁自泽

- (1. 中国科学院自动化研究所 复杂系统管理与控制国家重点实验室, 北京 100190;
2. 中国科学院大学 人工智能技术学院, 北京 100049)

摘要: 柔性臂广泛应用于核工业、建筑业、太空探索等领域,但由于自身刚度低、大挠度、低阻尼等特点,其末端易产生振动且难以在短时间内消除.对此,研究一种具有一个旋转关节和一个伸缩关节的混合结构柔性臂的抑振轨迹规划方法.通过对其结构分解和刚柔部分分解,建立动力学和运动学模型.为了提高算法效率,引入权重因子,构造映射函数,选取非均匀插值点,采用粒子群算法(PSO)优化插值点位置增量,利用3次样条插值拟合优化后的轨迹函数.最后,通过设计混合柔性臂的控制系統,验证所提出抑振轨迹规划方法的有效性.

关键词: 混合结构柔性臂; 动力学模型; 抑振轨迹规划; 非均匀样条插值; 粒子群算法

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Trajectory planning of vibration suppression for hybrid structure flexible manipulator based on PSO non-uniform spline interpolation

LONG Teng, LI En[†], YANG Guo-dong, YANG Lei, FAN Jun-feng, LIANG Zi-ze

- (1. The State Key Laboratory of Management and Control for Complex Systems, Institute of Automation, Chinese Academy of Science, Beijing 100190, China; 2. School of Artificial Intelligence, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: The flexible manipulator is widely used in the fields of nuclear industry, construction industry, space exploration and so on, but because of its characteristics of low stiffness, large deflection and low damping, the end of the vibration is difficult to eliminate in a short time. In this paper, a method of vibration reduction trajectory planning for the hybrid structure flexible manipulator with a rotating joint and a telescopic joint is studied. The dynamic and kinematic models are established by the structural decomposition and rigid flexible partial decomposition. In order to improve the efficiency of the algorithm, the weighted factor is introduced and the mapping function is constructed to select the non-uniform interpolation point. The interpolation point position increment is optimized by using the particle swarm optimization algorithm(PSO), and a new trajectory function is fitted by three spline interpolation. Finally, the effectiveness of the proposed method is verified by designing a control system of the hybrid flexible manipulator.

Keywords: hybrid structure flexible manipulator; dynamics model; trajectory planning of vibration suppression; non-uniform spline interpolation; particle swarm optimization(PSO)

0 引言

随着新材料、新工艺、新结构等技术的发展,效率高、负载质量比大、轻质灵活的轻质长臂已逐步应用于生产生活中.特别是在高空作业车、消防云梯车、大型起重机以及空间机械臂等领域,轻质连杆柔性臂的应用越来越广泛.但是,由于柔性臂自身刚度低、大挠度的结构特点以及本身的非线性、低阻尼以及固有频率低等特性,导致柔性臂在受到内外部激励

作用时,很容易激起自身低频、大幅度的弹性振动,且剩余振动很难依靠自身阻尼消除,影响机械臂的作业性能,甚至还可能导致事故发生.抑制柔性臂的振动可以通过增加系统阻尼、提高系统刚度等措施来实现,但这会导致系统质量增加,影响柔性臂响应速度并且消耗更多能量.因此,通过对柔性臂建模并应用抑振轨迹规划和抑振控制算法是解决这一问题的有效途径.

收稿日期: 2017-02-14; 修回日期: 2017-07-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61403372, 61403374); 国家科技支撑计划项目(2015BAK06B01-02).

责任编委: 刘民.

作者简介: 龙腾(1991—),男,博士生,从事柔性臂抑振控制和轨迹规划及其应用的研究; 梁自泽(1963—),男,研究员,博士生导师,从事工业机器人控制等研究.

[†]通讯作者. E-mail: en.li@ia.ac.cn

从20世纪90年代开始,许多研究人员开始对柔性臂的抑振方法进行研究,尝试通过不同的方法抑制柔性臂末端的振动,包括抑振轨迹规划、前馈控制、反馈控制以及各种智能控制的方法^[1].其中合理的轨迹规划能使机械臂在运动过程中尽量保持平稳的状态,避免位置、速度和加速度突变现象的产生.本文主要对柔性臂的建模和抑振轨迹规划方法进行研究.

到目前为止,大多数柔性臂的研究对象为单连杆或者双连杆旋转关节柔性臂,而对于旋转伸缩关节的混合结构柔性臂研究很少.对于伸缩臂的研究通常只考虑伸缩关节为刚性的情况.在Dwivedy等^[2]关于柔性臂动力学分析的综述中,也只针对旋转关节型柔性臂进行了分析阐述.但具有旋转关节和伸缩关节的混合结构柔性臂在实际应用中更加常见,如高空作业车、挺杆式起重机以及空间机械臂等.这些轻质长臂为了减少自身体积,都采用旋转关节和伸缩关节组合的结构形式.本文的研究目的主要是利用旋转关节和伸缩关节的轨迹相互配合,达到抑制混合结构柔性臂末端振动的目的.

柔性臂的运动学模型和动力学模型是抑振轨迹规划中求解末端振动的关键.动力学建模首先需要描述柔性臂的柔性体形变.王树新等^[3]在其研究中介绍了多种对柔性体描述的方法.基于不同的柔性体描述方法,人们对柔性臂的建模与控制开展了相应的研究,如有限元法^[4-5]、有限段法^[6-7]、集中质量法^[8-9]和假设模态法^[10-11]等.其中有限元法和有限段法计算复杂,难以求解;而混合结构柔性臂连杆长度随时间变化,集中质量法难以确定质量分布的节点.因此,本文采用假设模态法对混合结构柔性臂的动力学进行建模.

柔性臂运动的稳定性与轨迹函数有着直接的关系,目前运动轨迹插补曲线有矩形/梯形加速度曲线、多项式曲线、摆线、样条曲线、贝兹曲线以及构造基函数的方法等.其中矩形和梯形等非平滑加速度曲线由于冲击函数不连续,且方向、大小不同,会使机器人系统受到冲击并产生振动,不适于抑振轨迹规划.多项式轨迹曲线受可优化参数数量限制,无法达到最优性能,很难实现有效的抑振效果.贝兹曲线无法对局部特征进行修改,但是对于混合结构柔性臂的抑振轨迹在起始阶段和停止阶段的轨迹需要着重规划,提高最优性能.摆线、样条曲线、基函数描述曲线具有灵活的表达形式和光滑特性,研究人员利用其不同的改进形式对柔性臂的运动轨迹进行描述,但效果参差不齐,没有取得特别理想的效果.

轨迹描述函数将柔性臂的实际运动路径转化为数学形式,通过优化算法对轨迹函数的参数进行优化,达到抑振末端振动的目的.目前,研究人员已将神经网络、粒子群优化算法、蚁群优化算法等应用到轨迹搜索算法中,但是针对柔性臂轨迹规划的应用却不多见.Abe等^[12-14]利用神经网络进行前馈输入整形,但是并未在抑振轨迹规划方面做深入研究.Wang等^[15]利用粒子群算法对贝兹函数轨迹参数进行优化,通过不同的目标函数得到了对应的优化结果,但是由于贝兹函数的局限性,使得轨迹函数不能达到最优.Choi等^[16]利用指数函数求导形式不变性和逆动力学的方法对柔性臂进行抑振控制.国内也有一些关于抑振轨迹规划的研究.徐文福等^[17]采用粒子群算法优化基函数的系数和幅值以达到抑振的效果.吴立成等^[18]利用插入插值点的方法对空间双柔性臂的轨迹进行描述,但是对插值点的插入位置没有明确的范围,容易造成局部插值点冗余,且算法效率相对下降.Lou等^[19]采用遗传算法,在5次多项式轨迹函数的基础上进行优化,取得了较好的效果,但并未着重考虑起始阶段和停止阶段的轨迹.

本文采用假设模态法描述混合结构柔性臂的弹性形变,将伸缩关节分解为基础段、重叠段和伸出段,每段关节角分离为刚性部分和柔性部分,建立完备的动力学方程.在此基础上,选择3次样条函数作为混合结构柔性臂的轨迹描述曲线,利用PSO算法对离散插值点进行优化.柔性臂末端在运动阶段产生偏差和振动,关键在于运动的起始阶段和停止阶段.若能在轨迹规划时对这两个阶段进行着重规划,使得这两个阶段的轨迹更加平滑,则能减少振动的产生.但是如果运动时间固定,要同时兼顾优化运动起始阶段和停止阶段,则可能产生冲突.所以本文利用抛物线与直线的分段组合作为映射函数,选取非均匀的离散插值点,在运动起始阶段以及运动停止阶段采用稠密插值点进行着重规划,而运动的中间阶段采用稀疏插值点保证曲线的平滑.引入权重因子用于权衡起始阶段和停止阶段的侧重点.而且权重因子的引入,在同样数量插值点的情况下,能提高算法的搜索效率.另外,设计合适的目标函数,尽可能地减少柔性臂运动过程中的振动偏差以及运动停止后的剩余振动,规划混合结构柔性臂点到点运动的最优抑振轨迹.

1 混合结构柔性臂建模

为了分析混合结构柔性臂的结构特点并在轨迹规划过程中通过给定参考轨迹获得关节的位置、速度、加速度,最终得到末端的振动情况,需要建立混合

结构柔性臂的动力学和运动学模型.

1.1 动力学模型

在材料力学的弯曲梁简化理论中,可以利用 Euler 梁、Euler-Bernoulli 梁和 Timoshenko 梁等不同模型对梁进行描述. 柔性臂在运动过程中会产生弯曲形变、轴向形变以及剪切形变,但实际中柔性臂的杆长远大于横截面宽度,此时柔性连杆产生的剪切和轴向形变远小于弯曲形变,因此建模过程中可忽略剪切和轴向的形变,将梁简化为 Euler-Bernoulli 梁,仅考虑柔性臂连杆上由于弯曲引起的形变. 根据力学原理,等截面梁自由弯曲振动的微分方程表示为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] = -\rho \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

其中: E 为弹性模量, I 为截面惯性矩, ρ 为单位连杆长度的质量, w 为平面内的弹性形变. 将方程(1)的解分离为时间和空间表达式,不失一般性,本文建模中仅考虑一阶模态,则弹性形变量可表示为

$$w(x, t) = \varphi(x)q(t) \quad (2)$$

利用悬臂梁的边界条件,可得到频率方程和模态方程如下:

$$\cos(\beta L) \cdot \cosh(\beta L) = -1, \quad (3)$$

$$\varphi(x) = C_1 [(\sin(\beta x) - \sinh(\beta x)) - \eta_1 (\cos(\beta x) - \cosh(\beta x))], \quad (4)$$

$$\eta_1 = \frac{\sin(\beta L) + \sinh(\beta L)}{\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)} \quad (5)$$

其中: C_1 为常数,为第一阶无量纲弯曲振动频率; L 为柔性臂的长度,取 $\beta L = 1.875$. 在混合结构柔性臂运动时,伸缩臂的臂长发生变化,会导致 β 发生微小的变化,即有

$$\beta(t) = \frac{\beta L}{L(t)} = \frac{1.875}{L(t)} \quad (6)$$

可见 β 由梁的某一时刻的长度决定,是一个关于时间的函数,则模态函数变为

$$\varphi(x) = C_1 [(\sin(\beta(t)x) - \sinh(\beta(t)x)) - \eta_1 (\cos(\beta(t)x) - \cosh(\beta(t)x))]. \quad (7)$$

本文研究的混合结构柔性臂具有旋转关节和伸缩关节,相比常见的单关节或者双关节折叠柔性臂而言,其结构更加复杂,状态变量更多,耦合程度更高,不确定因素更突出,其建模过程也更为复杂. 对于伸缩臂的建模,本文将伸缩臂分3段考虑,分别为基础段、重叠段和伸出段,重叠段又分为母杆和子杆并对其分别建模,最终将3段综合进行考虑,建立伸缩臂的弹性形变模型.

如图1所示,在混合结构柔性臂模型上建立坐标系. $w_1 \sim w_3$ 分别表示3段连杆的末端最大弹性偏差,因混合结构柔性臂末端在运动过程中的偏差主要在运动方向上,故本文的偏差仅考虑二维平面速度方向上的偏差; θ_1 表示旋转关节的旋转角度, u 表示子杆的伸缩长度, τ 表示旋转关节的输入力矩, F 表示伸缩关节的驱动力; θ_2 、 θ_3 表示重叠段和伸出段连杆的关节角度, θ_e 表示混合结构柔性臂的末端关节角; XOY 为全局坐标系, $o_1 \sim o_3$ 表示每段连杆的参考坐标系,其中 o_2 、 o_2' 分别表示重叠段上母杆和子杆的参考坐标系. 设 $l_1 \sim l_3$, $q_1 \sim q_3$ 分别表示初始连杆长度以及模态变量.

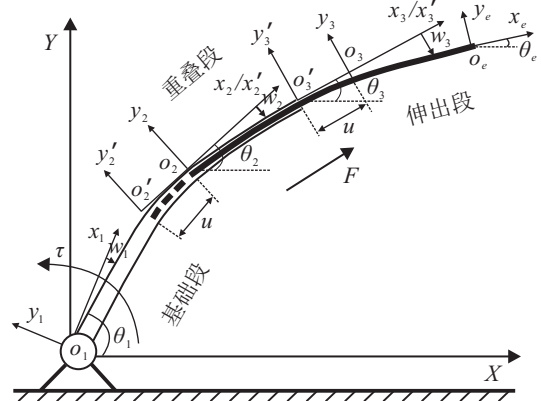


图1 混合结构柔性臂模型

由于 θ_2 、 θ_3 在刚性情况下应该与 θ_1 相等,为了能对模型解耦并快速求解,本文将模型中的状态变量分为刚性部分和柔性部分,近似认为 θ_1 是刚性情况下的旋转角度,即

$$q = q_0 + \Delta q, \quad (8)$$

$$q = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ u \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T, \quad (9)$$

$$q_0 = [\theta_1 \ 0 \ 0 \ u \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (10)$$

$$\Delta q = [0 \ \Delta\theta_2 \ \Delta\theta_3 \ 0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T. \quad (11)$$

其中: q_0 表示刚性臂的关节变量, Δq 表示关节角度偏差以及模态变量. 本文分别对刚性部分和柔性部分的状态变量进行建模,从刚性部分中求解得到刚性部分的状态变量表达式后,代入柔性部分的动力学方程中,可求解出柔性部分状态变量的表达式,进而建立混合结构柔性臂完整的动力学方程.

假设 w_i 表示连杆在垂直于轴线方向上的弹性偏差,是关于时间和位置的多元函数. 混合结构柔性臂在运动过程中,每段连杆的长度是随时间变化的,因此,连杆上任意点的位置也是关于时间的函数,于是连杆的弹性偏差对时间求导可表示为

$$\frac{d}{dt} w_i(x_i, t) = \frac{\partial w_i}{\partial t} + \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \dot{w}_i + w_i' \frac{\partial x_i}{\partial t}. \quad (12)$$

对于连杆上任意点 P 的速度矢量可表示为

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{R}}_i + \dot{T}_i \begin{bmatrix} x_i \\ w_i \end{bmatrix} + T_i \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{dw_i}{dt} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

当考虑连杆柔性时, θ_2 、 θ_3 与 θ_1 由于连杆弹性形变仅相差一个微小的偏差 $\Delta\theta_2$ 和 $\Delta\theta_3$, 即有

$$\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta_2, \quad \theta_3 = \theta_1 + \Delta\theta_3. \quad (14)$$

因 $\Delta\theta_i$ 数值很小, 故有 $\cos \Delta\theta_2 \approx 1$, $\sin \Delta\theta_2 \approx \Delta\theta_2$, 且忽略 $\Delta\theta_i$ 的二阶及二阶以上的项^[20], 可得到柔性臂上任意点的速度关于柔性状态变量的线性表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i = & E_{i0} + E_{i1}\Delta\theta + E_{i2}\Delta\dot{\theta} + E_{i3}\mathbf{Q} + E_{i4}\dot{\mathbf{Q}} = \\ & E_{i0} + E_{i1}[\Delta\theta_2 \quad \Delta\theta_3]^T + E_{i2}[\Delta\dot{\theta}_2 \quad \Delta\dot{\theta}_3]^T + \\ & E_{i3}[q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T + E_{i4}[\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3]^T. \end{aligned} \quad (15)$$

对式(15)进行积分, 求得整个系统的动能

$$\begin{aligned} K = & \frac{1}{2}(E_0^T E_0 + 2E_0^T E_1 \Delta\theta + 2E_0^T E_2 \Delta\dot{\theta} + \\ & 2E_0^T E_3 \mathbf{Q} + 2E_0^T E_4 \dot{\mathbf{Q}} + \Delta\theta^T E_1^T E_1 \Delta\theta + \\ & 2\Delta\theta^T E_1^T E_2 \Delta\dot{\theta} + 2\Delta\theta^T E_1^T E_3 \mathbf{Q} + 2\Delta\theta^T E_1^T E_4 \dot{\mathbf{Q}} + \\ & \Delta\dot{\theta}^T E_2^T E_2 \Delta\dot{\theta} + 2\Delta\dot{\theta}^T E_2^T E_3 \mathbf{Q} + 2\Delta\dot{\theta}^T E_2^T E_4 \dot{\mathbf{Q}} + \\ & \mathbf{Q}^T E_3^T E_3 \mathbf{Q} + 2\mathbf{Q}^T E_3^T E_4 \dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{Q}}^T E_4^T E_4 \dot{\mathbf{Q}}). \end{aligned} \quad (16)$$

其中 E_i 是关于 θ_1 、 u 的函数, 在刚性动力学方程已知的情况下, E_i 可看作已知量.

同理, 可得到混合结构柔性臂系统的势能

$$P = H_0 + H_1 \Delta\theta + H_2 \mathbf{Q} + \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T H_3 \mathbf{Q}, \quad (17)$$

其中 H_i 是 θ_1 、 u 的函数. 通过系统的动能和势能, 利用拉格朗日方程, 可得到混合结构柔性臂的动力学方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \Delta \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \Delta \mathbf{q}} = \Delta \mathbf{T}, \quad (18)$$

$$L = K - P =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(E_0^T E_0 + 2E_0^T E_1 \Delta\theta + 2E_0^T E_2 \Delta\dot{\theta} + \\ & 2E_0^T E_3 \mathbf{Q} + 2E_0^T E_4 \dot{\mathbf{Q}} + \Delta\theta^T E_1^T E_1 \Delta\theta + \\ & 2\Delta\theta^T E_1^T E_2 \Delta\dot{\theta} + 2\Delta\theta^T E_1^T E_3 \mathbf{Q} + 2\Delta\theta^T E_1^T E_4 \dot{\mathbf{Q}} + \\ & \Delta\dot{\theta}^T E_2^T E_2 \Delta\dot{\theta} + 2\Delta\dot{\theta}^T E_2^T E_3 \mathbf{Q} + 2\Delta\dot{\theta}^T E_2^T E_4 \dot{\mathbf{Q}} + \\ & \mathbf{Q}^T E_3^T E_3 \mathbf{Q} + 2\mathbf{Q}^T E_3^T E_4 \dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{Q}}^T E_4^T E_4 \dot{\mathbf{Q}}) - \\ & H_0 - H_1 \Delta\theta - H_2 \mathbf{Q} - \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T H_3 \mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\Delta \mathbf{T} = [0 \quad \Delta\tau_2 \quad \Delta\tau_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T. \quad (20)$$

根据式(18)~(20), 得到系统动力学方程

$$\mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \Delta \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \Delta \mathbf{q} = \Delta \mathbf{T} + \mathbf{N}, \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{q} = & [\Delta\theta^T \quad \mathbf{Q}^T]^T = \\ & [0 \quad \Delta\theta_2 \quad \Delta\theta_3 \quad 0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T. \end{aligned} \quad (22)$$

因为关节变量可在刚性动力学方程中求得, 所以在柔性动力学方程中, \mathbf{M} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{K} 均为关于时间的函数, 但是模态变量之间不存在耦合情况, 为一个线性时变系统. Long 等^[21] 对式(21)进行了详细推导. 若伸缩长度 u 不变, 则原动力学方程退化为单连杆质量非均匀柔性臂的动力学方程, 系统即为常见的线性时不变系统. 对于线性时变系统模型, 通过给定力和力矩条件可求解出模态变量随时间变化的关系.

1.2 运动学模型

根据所得到的关节变量、模态变量以及运动学模型, 可得到末端的振动情况, 而运动学模型即为关节空间到末端笛卡尔空间的齐次变换矩阵.

混合结构柔性臂的基础段、重叠段和伸出段所对应的齐次变换矩阵如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos \Delta\theta_2 & -\sin \Delta\theta_2 & l_1 + u \\ \sin \Delta\theta_2 & \cos \Delta\theta_2 & w_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \cos(\Delta\theta_3 - \Delta\theta_2) & -\sin(\Delta\theta_3 - \Delta\theta_2) & l_2 - u \\ \sin(\Delta\theta_3 - \Delta\theta_2) & \cos(\Delta\theta_3 - \Delta\theta_2) & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} \cos(\Delta\theta_e - \Delta\theta_3) & -\sin(\Delta\theta_e - \Delta\theta_3) & l_3 + u \\ \sin(\Delta\theta_e - \Delta\theta_3) & \cos(\Delta\theta_e - \Delta\theta_3) & w_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

其中: w_i 可通过式(2)得到, $\Delta\theta_e = \theta_1 - \theta_e$.

最终得到混合结构柔性臂的齐次变换矩阵如下:

$$\begin{aligned} A = & A_1 A_2 A_3 A_4 = \\ & \begin{bmatrix} \cos(2\theta_1 - \theta_e) & -\sin(2\theta_1 - \theta_e) & B \\ \sin(2\theta_1 - \theta_e) & \cos(2\theta_1 - \theta_e) & C \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned}
 B = & (l_1 + u) \cos \theta_1 + (l_2 - u) \cos(2\theta_1 - \theta_2) + \\
 & l_3 \cos(2\theta_1 - \theta_3) + u \cos(2\theta_1 - \theta_3) - \\
 & w_1 \sin \theta_1 - w_2 \sin(2\theta_1 - \theta_2) - \\
 & w_3 \sin(2\theta_1 - \theta_3), \tag{28}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C = & w_1 \cos \theta_1 + w_2 \cos(2\theta_1 - \theta_2) + \\
 & w_3 \cos(2\theta_1 - \theta_3) + l_1 \sin \theta_1 + u \sin \theta_1 + \\
 & l_2 \sin(2\theta_1 - \theta_2) - u \sin(2\theta_1 - \theta_2) + \\
 & l_3 \sin(2\theta_1 - \theta_3) + u \sin(2\theta_1 - \theta_3). \tag{29}
 \end{aligned}$$

由此即可通过关节变量和模态变量得到末端的位置和振动情况,为后续的轨迹寻优提供依据。

2 抑振轨迹规划

本文研究具有一个旋转关节和一个伸缩关节的混合结构柔性臂,主要研究其点到点运动中柔性臂末端的抑振轨迹规划.首先需要给定柔性臂末端在笛卡尔空间中的起始点和末端的位置、速度和加速度,即给定研究对象的边界值,则原轨迹规划的问题可以转化为两点边值问题(TPBVP)^[22].从上一节推导的动力学模型中可以发现,混合结构柔性臂末端位置、速度和加速度与旋转关节的旋转角度和伸缩关节的伸缩长度相关,且关节角度、伸缩长度与末端的振动相互耦合.若直接规划笛卡尔空间中末端的轨迹,则规划出的最优抑振轨迹难以转换到关节空间进行状态分离和控制。

本文给定边界条件,利用混合结构柔性臂刚性部分的逆运动学将其转换到关节空间,确定关节空间中关节角和伸缩长度的边界条件,从而在关节空间中进行轨迹寻优.根据关节空间边界条件,分别构造关节空间中旋转关节角和伸缩长度的5次多项式作为初始寻优轨迹表达式.为了找到最优的关节空间抑振轨迹,将末端振幅作为优化的目标函数,采用粒子群优化算法,对初始寻优轨迹表达式中所选取的插值点的位置增量进行优化,再将这些优化的轨迹点作为样条函数的插值点,通过3次样条插值得到新的关节轨迹,并利用动力学模型和运动学模型求得柔性臂末端振动情况。

2.1 插值点选取

由于柔性臂在运动过程中的振动主要由起始阶段的位置、速度和加速度决定,而柔性臂停止运动后的剩余振动主要由停止阶段的位置、速度和加速度决定,要抑制柔性臂在运动过程和停止之后的剩余振动,需要着重规划柔性臂起始阶段和停止阶段的运动轨迹,尽量减少末端振动的产生.为了在起始阶段和

停止阶段规划出更加精确的轨迹函数,采用非均匀插值点构造样条函数,在起始阶段和停止阶段选取稠密插值点,中间段选取稀疏插值点,保证起始阶段和停止阶段轨迹函数的最优性能且减小轨迹搜索空间,提高算法的效率。

为了选择非均匀插值点,构造分段映射函数如下:

$$f(t) = \begin{cases} a_1 t^2 + b_1 t + c_1, & t \in [0, \alpha t_f]; \\ kt + b_k, & t \in [\alpha t_f, \frac{1+4\alpha}{4} t_f]; \\ -a_2 t^2 + b_2 t + c_2, & t \in (\frac{1+4\alpha}{4} t_f, t_f]. \end{cases} \tag{30}$$

定义参数 α 用于确定映射函数线性段在整个运动时间段中的位置和所占比例.由于运动时间 t_f 固定,通过 α 的值可改变起始段和停止段在整个运动时间中所占的比例,也决定了线性段在运动时间段中的位置;而 α 的取值范围决定线性段在整个运动时间中所占的比例.参数 α 的取值在优化过程中起主导作用,用于权衡运动过程中的跟踪精度和运动停止之后的定位精度的侧重点.当 α 的取值比较极端时,其抑振效果也不理想,故 α 的取值范围对优化结果的影响不大。

通过多次实验发现,当 α 的取值范围在 $[0, 1/2] \sim [0, 7/8]$ 之间时,即线性段占整个运动时间的 $1/8 \sim 1/2$ 时,所得到的优化结果基本一致.所以本文选择 $\alpha \in [0, 3/4]$ 这个区间,即线性段占整个运动时间的 $1/4$,便于后续的计算。

映射函数形式如图2所示。

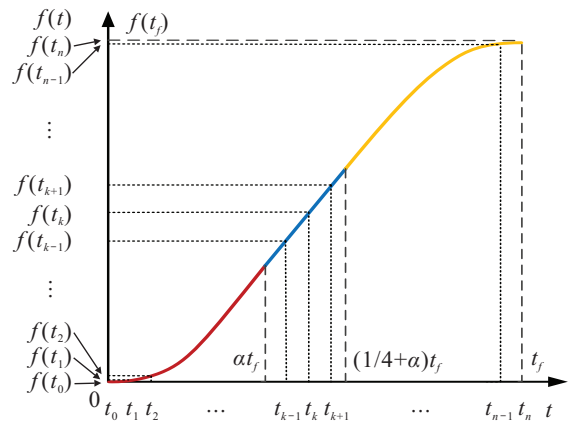


图2 非均匀插值点选取示意

分段映射函数具有区间内一阶可导,且满足

$$f(0) = 0, f(t_f) = t_f, f'(0) = 0, f'(t_f) = 0. \tag{31}$$

在 $[0, t_f]$ 区间内均匀选取 $t_0 \sim t_n$ 包括区间端点在内的 $n + 1$ 个点,通过式(30)所描述的分段映射函

数,得到整个运动时间内 $n + 1$ 个非均匀分布的插值时间点 $f(t_0) \sim f(t_n)$. 从图2中可以看出,在柔性臂运动的起始阶段和停止阶段,所选取的插值点稠密,便于构造出更加细腻的轨迹曲线,而中间段采用均匀插值的方式,保证了整个轨迹曲线的光滑性. 采用此种非均匀插值的轨迹构造方式,相对于同样插值点数量的轨迹,能在特定的时间段内构造出更加多样性的轨迹曲线,增大了优化算法的可行域,并且算法复杂度不会增加. α 作为权重因子,用于改变起始阶段和停止阶段所选取插值点的数量,并且 α 还作为优化算法中目标函数的参数,从而影响对运动过程的跟踪精度和运动结束之后的剩余振动抑制效果.

2.2 关节空间轨迹函数

针对离散点有很多种插值方法,如高次多项式插值、低次多项式插值、Hermite插值、样条插值等. 但是高次多项式插值可能出现不稳定的情况;而低次多项式插值的光滑性比较差,在插值节点附近的一阶导数不存在;分段3次Hermite插值的光滑性比低次多项式的光滑性好,但是在插值区间不具有二阶的光滑性. 3次样条函数在插值点和插值区间都具有二阶可导性,且具有较好的稳定性,因此本文中选用3次样条插值函数,对所得到的控制点进行插值,优化混合结构柔性臂的关节轨迹.

根据点到点的路径规划任务,混合结构柔性臂的旋转关节和伸缩关节轨迹有如下约束条件:

$$z(0) = z_0, \dot{z}(0) = 0, \ddot{z}(0) = 0; \quad (32)$$

$$z(t_f) = z_f, \dot{z}(t_f) = 0, \ddot{z}(t_f) = 0. \quad (33)$$

通过给定的边界条件,利用5次多项式,可以确定唯一的一条初始寻优轨迹曲线,即

$$z(t) = at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2 + et + f. \quad (34)$$

对于每一个关节轨迹,根据2.1节所述的插值点选取可得到 $n + 1$ 个插值点,则在5次多项式的轨迹上得到 $n + 1$ 个点 $z(f(t_i)), i = 0, 1, \dots, n$, 除首末两点外,在每个插值点上加上一个增量 $\Delta z_i (i = 1, 2, \dots, n - 1)$, 一共形成 $n - 1$ 个新的轨迹插值点 $Z(f(t_i)) = z(f(t_i)) + \Delta z_i (i = 1, 2, \dots, n - 1)$, 与起始点和终止点一起,共构成 $n + 1$ 个新的插值点. 利用3次样条插值函数,在 $n + 1$ 个新的插值点条件下,重新构造一个新的关节轨迹函数. 每段插值点之间的表达式可表示为

$$\begin{aligned} Z(t) &= S_i(t), t \in (t_i, t_{i+1}], i = 0, 1, \dots, n - 1; \\ Z(0) &= S_0(0). \end{aligned} \quad (35)$$

其中

$$\begin{aligned} S_i(t) &= c_{1i} + c_{2i}(t - t_i) + c_{3i}(t - t_i)^2 + c_{4i}(t - t_i)^3, \\ i &= 0, 1, \dots, n - 1. \end{aligned} \quad (36)$$

$S_i(t)$ 表示第 i 个区间上的3次样条函数, c_{1i} 、 c_{2i} 、 c_{3i} 、 c_{4i} 为待定系数.

为了确定 $4n$ 个样条函数的待定系数,每个选定的插值点应满足关节轨迹函数过插值点、关节轨迹函数连续、关节轨迹一阶导函数连续以及关节轨迹的二阶导函数连续,可得到 $4n - 2$ 个条件,加上边界条件,可以得到所有的待定系数. 如图3所示,虚线表示初始寻优轨迹,实线为优化轨迹. 在初始寻优轨迹的基础上,通过加上插值点增量的方式,改变每个插值点的位置,得到一组新的插值点. 通过3次样条插值得到优化轨迹.

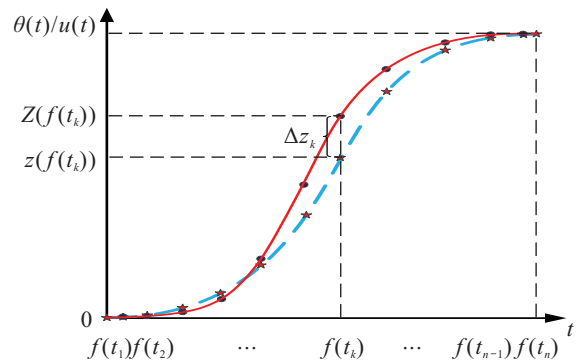


图3 轨迹优化示意

选择5次多项式作为初始寻优轨迹,既能保证初始条件下满足轨迹要求的边界条件,也能尽量减小抑振轨迹优化算法的搜索空间,提高优化算法的效率.

3 基于粒子群算法的轨迹参数优化

3.1 优化问题

粒子群优化算法(PSO)是1995年由Kennedy从鸟类觅食行为中发现的一种优化算法. 与遗传算法相比,粒子群优化算法寻优过程更加简洁,每一步寻优都记录所有个体的全局最优信息和局部最优信息,下一步根据这些最优信息,调整少量的参数即达到下一步优化的目的^[23-24]. 通过应用粒子群优化算法,直接建立混合结构柔性臂旋转关节和伸缩关节轨迹与末端振动之间的关系,可以避免繁琐的数学表达式的计算.

本文通过轨迹规划的方法使得混合结构柔性臂的末端振幅最小,关键是在选取旋转关节和伸缩关节轨迹上的每个插值点上所增加的分量 Δz_{θ_i} 和 $\Delta z_{u_i} (i = 1, 2, \dots, n - 1)$, 确定每个插值点增量来决定3次样条的插值点,最终确定一条最优的末端轨迹.

利用粒子群优化算法,对旋转关节插值点增量 $\Delta z_{\theta} = (\Delta z_{\theta_1}, \Delta z_{\theta_2}, \dots, \Delta z_{\theta_{n-1}})$ 和伸缩关节插值点

增量 $\Delta z_u = (\Delta z_{u_1}, \Delta z_{u_2}, \dots, \Delta z_{u_{n-1}})$ 进行寻优,找到能使混合结构柔性臂在运动过程中 $t_0 \sim t_f$ 以及运动之后 $t_f \sim 3t_f$ 的时间内运动的振幅最小,且能有较高的定位精度的插值点增量. 根据轨迹寻优的要求,选择合适的目标函数.

3.2 目标函数

选择目标函数如下:

$$W = \alpha \int_{t_0}^{t_f} |w| dt + \left(\frac{3}{4} - \alpha\right) \int_{t_f}^{3t_f} |w| dt. \quad (37)$$

目标函数的前半部分,通过对混合结构柔性臂末端偏差的绝对值进行积分,用于衡量柔性臂在运动过程中的振动偏差情况;目标函数的后半部分,通过对柔性臂运动停止后的一段时间内对末端偏差的绝对值进行积分,用于衡量柔性臂的剩余振动情况. 其中权重因子 α 在初始插值点选取阶段确定. α 的值用于权衡在运动过程中轨迹跟踪精度与运动停止之后的剩余振动抑制之间的关系. α 的值越接近于 $3/4$,在轨迹规划过程中越侧重于柔性臂在运动过程中的轨迹跟踪; α 的值越接近于 0 ,在轨迹规划过程中越侧重于抑制柔性臂的剩余振动,提高末端定位精度.

为了提高混合结构柔性臂的安全性能,在抑振轨迹规划过程中限制末端振幅 $|w| < W$,一旦条件不满足,则停止柔性臂的运动并舍弃当次的规划结果.

在混合结构柔性臂轨迹寻优阶段,对于旋转关节,优化插值点增量 Δz_θ ,主要用于修正旋转关节轨迹,通过调整 α 的大小,着重规划轨迹的起始阶段轨迹或者停止阶段轨迹,减小混合结构柔性臂在旋转过程中以及停止之后的振动. 对于伸缩关节,优化插值点增量 Δz_u ,主要用于调整伸缩关节开始运动的时间且保证伸缩运动的平滑性. 由上一节所建立的动力学模型可知,伸缩关节的运动将改变柔性臂当前振动的振幅和频率. 旋转运动过程中,需要优化伸缩量,使之处于尽量小的状态,避免末端产生过大的振幅.

3.3 初始种群选取

在构造的 5 次多项式轨迹基础上,通过映射函数获得 $2(n-1)$ 个寻优插值点的时刻,为了保证初始种群的多样性并保证尽可能地缩小搜索空间,在每个插值点时刻利用正态分布函数获得 M 个 $2(n-1)$ 维初始搜索种群 $\Delta z^0 = (\Delta z_\theta^0, \Delta z_u^0)$ 和对应的飞行速度 $v^0 = (v_\theta^0, v_u^0)$. 初始种群采用每个插值点时刻 5 次多项式的值为均值,插值点时刻在 5 次多项式的值到起始位置和停止位置的最小值的 $1/3$ 为标准差的正态分布函数随机产生,即

$$\mu(f(t_k)) = z(f(t_k)), \quad (38)$$

$$\sigma(f(t_k)) = \min\{z(f(t_k)), z(f(t_k)) - z_f\}/3. \quad (39)$$

初始飞行速度均为 0 . 采用正态分布函数随机产生初始种群,能将初始种群限定在 5 次多项式轨迹区域附近,尽可能地减小种群的搜索空间以达到快速寻优的目的. 在优化过程中,按照如下规则不断更新局部最优值和全局最优值以及飞行速度,直到找到符合条件的最优值或者达到最大的迭代次数:

$$v^{k+1} = \omega v^k + m_1 \eta (P_i^k - \Delta z^k) + m_2 \xi (P_g^k - \Delta z^k), \quad (40)$$

$$\Delta z^{k+1} = \Delta z^k + r v^k. \quad (41)$$

其中: P_i^k 表示每个粒子经过 k 次迭代后的局部最优值; P_g^k 表示所有粒子经过 k 次迭代后的全局最优值; ω 为惯性因子,表示下一次迭代速度与上一次迭代速度的相关程度; m_1 、 m_2 分别表示跟随局部最优值和全局最优值的权重因子; η 、 ξ 为 $[0,1]$ 区间上的随机数,避免陷入局部最优; r 为约束因子,可调整寻优过程中的迭代步长. 每次迭代后,更新每个粒子的全局最优值和局部最优值.

3.4 寻优算法流程

通过粒子群优化算法对混合结构柔性臂的抑振轨迹规划步骤如下:

Step 1: 根据跟踪精度和定位精度的优化侧重点确定 α 和插值点数量 n ;

Step 2: 通过分段映射函数获得非均匀离散插值点的时刻 $f(t_k)$;

Step 3: 根据混合结构柔性臂末端的边界条件,通过混合结构柔性臂刚性部分逆运动学确定旋转关节和伸缩关节的边界条件;

Step 4: 根据 Step 3 中获得的旋转关节和伸缩关节的边界条件构造每个关节的 5 次多项式初始寻优轨迹函数;

Step 5: 在 5 次多项式的基础上,通过 Step 2 所获得的插值点时刻,利用正态分布函数,得到初始搜索种群 Δz^0 和对应的飞行速度 v^0 ;

Step 6: 根据寻优算法得到全局最优插值点,利用 3 次样条插值获得旋转关节新的轨迹 $\theta(t)$ 和伸缩关节新的轨迹 $u(t)$;

Step 7: 利用 PD 控制算法、动力学模型和运动学模型,得到当前旋转关节和伸缩关节的轨迹下的末端振动情况,计算目标函数,并判断是否达到停止条件;

Step 8: 采用粒子群优化算法 (PSO) 优化增量 Δz_θ 和 Δz_u ,重新得到新的插值点,回到 Step 6.

具体算法的结构框图如图 4 所示.

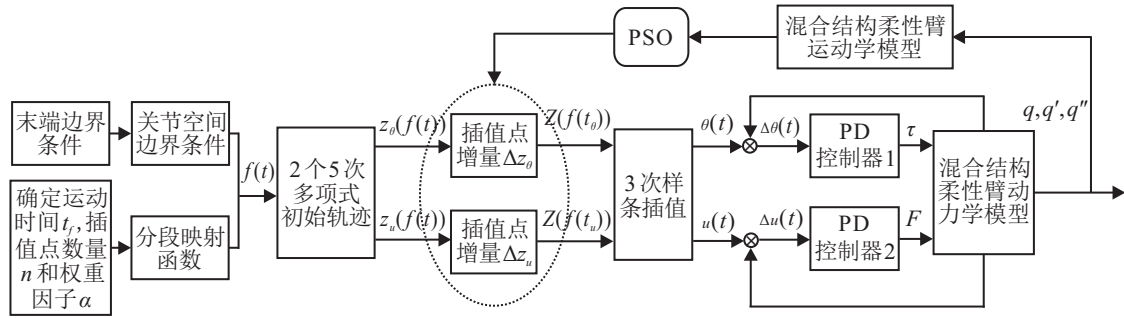


图4 混合结构柔性臂抑振轨迹规划算法结构

针对混合结构柔性臂的特点, 本文将末端的边界条件通过逆运动学转换到关节空间, 应用上述提出的抑振轨迹规划算法对旋转关节和伸缩关节进行规划, 将末端的位置偏差和振动情况作为粒子群优化算法的目标函数。

4 仿真实验结果与分析

为了验证本文中的动力学模型以及最优抑振轨迹规划方法, 利用 Matlab/Simulink 模块建立混合结构柔性臂的仿真系统. 选择系统参数见表 1.

表1 系统仿真参数

参数	值	单位
ρ_1, ρ_2	0.3	kg/m
ρ_3, ρ_4	0.25	kg/m
l_1	0.6	m
l_2	0.4	m
l_3	1.1	m
EI_1	0.21	N·m ²
EI_2	0.0471	N·m ²

仿真模型中首先得到关于状态变量近似的线性表达式, 在此基础上推导系统动力学方程, 从而简化速度表达式中的耦合项和非线性项. 此方法的合理性在文献 [20-21] 中得到了验证, 其模型误差在可接受范围内. 另外, 由于实际系统中的摩擦和阻尼无法准确估计, 模型中仅给定一个很小的阻尼系数. 阻尼系数的大小会使得稳定时间与仿真时间有所出入, 但并不会影响优化算法有效性的验证。

4.1 动力学模型仿真分析

为了验证模型的合理性, 利用5次多项式曲线作为关节轨迹曲线, 当旋转运动和伸缩运动分别运动时, 观察两种典型运动下混合结构柔性臂末端的振动以及偏差情况。

选取旋转关节运动的起始和终止位置为0和 $\pi/2$, 开始时间 $t_0 = 0$, 运动时间为2s, 伸缩关节的变量 u 从0伸长到0.3, 开始时间为 $t_0 = 6$, 运动时间为2s. 观测混合结构柔性臂末端振动情况如图5所示。

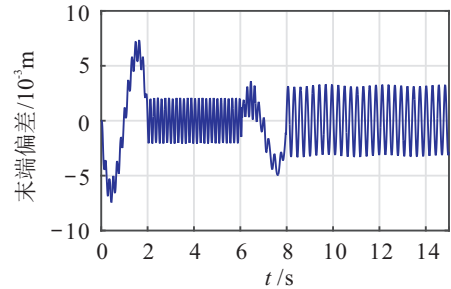


图5 旋转关节和伸缩关节分时运动末端振动情况

从仿真结果可以看出, 当混合结构柔性臂开始作旋转运动时, 末端的振动就一直存在. 当旋转关节停止运动后, 柔性臂的末端依然会有一个同频率的振动残留. 此时, 伸缩关节开始运动, 通过观察末端的振动情况可以看出, 随着伸缩关节的伸长, 柔性臂末端的振幅会随之增加, 而振动频率则随之减小. 这个结论与文献 [20,25] 所得到的结论基本一致, 所以本文中所得到的动力学模型是合理的。

4.2 最优抑振轨迹仿真分析

下面的实验采用本文中所提出的轨迹规划算法, 确定插值点数 $n = 10$, 权重因子 $\alpha = 0.25$, 种群的粒子数为 15, 粒子群优化算法寻优代数为 100. 同时抑制混合结构柔性臂末端的剩余振动和运动过程中的振动, 得到旋转关节轨迹和伸缩关节轨迹随时间变化曲线见图6, 并与5次多项式轨迹进行比较。

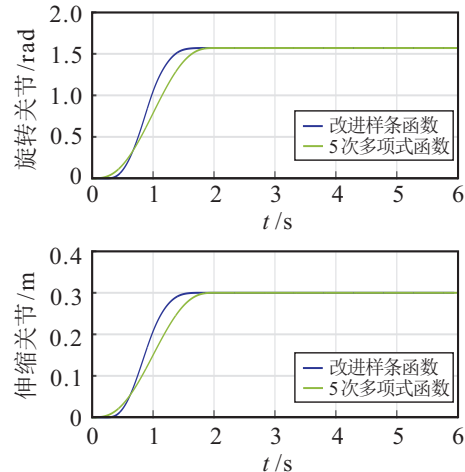


图6 优化参考轨迹前后对比

由图6可以看出,通过本文求解出的最优抑振参考轨迹在起始阶段和停止阶段均比5次多项式平缓,且相对于起始阶段,停止阶段的平缓时间更长.这些特征能尽量地避免混合结构柔性臂末端振动的产生并能减少末端剩余振动的振幅.

将5次多项式轨迹与本文优化轨迹下混合结构柔性臂末端的振动情况进行比较(见图7).在柔性臂运动过程中,优化后的轨迹使得末端振动的最大偏差小于5次多项式轨迹,且柔性臂运动停止后,剩余振动的振幅也明显小于5次多项式轨迹,末端的定位精度更高.但是从实验结果可以看出,优化后参考轨迹后末端振动频率要大于5次多项式参考轨迹的末端振动频率,这主要是由于伸缩关节的优化轨迹与5次多项式轨迹的差异造成.本文考虑点到点运动的振幅以及末端定位精度,暂不考虑由于插值点数量引起的运动过程中的振动频率的变化.

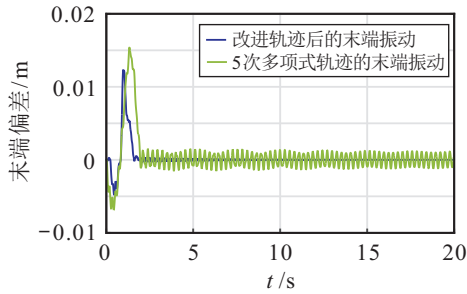


图7 优化参考轨迹前后末端振动情况对比

为了更直观地观察粒子群优化算法的优化过程,本文建立目标函数值与寻优代数之间的关系(见图8).

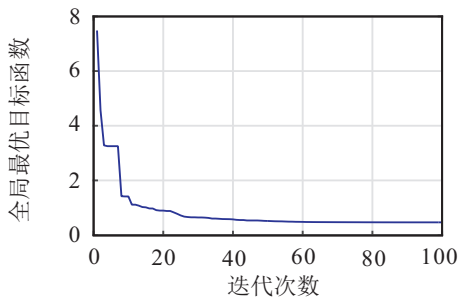


图8 粒子群算法全局最优目标函数值与迭代次数关系

从迭代次数与全局最优目标函数值之间的关系可以看出,当迭代到40次左右时,目标函数基本稳定,并且由于初始种群选择是依据5次多项式轨迹作为参考,初始全局最优目标函数便处于一个较小的位置,寻优速度较快.

4.3 权重因子仿真分析

权重因子 α 主要用于调节运动起始阶段和停止阶段在整个运动时间中的比重,即选择运动过程中振动偏差和运动停止后剩余振动的抑制侧重点.下面

比较不同取值情况下柔性臂末端振动的情况.依次取 α 的值为0.1、0.4和0.6.观察混合结构柔性臂末端振动与5次多项式参考轨迹末端振动,比较不同 α 取值所得到的优化参考轨迹的差异,如图9、图10所示.

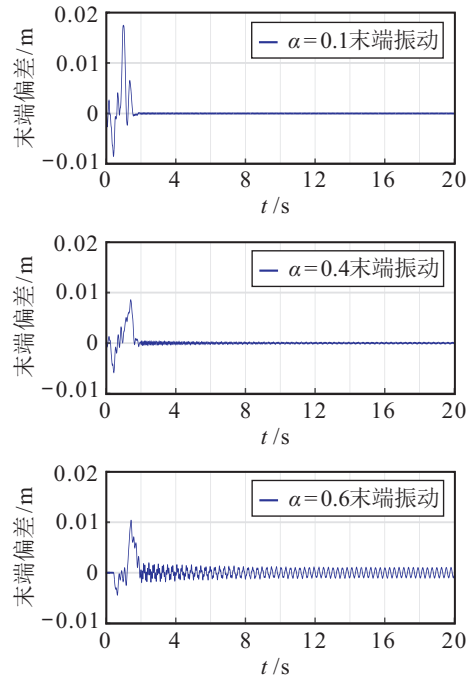


图9 不同 α 取值情况下优化参考轨迹前后末端振动情况

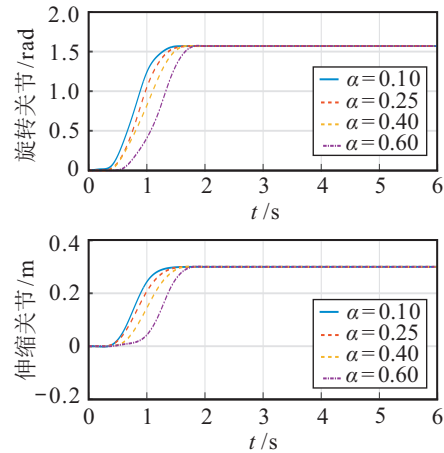


图10 不同 α 取值情况下参考轨迹对比

由实验结果可知,随着 α 的增大,起始阶段的轨迹越平缓,运动过程中的偏差越小,末端的跟踪精度逐渐提高,运动停止后的剩余振动的振幅不断增大,末端的定位精度逐渐降低.这与理论分析基本一致.但是,当 α 增大到一定程度后,运动过程后期的末端偏差又将有所增加,如图9中 $\alpha = 0.6$.主要原因是参考轨迹用于停止阶段的时间太少,导致加速度变化太快,使得末端偏差增大.

为了验证选取非均匀插值点的有效性,在其他条件相同的情况下,将选取均匀插值点和选取非均匀插值点的输入轨迹以及末端振动情况进行对比(见图11);将均匀选取插值点与非均匀选取插值点,旋转

关节和伸缩关节优化后的参考轨迹的差异进行对比(见图12)。

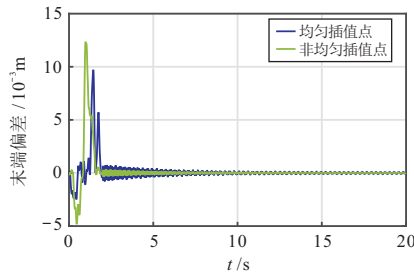


图 11 $\alpha = 0.25$ 时均匀选择插值点与非均匀选择插值点末端振动情况

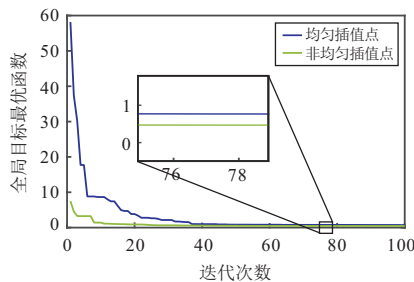


图 12 $\alpha = 0.25$ 时均匀选择插值点与修改初始种群标准差后非均匀选择插值点迭代次数

由图11分析可知,当 $\alpha = 0.25$ 时,通过选取非均匀插值点能减小混合结构柔性臂运动停止后的振幅,对剩余振动有明显的抑制效果.但是在运动过程中,非均匀选取插值点的振幅会大于均匀选取插值点,这主要是由于 α 的取值所影响的.本文主要考虑混合结构柔性臂点到点运动的定位精度,故 α 取值较小,主要抑制混合结构柔性臂的剩余振动.若要降低柔性臂在运动过程中的偏差,则可通过增大 α 的值来实现,付出的代价就是运动停止后的剩余振动增加,末端定位精度降低.运动停止后,均匀选取插值点的优化轨迹导致末端振幅大于非均匀选取插值点的优化轨迹,由此可见,均匀选取插值点会导致优化算法陷入局部最优.这种情况是由于粒子群优化算法初始种群是按照插值点在5次多项式轨迹上的正态分布选取,搜索空间仅限定在5次多项式曲线附近,无法搜索到空间中的其他区域所造成的.若均匀选择插值点需要达到非均匀选取插值点的效果,则必将扩大初始种群的选取范围,造成搜索空间变大,算法效率降低.当增大均匀选取插值点的初始搜索空间时,即增大式(39)中的标准差, $\sigma'(f(t_k)) = \min\{z(f(t_k)), z(f(t_k)) - z_f\}$,得到目标函数与迭代次数的关系如图12所示,显然收敛速度变缓,且仍然无法收敛到非均匀选取插值点的最优值.

5 结论

本文提出了一种针对混合结构柔性臂的建模和抑振轨迹规划方法.主要完成了以下工作:

1) 利用假设模态法描述混合结构柔性臂的弹性偏差,将伸缩关节分段考虑并分离刚性柔性部分,通过拉格朗日动力学方程推导出完备的动力学模型.

2) 引入权重因子构造分段映射函数,得到非均匀的插值点时刻.权重因子用于选择轨迹跟踪和剩余振动抑制的侧重点,并且能有效地减少算法的搜索空间,提高寻优算法效率.

3) 采用5次多项式作为初始寻优轨迹,通过在每个插值点上增加一个偏移量,形成一组新的插值点,并利用3次样条插值重新构造出新的轨迹.

4) 通过粒子群优化算法对增加的偏移量进行优化,达到优化轨迹的目的.粒子群优化算法的初始种群是通过初始寻优轨迹为参考的正态分布函数产生的.

5) 通过仿真实验,验证了所提出建模方法的正确性,并与5次多项式轨迹进行比较,验证了本文所提出抑振轨迹规划的有效性.选取不同的权重因子进行比较,通过实验结果分析了权重因子对抑振效果的影响.

然而,本文所做的工作仅仅是抑振轨迹规划,对混合结构柔性臂的控制并未做过多的讨论.实验过程中,选用常规的PD控制器作为旋转关节和伸缩关节的控制器,仅为了验证在同样控制器条件下不同轨迹对混合结构柔性臂末端产生振动的影响.在后续研究中,将着重对混合结构柔性臂的抑振控制算法进行研究,提出针对混合结构柔性臂更加优良效果的控制方法,在抑振轨迹规划和抑振控制两方面都能起到很好的抑振效果,提高末端的跟踪精度和定位精度.

参考文献(References)

- [1] Kiang C T, Spowage A, Yoong C K. Review of control and sensor system of flexible manipulator[J]. J of Intelligent & Robotic Systems, 2015, 77(1): 187-213.
- [2] Dwivedy S K, Eberhard P. Dynamic analysis of flexible manipulators: A literature review[J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 41(7): 749-777.
- [3] 王树新, 员今天, 石菊荣, 等. 柔性机械臂建模理论与控制方法研究综述[J]. 机器人, 2002, 24(1): 86-91. (Wang S X, Yuan J T, Shi J R, et al. A roadmap of research on modeling and control strategy for flexible manipulators[J]. Robot, 2002, 24(1): 86-91.)
- [4] Ge S S, Lee T H, Zhu G. A nonlinear feedback controller for a single-link flexible manipulator based on a finite element model[J]. J of Robotic Systems, 1997, 14(3): 165-178.
- [5] Malgaca L, Yavuz S, Akda M, et al. Residual vibration control of a single-link flexible curved manipulator[J].

- Simulation Modelling Practice and Theory, 2016, 67(1): 155-170.
- [6] 张大钧. 柔性多体系统动力学理论方法与实验研究[D]: 天津: 天津大学机械工程学院, 1991.
(Zhang D J. Research of flexible multi-body system dynamics theory and experimental[D]. Tianjin: School of Mechanical Engineering, Tianjin University, 1991.)
- [7] 休斯敦, 刘又午. 多体系统动力学[M]. 天津: 天津大学出版社, 1987: 15-22.
(Houston R, Liu Y W. Multibody dynamics[M]. Tianjin: Tianjin University Press, 1987: 15-22.)
- [8] Morales R, Feliu V, Jaramillo V. Position control of very lightweight single-link flexible arms with large payload variations by using disturbance observers[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2012, 60(4): 532-547.
- [9] Zhu G, Ge S S, Lee T H. Simulation studies of tip tracking control of a single-link flexible robot based on a lumped model[J]. Robotica, 1999, 17(1): 71-78.
- [10] Li G, Khajepour A. Robust control of a hydraulically driven flexible arm using backstepping technique[J]. J of Sound and Vibration, 2005, 280(3/4/5): 759-775.
- [11] Mirzaee E, Eghtesad M, Fazlzadeh S. Maneuver control and active vibration suppression of a two-link flexible arm using a hybrid variable structure/Lyapunov control design[J]. Acta Astronautica, 2010, 67(9): 1218-1232.
- [12] Abe A. Trajectory planning for flexible Cartesian robot manipulator by using artificial neural network: Numerical simulation and experimental verification[J]. Robotica, 2010, 29(5): 797-804.
- [13] Abe A. Residual vibration suppression for robot manipulator attached to a flexible link by using soft computing techniques[C]. 2011 IEEE Int Conf on Robotics and Biomimetics. Phuket: IEEE, 2011: 2324-2329.
- [14] Abe A, Komuro K. Minimum energy trajectory planning for vibration control of a flexible manipulator using a multi-objective optimisation approach[J]. Int J of Mechatronics and Automation, 2012, 2(4): 286-294.
- [15] Wang M, Luo J, Walter U. Trajectory planning of free-floating space robot using particle swarm optimization(PSO)[J]. Acta Astronautica, 2015, 112(1): 77-88.
- [16] Choi Y, Cheong J, Moon H. A trajectory planning method for output tracking of linear flexible systems using exact equilibrium manifolds[J]. IEEE/ASME Trans on Mechatronics, 2010, 15(5): 819-826.
- [17] 徐文福, 徐超, 孟得山. 基于粒子群优化的刚柔混合机械臂振动抑制规划[J]. 控制与决策, 2014, 29(4): 632-638.
(Xu W F, Xu C, Meng D S. Trajectory planning of vibration suppression for rigid-flexible hybrid manipulator based on PSO algorithm[J]. Control and Decision, 2014, 29(4): 632-638.)
- [18] 吴立成, 孙富春, 孙增圻, 等. 柔性空间机器人振动抑制轨迹规划算法[J]. 机器人, 2003, 25(3): 250-254.
(Wu L C, Sun F C, Sun Z Q, et al. Optimal trajectory planning of flexible space robot for vibration reducing[J]. Robot, 2003, 25(3): 250-254.)
- [19] Lou J, Wei Y, Li G, et al. Optimal trajectory planning and linear velocity feedback control of a flexible piezoelectric manipulator for vibration suppression[J]. Shock and Vibration, 2015(1): 1-11.
- [20] Chen W. Dynamic modeling of multi-link flexible robotic manipulators[J]. Computers & Structures, 2001, 79(2): 183-195.
- [21] Long T, Li E, Yang G, et al. A novel model analysis method and dynamic modelling for hybrid structure flexible manipulator[C]. The IEEE Int Conf on Mechatronics and Automation. Haerbin, 2016: 2290-2295.
- [22] Heidari H, Korayem M, Haghpanahi M, et al. Optimal trajectory planning for flexible link manipulators with large deflection using a new displacements approach[J]. J of Intelligent & Robotic Systems, 2013, 72(3/4): 287-300.
- [23] Kim D H. A swarm system design based on a modified particle swarm algorithm for a self-organizing scheme[J]. Advanced Robotics, 2006, 20(8): 913-932.
- [24] 孙波, 陈卫东, 席裕庚. 基于粒子群优化算法的移动机器人全局路径规划[J]. 控制与决策, 2005, 20(9): 1052-1060.
(Sun B, Chen W D, Xi Y G. Particle swarm optimization based global path planning for mobile robots[J]. Control and Decision, 2005, 20(9): 1052-1060.)
- [25] Kalyoncu M. Mathematical modelling and dynamic response of a multi-straight-line path tracing flexible robot manipulator with rotating-prismatic joint[J]. Applied Mathematical Modelling, 2008, 32(6): 1087-1098.

(责任编辑: 李君玲)