

可变抽样区间二元双抽样广义方差控制图

褚 巍¹, 蔡安江^{1†}, 李 玲¹, 张 卓², 杨 威²

(1. 西安建筑科技大学 机电工程学院, 西安 710055; 2. 全球能源
互联网研究院 先进输电技术国家重点实验室, 北京 102209)

摘要: 将可变抽样区间特性融入二元双抽样广义方差控制图, 构建可变抽样区间二元双抽样广义方差控制图及其监控方法. 采用马尔科夫链方法完成控制图调整的平均报警时间和平均报警时间性能指标的计算, 进而建立用控制图参数设计的优化模型, 并通过遗传算法完成模型求解. 通过与可变抽样区间的二元广义方差合成控制图、二元双抽样广义方差控制图以及基于 Cornish-Fisher 修正的二元双抽样广义方差控制图的判异性能对比, 验证该控制图的优势, 并通过加工实例对性能优势进行进一步说明.

关键词: 可变抽样区间; 二元双抽样广义方差控制图; 调整的平均报警时间; 马尔科夫链; 遗传算法
中图分类号: TP272 **文献标志码:** A

Bivariate double sampling generalized variance control chart with variable sampling interval

CHU Wei¹, CAI An-jiang^{1†}, LI Ling¹, ZHANG Zhuo², YANG Wei²

(1. Mechatronic School, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China; 2. State Key Laboratory for Advanced Electric Transmission Technology, Global Energy Interconnection Research Institute, Beijing 102209, China)

Abstract: By introducing the variable sampling interval feature into the bivariate double sampling generalized variance control chart, a bivariate double sampling generalized variance control chart and its monitoring method are developed. The Markov chain approach is used to calculate the adjusted average time to signal and average time to signal performances of the control chart. Then the design of the new control chart is defined and formulated as an optimization problem, which is solved by using a genetic algorithm. In comparison with the bivariate synthetic generalized variance control chart with variable sampling interval, original bivariate double sampling generalized variance control chart and bivariate double sampling generalized variance control chart based on Cornish-Fisher correction, the proposed control chart offers a better adjusted average time to signal performance. Furthermore, the advantage of the proposed control chart is illustrated with by an example.

Keywords: variable sampling interval; bivariate double sampling generalized variance control chart; adjusted average time to signal; Markov chain; genetic algorithm

0 引言

生产过程中多个质量特性间往往存在相关性, 单维度控制图并不能反映这种关系, 因此, 多元质量特性控制图^[1]应运而生并逐渐成为研究的热点. 近年来, 研究成果多集中于多元质量特性均值控制图^[1-5], 如多元 T^2 控制图、可变参数的多元 T^2 控制图、多元双抽样 T^2 控制图及其合成控制图等. 然而, 随着制造要求和精度的不断提高, 监控多元质量特性波动情况

的重要性逐渐突显出来^[6].

在多元质量特性波动控制图的研究方面: Runger 等^[7]研究了通过样本协方差矩阵进行过程监控, 该方法计算步骤繁琐, 复杂度较高; 此外, 他们还研究了基于样本广义方差的质量特性波动监控方法^[7], 与前一种方法相比, 后者计算直接, 结果直观, 但控制图参数都为固定值; Tang 等^[8]采用正交矩阵对样本协方差矩阵进行转化, 每个质量特性分别进行监测, 监控

收稿日期: 2017-02-25; 修回日期: 2017-06-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目(51475352, 51305327); 陕西省教育厅自然科学基金项目(2013JK1010).

责任编委: 段志生.

作者简介: 褚巍(1976—), 男, 博士, 从事质量控制、制造物联网技术的研究; 蔡安江(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 从事数字化设计制造技术、工业企业资源管理优化等研究.

†通讯作者. E-mail: 273997932@qq.com

程序复杂; Aparisi 等^[9]研究了二元自适应广义方差控制图, 包括两套抽样样本数量和控制界限参数, 与 Runger 等研究的控制图相比, 监控灵活性高, 性能更优; Grigoryan 等^[6]研究了多元双抽样广义方差控制图, 两阶段抽样可在同一个采样点进行, 监控灵活性和判断准确性更高; Ghute 等^[10]研究了多元广义方差合成控制图, 合成控制图由多元固定参数广义方差控制图和合格链长控制图组成, 判异性能对比结果验证了合成控制图相比于传统多元广义方差控制图以及二元自适应广义方差控制图的优势, 但未与多元双抽样广义方差控制图进行对比; Ming 等^[11]在 Ghute 等工作的基础上研究了可变抽样区间的多元广义方差合成控制图, 并通过与多元广义方差合成控制图以及多元双抽样广义方差控制图的判异性能对比验证了所研究控制图的优势; 褚崑等^[12]采用 Cornish-Fisher 展开算法对二元双抽样 (BDS) 广义方差控制图进行了修正, 改善了控制图的虚发报警概率。

虽然 Ghute 等没有对比多元广义方差合成控制图和多元双抽样广义方差控制图, 但从文献 [6, 10] 的数据可以看出, 在二元质量特性波动监测方面, 多元双抽样广义方差控制图的性能要优于多元广义方差合成控制图, 而可变抽样区间的多元广义方差合成控制图又优于多元双抽样广义方差控制图。基于 Cornish-Fisher 修正的 BDS 广义方差控制图改善了控制图的虚发报警概率, 但判异性能与修正前基本持平。因此, 有理由推断, 如果 BDS 广义方差控制图的抽样区间可变, 则该控制图的性能可能要优于可变抽样区间的二元广义方差合成控制图。

基于以上推断, 本文研究可变抽样区间的二元双抽样 (Bivariate double sampling with variable sampling interval, BDSVSI) 广义方差控制图, 构建控制图的监控方法、参数设计方法以及性能指标的计算方法, 并通过与可变抽样区间的二元 (BVS) 广义方差合成控制图、BDS 广义方差控制图以及基于 Cornish-Fisher 修正控制图的判异性能对比来验证本文所研究控制图的性能优势。

1 BDSVSI 广义方差控制图

BDSVSI 广义方差控制图如图 1 所示, 包括 8 个设计参数: $n_1, n_2, h_1, h_2, w_t, w_n, k_1, k_2$ 。其中: n_1, n_2 分别是双抽样第 1 阶段和第 2 阶段的抽样样本数量, h_1, h_2 是两个抽样区间 ($h_1 > h_2$), w_t, w_n 分别是切换抽样区间和抽样样本数量的预警界限, k_1, k_2 分别是双抽样控制图第 1 阶段和第 2 阶段的控制界限系数。

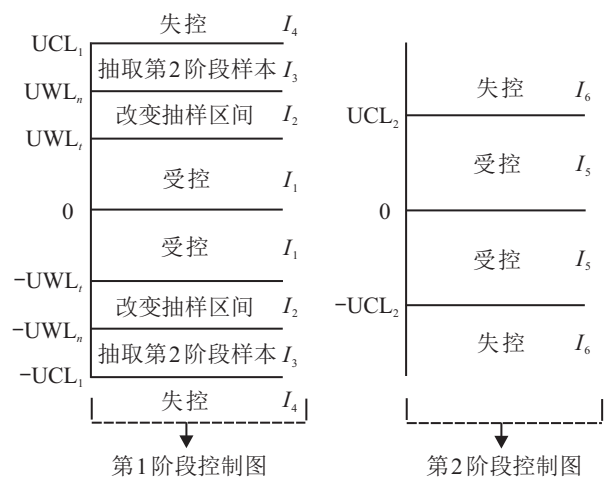


图 1 BDSVSI 广义方差控制图

BDSVSI 广义方差控制图监控程序如下:

1) 确定第 1 阶段样本的样本大小 n_1 。根据文献 [6], 设样本统计量 Y 服从二元标准正态分布, 可得

$$Y = \frac{|S_1| - b_1 |\Sigma_0|}{b_2^{1/2} |\Sigma_0|} \quad (1)$$

其中: $|S_1|$ 为第 1 阶段样本广义方差, $|\Sigma_0|$ 为过程受控状态下的广义方差,

$$b_1 = \frac{\prod_{i=1}^2 (n_1 - i)}{(n_1 - 1)^2},$$

$$b_2 = \frac{\prod_{i=1}^2 (n_1 - i) \left[\prod_{j=1}^2 (n_1 - j + 2) - \prod_{j=1}^2 (n_1 - j) \right]}{(n_1 - 1)^4}.$$

2) 如果 Y 在第 1 阶段受控区域 $I_1[-UWL_t, UWL_t]$ 中, 则表示过程受控, 且间隔较长的时间 h_1 后再次进行第 1 阶段抽样。

3) 如果 Y 在怀疑区域 $I_2[-UWL_n, -UWL_t)$ 或 $(UWL_t, UWL_n]$ 中, 则间隔较小的时间 h_2 后再次进行第 1 阶段抽样。

4) 如果 Y 在失控区域 $I_4(-\infty, -UCL_1)$ 或 $(UCL_1, +\infty)$ 中, 则表示过程失控。

5) 如果 Y 在怀疑区域 $I_3[-UCL_1, -UWL_n)$ 或 $(UWL_n, UCL_1]$ 中, 则抽取第 2 阶段样本, 确定样本大小 n_2 , 并计算两阶段联合样本统计量 Y_1 , 即

$$Y_1 = \frac{|S_{12}| - b_{11} |\Sigma_0|}{b_{22}^{1/2} |\Sigma_0|} \quad (2)$$

6) 如果 Y_1 在第 2 阶段受控区域 $I_5[-UCL_2, UCL_2]$ 中, 则表示过程受控, 且间隔较小的时间 h_2 后再次进行第 1 阶段抽样, 否则表示过程失控。

2 BDSVSI 广义方差控制图的性能指标

对于可变抽样区间控制图, 控制图性能评估是在平均报警时间 (ATS) 相同的前提下对比调整的平均

报警时间(AATS)^[13].

文献[13]中介绍了一种单变量自适应控制图的性能指标计算方法,该方法基于马尔科夫链算法,计算简便. 本文将该方法应用于BDSVSI广义方差控制图ATS和AATS指标的计算,具体如下.

根据文献[6],对于样本大小为 n 的二元随机变量,样本广义方差 $|S|$ 的分布可表示为

$$|S| \sim \frac{|\Sigma_0|(\chi_{2n-4}^2)^2}{4(n-1)^2}.$$

设置如下3个转移状态:

状态1:过程受控并且样本点落在中心区域 I_1 ,间隔较长的时间 h_1 再次进行抽样;

状态2:过程受控并且样本点落在怀疑区域 $I_2 + I_3 \cap I_5$,间隔较小的时间 h_2 再次进行抽样;

状态3:过程失控.

由此得到剔除吸收态的转移概率矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} p_{11}(\lambda) & p_{12}(\lambda) \\ p_{21}(\lambda) & p_{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其中 $p_{ij}(\lambda)$ 表示对于给定的偏差系数 λ 的状态转移概率. 设 $|\Sigma_0|$ 和 $|\Sigma_1|$ 分别为受控状态和失控状态的二元广义方差, $\lambda = |\Sigma_1|/|\Sigma_0|$ 表示过程失控程度的大小, $n = n_1+n_2$, $x_1 \sim \chi_{2n_1-4}^2$, $x_2 \sim \chi_{2n_2}^2$, $x_1 + x_2 \sim \chi_{2n_1-4}^2 + \chi_{2n_2}^2 = \chi_{2n-4}^2$, $f_{\chi_{2n_1-4}^2}(\cdot)$ 和 $f_{\chi_{2n_2}^2}(\cdot)$ 分别表示自由度为 $2n_1-4$ 和 $2n_2$ 的卡方分布概率密度函数,则相应的概率计算公式为

$$p_{11} = p_{21} = P(Y \in I_1 | |\Sigma_1| = \lambda|\Sigma_0|) = \int_{2^{(n_1-1)}\sqrt{\frac{b_1-UWL_t b_2^{1/2}}{\lambda}}}^{2^{(n_1-1)}\sqrt{\frac{b_1+UWL_t b_2^{1/2}}{\lambda}}} f_{\chi_{2n_1-4}^2}(x_1)dx_1, \quad (4)$$

$$p_{12} = p_{22} =$$

$$P(Y \in I_2 | |\Sigma_1| = \lambda|\Sigma_0|) +$$

$$P((Y \in I_3) \cap (Y_1 \in I_5) | |\Sigma_1| = \lambda|\Sigma_0|) =$$

$$\int_{2^{(n_1-1)}\sqrt{\frac{b_1-UWL_n b_2^{1/2}}{\lambda}}}^{2^{(n_1-1)}\sqrt{\frac{b_1+UWL_n b_2^{1/2}}{\lambda}}} f_{\chi_{2n_1-4}^2}(x_1)dx_1 - \int_{2^{(n_1-1)}\sqrt{\frac{b_1-UWL_t b_2^{1/2}}{\lambda}}}^{2^{(n_1-1)}\sqrt{\frac{b_1+UWL_t b_2^{1/2}}{\lambda}}} f_{\chi_{2n_1-4}^2}(x_1)dx_1 + \int_{2^{(n_1-1)}\sqrt{\frac{b_1-UWL_n b_2^{1/2}}{\lambda}}}^{2^{(n_1-1)}\sqrt{\frac{b_1-UCL_1 b_2^{1/2}}{\lambda}}} F f_{\chi_{2n_1-4}^2}(x_1)dx_1 + \int_{2^{(n_1-1)}\sqrt{\frac{b_1+UCL_1 b_2^{1/2}}{\lambda}}}^{2^{(n_1-1)}\sqrt{\frac{b_1+UWL_n b_2^{1/2}}{\lambda}}} F f_{\chi_{2n_1-4}^2}(x_1)dx_1, \quad (5)$$

其中

$$F = \int_{2^{(n_1-1)}\sqrt{\frac{b_{11}-UCL_2 b_{22}^{1/2}}{\lambda}}}^{2^{(n_1-1)}\sqrt{\frac{b_{11}+UCL_2 b_{22}^{1/2}}{\lambda}}} f_{\chi_{2n_2}^2}(x_2)dx_2.$$

设 $h = (h_1, h_2)$ 为抽样间隔向量, \mathbf{I} 是二阶单位阵, $r^T = (r_1, r_2)$ 为稳态概率向量,如果过程受控,则可通过受控区域和怀疑区域的概率计算 r^T . 设 P 是受控过程的概率矩阵,即

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 1-p_1 \\ p_2 & 1-p_2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

其中: p_i 为受控条件下样本广义方差落在中心区域的概率; $p_1 = p_2$,即

$$p_1 = p_2 = \frac{p_{11}(\lambda=1)}{p_{11}(\lambda=1) + p_{12}(\lambda=1)}. \quad (7)$$

r^T 需要满足两个条件: $r^T \times P = r^T$ 和 $r_1 + r_2 = 1$,因此

$$r^T = \left(\frac{p_2}{1-p_1+p_2}, \frac{1-p_1}{1-p_1+p_2} \right). \quad (8)$$

BDSVSI广义方差控制图的ATS和AATS指标可通过马尔科夫链方法计算得到,即

$$ATS(\lambda) = r^T(I-Q)^{-1}h, \quad (9)$$

$$AATS(\lambda) = \bar{r}^T[(I-Q)^{-1}h - 0.5h]. \quad (10)$$

其中: $\bar{r}^T = (\bar{r}_1, \bar{r}_2)$ 为起始概率向量,且 $\bar{r}^T = r_i h_i / (r_1 h_1 + r_2 h_2)$, $i = 1, 2$,因此

$$\bar{r}^T = \left(\frac{p_2 h_1}{p_2 h_1 + (1-p_1)h_2}, \frac{(1-p_1)h_2}{p_2 h_1 + (1-p_1)h_2} \right). \quad (11)$$

3 BDSVSI广义方差控制图参数设计

控制图的设计主要是控制图参数的设计,控制图参数计算采用优化方法获得^[14]. BDSVSI控制图包括8个参数: n_1 、 n_2 、 h_1 、 h_2 、 UCL_1 、 UCL_2 、 UWL_t 、 UWL_n . 参考文献[15],这里以AATS为目标函数. 为了便于与其他控制图进行性能对比,将以下两点纳入约束条件:1) 受控状态下的ATS采用统一值 τ ,从而保证各控制图的虚发报警概率维持在同一水平;2) 平均抽样样本数量 n_0 和平均抽样区间 h_0 也与其他控制图保持一致,考虑到抽样区间不可变的控制图, h_0 通常取值为1. 由此可得优化模型如下:

$$\begin{aligned} & \min AATS(\lambda \neq 1); \\ & \text{s.t. } ATS(\lambda = 1) = \tau, \\ & E(n | \lambda = 1) = n_0, \\ & E(h | \lambda = 1) = h_0, \\ & h_1 > h_0 > h_2 > 0, \\ & n_2 > n_0 > n_1 > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} UCL_1 > UWL_n > UWL_t > 0, \\ UCL_1 > UCL_2 > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

受控状态下控制图的平均抽样样本数量为

$$E(n | \lambda = 1) = n_1 + n_2 P(Y \in I_3); \quad (13)$$

受控状态下控制图的平均采样间隔为

$$E(h | \lambda = 1) = \frac{ATS(\lambda = 1)}{ARL(\lambda = 1)}, \quad (14)$$

其中 $ARL(\lambda = 1)$ 为控制图受控平均运行长度,有

$$ARL(\lambda = 1) = \frac{1}{p_{11}(\lambda = 1) + p_{12}(\lambda = 1)}.$$

本文采用遗传算法求解 BDSVSI 控制图参数,设计优化模型. 参考文献 [6,16], 设置种群大小为 1000, 交叉概率为 0.5, 变异概率为 0.06, 式 (12) 中的目标函数及非线性相等约束条件通过 Matlab 程序实现, 并通过 Matlab2012b 遗传算法工具箱完成计算, 相关结果见第 4 节.

4 性能对比

沿用文献 [11] 中控制图对比时的参数数据, ATS 为 370.37, λ 分别为 1.1、1.2、1.3、1.5、2.0、3.0、5.0, 抽样样本数量 n 分别为 5、7、10. 不同 λ 和 n 值所对应的 BDSVSI 广义方差控制图、BVSII 广义方差合成控制图、BDS 广义方差控制图及其基于 Cornish-Fisher 修正的控制图 (简称 CFBDS 广义方差控制图) 的 AATS 数据见表 1~表 3. 其中: BVSII 广义方差合成控制图 AATS 数据直接来源于文献 [11]; 为了与 ATS 指标对应, 设 BDS 广义方差控制图及其修正控制图的受控平均运行长度为 370.37, 两控制图的失控平均运行长度分别根据文献 [6] 和 [12] 的方法并通过 Matlab 程序

表 1 $n = 5$ 时的 AATS 数据对比

AATS	λ						
	1.1	1.2	1.3	1.5	2.0	3.0	5.0
n_1	4	4	3	3	4	4	4
n_2	27	25	26	24	16	13	10
UCL_1	10.817	10.822	10.693	10.001	9.606	9.301	8.611
UWL_n	1.953	1.942	1.603	1.567	1.511	1.338	1.192
UWL_t	0.869	0.864	0.847	0.828	0.789	0.702	0.663
UCL_2	2.128	2.121	2.137	2.192	2.243	2.265	2.401
h_1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.2	1.2	1.2
h_2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
BDSVSI	100.38	41.6	20.74	7.68	2.78	1.59	1.31
BDS	119.87	52.78	28.12	11.58	3.87	2.01	1.40
CFBDS	117.38	53.53	29.09	11.05	3.79	1.93	1.42
BVSI	111.16	45.33	23.52	9.86	3.57	1.88	1.36

表 2 $n = 7$ 时的 AATS 数据对比

AATS	λ						
	1.1	1.2	1.3	1.5	2.0	3.0	5.0
n_1	6	6	6	6	6	6	6
n_2	31	30	30	27	21	17	12
UCL_1	10.782	10.667	10.669	9.985	9.586	9.102	8.573
UWL_n	1.841	1.837	1.693	1.565	1.522	1.323	1.188
UWL_t	0.861	0.854	0.833	0.817	0.789	0.691	0.654
UCL_2	2.123	2.131	2.094	2.185	2.227	2.249	2.361
h_1	1.1	1.1	1.1	1.1	1.2	1.2	1.3
h_2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
BDSVSI	97.56	39.41	19.06	6.91	2.33	1.33	1.2
BDS	117.32	46.96	25.03	10.22	3.48	1.81	1.33
CFBDS	116.43	45.67	26.03	10.57	3.38	1.84	1.35
BVSI	108.51	42.47	21.58	8.78	3.14	1.72	1.29

表 3 $n = 10$ 时的 AATS 数据对比

AATS	λ						
	1.1	1.2	1.3	1.5	2.0	3.0	5.0
n_1	9	8	9	9	9	9	9
n_2	37	37	36	31	24	19	12
UCL_1	10.772	10.532	10.386	9.964	9.318	8.801	8.273
UWL_n	1.833	1.777	1.692	1.574	1.523	1.333	1.082
UWL_t	0.863	0.836	0.837	0.807	0.794	0.676	0.612
UCL_2	2.12	2.203	2.134	2.155	2.208	2.182	2.297
h_1	1.1	1.1	1.1	1.2	1.2	1.3	1.3
h_2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
BDSVSI	95.13	37.81	16.03	6.12	1.99	1.26	1.16
BDS	113.11	46.82	24.93	9.07	3.34	1.59	1.26
CFBDS	115.06	45.21	25.25	9.36	3.05	1.62	1.30
BVSI	104.74	39.29	19.15	7.48	2.68	1.54	1.21

计算得到; BDSVSI 广义方差控制图 AATS 数据通过本文第 3 节方法计算得到.

由仿真数据可知, 平均抽样样本数量为 5、7 和 10 时, BDSVSI 广义方差控制图相比于 BVSI 广义方差合成控制图的 AATS 平均改善比例为 14.02%, 相比于 BDS 广义方差控制图的 AATS 平均改善比例为 23.04%, 相比于 CFBDS 广义方差控制图的 AATS 平均改善比例为 22.96%. 仿真结果验证了之前的推断, BDSVSI 广义方差控制图性能更优.

5 实例研究

下面通过加工实例进一步说明 BDSVSI 广义方差控制图的优势. 加工对象是某种复合材料绝缘拉

杆,主要工艺是在真空状态下通过圆柱形模具浇注成型. 流量和温度是成型过程中两个主要指标,且存在相互关联性,流量参数要求为 $45 \pm 1 \text{ ml/min}$,温度参数要求为 $50 \pm 2^\circ$. 对两个联合指标分别应用BDSVSI广义方差控制图及BVSIGI广义方差合成控制图进行监测.

由于过程广义方差 $|\Sigma_0|$ 未知,通过80组实测数据对其进行估计,部分数据如表4所示. 其中: X_1 表示流量, X_2 表示温度. 由表4数据可得样本广义方差 $|S| = 0.0867$,进而得到过程广义方差的无偏估计 $|\widehat{\Sigma}_0| = 0.08781$. 再根据实测样本广义方差,并由式(1)和(2)分别计算得到BDSVSI广义方差控制图第1阶段及两阶段联合样本统计量,BVSIGI广义方差合成控制图样本统计量根据文献[11]得到.

表4 加工实例二元质量特性实测数据

序号	X_1	X_2
1	45.38	50.2
2	45.75	51.4
3	45.41	48.5
4	44.17	49.9
5	45.18	50.1
6	44.65	48.7
7	44.31	50.4
8	44.88	49.8
⋮		
73	45.25	49.4
74	45.08	49.3
75	44.98	50.7
76	45.35	50.6
77	44.81	50.5
78	45.28	50.1
79	45.05	50.6
80	45.27	50.3

选择平均抽样样本数量 $n = 5$. 对于BDSVSI广义方差控制图,从表1中选择 $\lambda = 3.0$ 时的控制图参数;对于BVSIGI广义方差合成控制图,从文献[11]中选择对应的控制图参数,合成控制图中广义方差控制图的抽样样本数量 $n = 5$,切换抽样区间参数 $UWL_t = 1.278$ 、控制界限参数 $UCL = 2.2604$ 、长抽样区间 $h_{S1} = 1.2$ 、短抽样区间 $h_{S2} = 0.1$,合成控制图中合格链长控制图的切换抽样区间参数 $w = 13$ 、控制界限参数 $L = 5$ 、长抽样区间 $h_{CRL1} = 1.2$ 、短抽样区间 $h_{CRL2} = 0.1$. 设最小抽样时间间隔为1 min,最大抽样时间间隔为12 min.

监测数据如表5所示,两控制图的起始监测时间一致,各自的第1组样本统计量都处于各自的受控区域,因此都间隔1 min进行第2次抽样. BDSVSI广义

方差控制图第1阶段的第2组和第3组样本统计量处于切换抽样区域的区域,因此分别间隔1 min进行第3次和第4次抽样;BVSIGI广义方差合成控制图第2和第3组样本统计量还是处于受控区域,因此分别间隔12 min进行第3次和第4次抽样. BDSVSI广义方差控制图第1阶段的第4组样本统计量处于切换抽样阶段的区域,因此在同一个采样点进行第2阶段抽样,两阶段联合样本统计量处于第2阶段受控区域,所以间隔1 min进行第5次抽样;BVSIGI广义方差合成控制图的第4组样本统计量处于切换抽样区域的区域,因此间隔1 min进行第5次抽样. BDSVSI广义方差控制图第1阶段的第5组样本统计量处于切换抽样阶段的区域,进行第2阶段抽样,两阶段联合样本统计量处于第2阶段失控区域,因此判定生产过程异常;BVSIGI广义方差合成控制图的第5组样本统计量也处于失控区域,而且从开始抽样到失控报警的采样点数为5,等于合成控制图中合格链长控制图的控制界限,因此可以确定此时生产过程异常. 从开始采样到异常报警,两控制图都经历了5个采样点,但BDSVSI广义方差控制图的累计抽样时间(15 min)小于BVSIGI广义方差合成控制图(37 min),因此性能更优.

表5 $\lambda = 3.0$ 时两控制图监测数据

实测数据序号	1	2	3	4	5
第1阶段样本广义方差	0.0757	0.1485	0.1375	0.2135	0.2842
两阶段联合样本广义方差				0.162	0.1961
BDSVSI 广义方差控制图					
第1阶段样本统计量	0.1916	1.0056	0.8829	1.7334	2.5232
两阶段联合样本统计量				1.8624	2.6358
抽样区间/min	0	12	1	1	1
累计抽样时间/min	0	12	13	14	15
BVSIGI 广义方差控制图					
样本广义方差	0.0816	0.1485	0.1384	0.2020	0.2729
样本统计量	0.1950	1.0241	0.8988	1.6885	2.5665
抽样区间/min	0	12	12	12	1
累计抽样时间/min	0	12	24	36	37

6 结论

本文构建了BDSVSI广义方差控制图及其监控方法,完成了控制图AATS和ATS性能指标的计算以及控制图的参数设计.仿真结果表明,与BVSI广义方差控制图、BDS以及CFBDS广义方差控制图对比,BDSVSI广义方差控制图性能更优.最后通过实例研究对该性能优势作了进一步说明.

鉴于BDSVSI广义方差控制图的优势,后续工作可以向二元以上的多元可变抽样区间双抽样广义方差控制图进行扩展;或者将BDSVSI广义方差控制图与合格链长控制图相结合,进一步改善控制图的判异性能.

参考文献(References)

- [1] Bersimis S, Psarakis S, Panaretos J. Multivariate statistical process control charts: An overview[J]. *Quality and Reliability Engineering*, 2007, 23(5): 517-543.
- [2] Shangary S, Wang S. The design and performance of the multivariate synthetic- T control chart[J]. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 2009, 38(2): 173-192.
- [3] Seif A, Faraz A, Saniga E, et al. A statistically adaptive sampling policy to the Hotelling's T^2 control chart: Markov chain approach[J]. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 2016, 45(13): 3919-3929.
- [4] Champ C W, Aparisi F. Double sampling Hotelling's T^2 charts[J]. *Quality and Reliability Engineering Int*, 2008, 24(2): 153-166.
- [5] Khoo M B C, Zhang W, Castagliola P, et al. A multivariate synthetic double sampling T^2 control chart[J]. *Computers and Industrial Engineering*, 2013, 64(1): 179-189.
- [6] Grigoryan A, He D. Multivariate double sampling $|S|$ charts for controlling process variability[J]. *Int J of Production Research*, 2005, 43(4): 715-730.
- [7] Runger G C, Alt F B, Montgomery D C. Contributors to a multivariate statistical process control chart signal[J]. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 1996, 25(10): 2203-2213.
- [8] Tang P F, Barnett N S. Dispersion control for multivariate processes[J]. *Australian and New Zealand J of Statistics*, 2010, 38(3): 235-251.
- [9] Aparisi F, Jabaloyes J, Carrión A. Generalized variance chart design with adaptive sample sizes: The bivariate case[J]. *Communication in Statistics—Simulation and Computation*, 2001, 30(4): 931-948.
- [10] Ghute V B, Shirke D T. A multivariate synthetic control chart for process dispersion[J]. *Quality Technology and Quantitative Management*, 2008, 5(3): 271-288.
- [11] Ming H L, Michael B C K. Multivariate synthetic $|S|$ control chart with variable sampling interval[J]. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, 2015, 44(4): 924-942.
- [12] 褚巍,蔡安江,李玲.基于Cornish-Fisher修正的二元双抽样广义方差控制图[J]. *计算机集成制造系统*, 2016, 22(12): 2819-2826.
(Chu W, Cai A J, Li L. An improved bivariate double sampling generalized variance control chart based on Cornish-Fisher correction[J]. *Computer Integrated Manufacturing Systems*, 2016, 22(12): 2819-2826.)
- [13] Lin Y C, Chou C Y. Non-normality and the variable parameters X control charts[J]. *European J of Operational Research*, 2007, 176(1): 361-373.
- [14] Djauhari M A. Improved monitoring of multivariate process variability[J]. *J of Quality Technology*, 2005, 37(1): 32-39.
- [15] Lee P H, Chang Y C, Torng C C. A design of S control charts with a combined double sampling and variable sampling interval scheme[J]. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 2012, 41(1): 153-165.
- [16] 褚巍,孙树栋,李彬.双抽样均值-标准差联合控制图的构建及参数设计[J]. *计算机集成制造系统*, 2008, 14(7): 1281-1289.
(Chu W, Sun S D, Li B. Configuration and parameters design of double sampling mean-standard deviation combined control charts[J]. *Computer Integrated Manufacturing Systems*, 2008, 14(7): 1281-1289.)

(责任编辑:李君玲)