

时滞系统的完全稳定性研究综述

李旭光[†], 张颖伟, 冯 琳

(东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110004)

摘 要: 时滞系统的完全稳定性问题是控制领域中的一个基础理论问题, 长期以来受到了人们的关注. 然而, 该问题非常复杂, 人们往往存在一些不正确的理解, 目前国内外尚未见到专门关于这一问题的综述性文献. 对此, 从基础知识、现有方法回顾、技术难点、求解思路等方面对时滞系统完全稳定性问题做一个全面、直观的介绍. 最后, 介绍一种最近提出的分析方法——频域扫描框架. 在该框架下, 时滞系统完全稳定性问题能够得到完整的解决.

关键词: 时滞系统; 完全稳定性; 频域扫描框架; 渐近行为; 一致性

中图分类号: TP273 文献标志码: A

Survey on complete stability study for time-delay systems

LI Xu-guang[†], ZHANG Ying-wei, FENG Lin

(College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: The complete stability of time-delay systems is a fundamental academic problem in the control field, which has attracted wide attention for a long time. However, people may tend to have some incorrect understanding of the complete stability. In the open literature, no dedicated survey paper has been reported so far concerning this topic. In this survey paper, the complete stability of time-delay systems is reviewed in terms of preliminaries, existing results, technical difficulties, and the idea of solution. Finally, a recently-established tool, the new frequency-sweeping framework, is introduced. Within this framework, the complete stability is systematically solved for the first time.

Keywords: time-delay systems; complete stability; frequency-sweeping framework; asymptotic behavior; invariance property

0 引 言

时滞系统的完全稳定性是控制学科中的一个经典理论问题, 它的解对研究很多时滞系统稳定性问题具有指导性作用. 一直以来, 它是国际上明确承认的一个 Open problem. 例如, 文献 [1] 中前言部分指出: “Note that if the stability characterization in the finite-dimensional linear case is completely known, the problem is still open for general(linear) delay systems”.

许多文献(根据时域/频域方法区分)将分析时滞系统完全稳定性的方法归类为频域方法. 然而作者认为, 这样的分类并不十分准确. 因为分析时滞系统完全稳定性必须要研究其无穷维谱的渐近行为, 这涉及一些棘手的数学问题. 客观地说, 想要较为系统地了解这个问题并不容易. 目前尚未见到专门介绍时

滞系统完全稳定性问题的综述论文.

作者认为, 现有文献可能存在如下几方面情况, 不利于人们了解时滞系统完全稳定性问题的研究.

1) 现有与时滞系统完全稳定性相关的书籍几乎全部为欧美学者编著, 如文献 [2-4]. 客观地说, 这些专著大多使用数学性较强的语言, 非数学专业的读者理解起来会很吃力, 而且对这些书中一部分研究内容未必真正感兴趣.

2) 现有与时滞系统完全稳定性相关的综述性论文同样很少. 这里可以参考文献 [5-6], 尤其文献 [6] 主要介绍频域框架下的稳定性研究, 与完全稳定性问题更加关联. 然而, 文献 [6] 主要侧重介绍应用背景及针对简单情况(多为标量时滞系统)的分析方法和结果. 对于真正想了解某一具体问题(尤其完全稳定性

收稿日期: 2017-07-03; 修回日期: 2017-09-11.

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(61473065); 国家自然科学基金重点项目(61733003); 东北大学重点科技创新项目(N160402001).

责任编辑: 张焕水.

作者简介: 李旭光(1980—), 男, 副教授, 博士, 从事时滞系统的研究; 张颖伟(1969—), 女, 教授, 博士生导师, 从事过程建模、监控和优化等研究.

[†]通讯作者. E-mail: masdanlee@163.com

问题)及求解方法的帮助和启发有限.

3) 实事求是地讲,在时滞系统完全稳定性的研究上,过去一直是欧美学者为研究主导(国内相关成果非常少).但是,近些年来通过研究发现,一些国外学者的“经典”方法存在这样或那样的不足或缺陷,甚至对后来的研究产生误导效果.

鉴于上述问题,本文将用通俗易懂的语言(尽可能少用专业性强的术语),从解决问题的角度提炼核心知识点,并给出一些有代表性的例子直观讲解,希望读者可在短时间内较全面地了解时滞系统完全稳定性问题及求解方法.

本文数学符号如下:

$\mathbf{R}(\mathbf{R}_+)$ 表示(正)实数集合, \mathbf{C} 表示复数集合.

$\mathbf{Z}, \mathbf{N}, \mathbf{N}_+$ 分别表示整数集合、自然数集合、正整数集合.

\mathbf{C}_- 与 \mathbf{C}_+ 分别表示复平面的左半平面与右半平面.

\mathbf{C}_0 表示虚轴, ∂D 表示单位圆.

ε 为一个充分小的正实数(主要用来表示 λ 和 τ 的相关任意小变化: $\Delta\lambda = \pm \varepsilon j$ 和 $\Delta\tau = \pm \varepsilon$).

\mathbf{I} 为单位矩阵.

$\det(\cdot)$ 表示行列式运算.

对于一个 $\lambda \in \mathbf{C}$, $\text{Re}(\lambda)$ 和 $\text{Im}(\lambda)$ 分别表示 λ 的实部和虚部.

对于一个函数 $\varphi(x)$, 当 $x = x^*$ 时 $\text{ord}(\varphi(x)) = \kappa$ 表示 $\frac{d^i \varphi(x)}{dx^i} = 0 (i = 0, 1, \dots, \kappa - 1), \frac{d^\kappa \varphi(x)}{dx^\kappa} \neq 0$.

对于一个 $\gamma \in \mathbf{R}$, $[\gamma]$ 表示一个不小于 γ 的最小整数.

1 时滞系统完全稳定性问题概述

时滞系统在许多学科中经常遇到和研究的一类动态系统.一方面,时滞现象客观存在于现实世界几乎所有动态系统中.另一方面,在对动态系统建模时,有时人们会“主动地”引入时滞参数,从而简化一个复杂的动态系统的数学模型.

1.1 问题描述

本文主要考虑如下时滞系统:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{\ell=1}^m A_\ell x(t - \ell\tau). \quad (1)$$

其中: $A_0, \dots, A_m (m \in \mathbf{N}_+)$ 为 $r \times r$ 维实常数矩阵, $\tau \geq 0$ 为时滞参数.

注1 形如式(1)的系统称为retarded型时滞系统.本文介绍的主要结果可扩展至一些更复杂的时滞系统(见本文第7节).

时滞系统(1)的特征函数为

$$f(\lambda, \tau) = \det\left(\lambda \mathbf{I} - \sum_{\ell=0}^m A_\ell e^{-\ell\tau\lambda}\right), \quad (2)$$

其展开形式为一个准多项式,即

$$f(\lambda, \tau) = a_0(\lambda) + a_1(\lambda)e^{-\tau\lambda} + \dots + a_q(\lambda)e^{-q\tau\lambda}, \quad (3)$$

其中 $a_0(\lambda), \dots, a_q(\lambda) (q \in \mathbf{N}_+)$ 为关于 λ 的实系数多项式.

满足特征方程 $f(\lambda, \tau) = 0$ 的 λ 为时滞系统(1)的特征根.给定一个常数时滞 τ ,用符号 $\text{NU}(\tau)$ 表示时滞系统在复平面右半平面 \mathbf{C}_+ 的特征根个数.

对于一个常数时滞 τ ,时滞系统(1)渐近稳定的充分必要条件是:时滞系统(1)的所有特征根都位于复平面的左半平面 \mathbf{C}_- ,即 $\text{NU}(\tau) = 0$ 且无落在虚轴 \mathbf{C}_0 上的特征根.

对时滞系统(1)的完全稳定性研究是指,分析在整个非负 τ 轴上,时滞系统(1)在哪些区间渐近稳定.可见,完全稳定性的结论将给出“最详尽”的关于时滞 τ 的稳定性信息.

表1中列举了已有文献中关于时滞系统(1)完全稳定性研究的代表性工作(时滞系统完全稳定性问题的研究实际上已有上百年的历史,年代更久远的文献这里未列出).可见,时滞系统完全稳定性研究进展缓慢,直到近些年(表中所列最新成果为2010年)仍未得到彻底解决.

表1 关于时滞系统(1)的代表性完全稳定性研究

代表性工作	适用于一般系统	适用于含重根临界虚根情况	适用于退化情况
文献[7]	否	是	是
文献[8]	否	否	否
文献[9]	是	否	是
文献[10-11]	是	否	是
文献[12]	需要前提条件 $f_\tau \neq 0$	可二重根	否

接下来的几个小节中,本文将结合例子介绍完全稳定性问题的一些特点和需要注意的地方.

1.2 时滞系统的无穷维性

与很多无时滞系统的本质区别在于,时滞系统具有无穷多个特征根.这是因为时滞系统的特征函数 $f(\lambda, \tau)$ 是一个准多项式,也常被称作一类超越函数.很多针对有限维系统的分析方法不适用于时滞系统.

这里有必要给出一个更详细的说明.当 $\tau = 0$ 时,时滞系统(1)为一个无时滞系统,含有限个特征根(很明显,它们就是矩阵 $\sum_{\ell=0}^m A_\ell$ 的特征根).如果 τ 的值从0开始连续增加,则一旦 τ 变为一个任意小的正数

$\tau = +\epsilon$, 无穷多个新的特征根将出现. 原来的特征根随 τ 连续变化, 而新出现的无穷多个新特征根位于复平面的极左侧(这是由特征函数的特性决定的), 不影响时滞系统(1)的稳定性. 但当 τ 增加到一定程度时, 新特征根可能会影响系统的稳定性.

下面通过一个例子(文献[13]中例1.1)来形象说明时滞系统的无穷维性.

例1 考虑如下时滞系统:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -9 & -1.5 \end{bmatrix} x(t - \tau),$$

其特征函数为

$$f(\lambda, \tau) = (1.5\lambda + 9)e^{-\tau\lambda} + \lambda^2 - \lambda + 1.$$

当 $\tau = 0$ 时, 系统有两个特征根 $-0.2500 \pm 3.1524j$. 当 τ 变为一个任意小正数 $+\epsilon$ 时, 无穷多个新的特征根出现在复平面左半平面的远端. 图1显示的是 $\tau = 0.01$ 时的情况, 其中出现的为系统原始的两个根(其他的无穷多个根都在左半平面的远端).

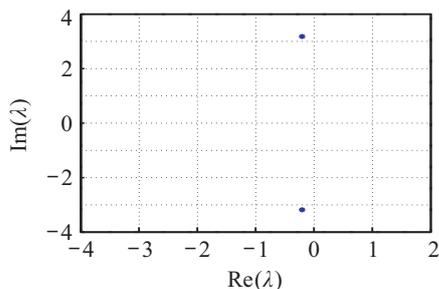


图1 例1中当 $\tau = 0.01$ 时的根分布

随着 τ 的进一步增加, 一些新特征根开始进入视野. 例如, $\tau = 1$ 的情况如图2所示, 一些新特征根已出现在显示区域, 同时原始的两个特征根这时已经到达复平面的右半平面.

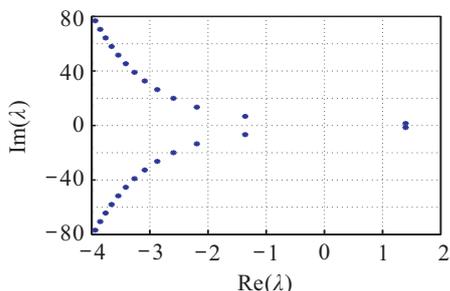


图2 例1中当 $\tau = 1$ 时的根分布

为更形象地说明, 图3给出了当 τ 从0增加到1时的根轨迹, 其中箭头表示 τ 增加的方向.

注2 本文中的根分布及根轨迹图都是采用基于 Matlab 的软件包 DDE-BIFTOOL^[14] 数值生成的. 具有相似功能的软件包或数值算法还包括文献[15-17]等. 这些软件或算法对结果验证和辅助分析十分有帮助. 然而, 它们有一个共同的缺点: 当所处理

的情况较复杂或时滞较大时, 仿真结果有较大误差甚至误导性的错误.

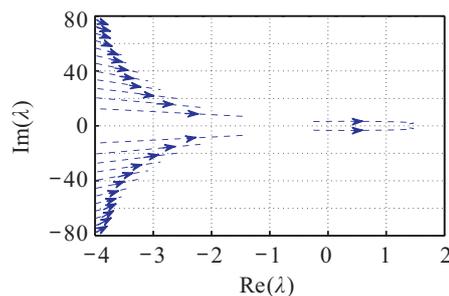


图3 例1中当 τ 从0增加到1时的根轨迹

1.3 时滞的正面作用

通常人们直觉地认为, 时滞对系统稳定性总是负面的(时滞越大, 系统越不可能稳定). 这种直觉也的确间接地成为了文献中一些研究方法的依据. 例如, 时滞经常被认为是一种有害因素, 进而从鲁棒稳定性的角度分析在时滞多大的范围内系统仍可保持稳定.

然而, 以上的直觉是错误的! 也就是说, 文献中很多研究方法从根本上有待商榷. 体现在稳定性分析的结果上就是, 所得到的稳定区间具有非常大的保守性(即, 所得到的稳定区间比实际稳定区间小很多, 甚至找不到稳定区间).

下面借用文献[18]中的例5.11加以说明.

例2 考虑如下的时滞系统:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t - \tau).$$

当 $\tau = 0$ 时该系统不稳定(有两个不稳定特征根). 然而, 当时滞 τ 增加到 0.1002 时, 系统渐近稳定. 更具体地说, 该系统渐近稳定当且仅当 $\tau \in (0.1002, 1.7178)$.

由例2可见, 时滞对于系统有正面(镇定)的作用. 近年来, 时滞在一些研究中被视为一类特殊且有效的控制参数. 尤其在文献[19]中明确指出: 常规的(无时滞)反馈控制无法镇定文献[19]中所研究的系统; 然而, 当在反馈控制环节中主动引入时滞时, 闭环系统可渐近稳定.

1.4 时滞系统的多稳定区间性

另一个常见的误解是, 人们容易潜意识地认为时滞系统至多只有一个稳定区间. 下面通过文献[13]中的例6.3来说明.

例3 考虑如下的系统:

$$\left[\frac{d^4}{dt^4} + 5 \frac{d^2}{dt^2} + 4 \right] : x(t) = u(t), \quad (4)$$

其中 $x(t)$ 和 $u(t)$ 为标量的系统状态和控制输入.

现有文献中已指出系统(4)不能用一个状态反馈控制器 $u(t) = Kx(t)$ (K 为标量反馈增益) 镇定. 有

趣的是,系统(4)可用一个含时滞的状态反馈控制器 $u(t) = Kx(t - \tau)$ 来镇定.

采用控制器 $u(t) = Kx(t - \tau)$ 的闭环系统特征函数为

$$f(\lambda, \tau) = \lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 - Ke^{-\tau\lambda}.$$

其中 $K = -0.1$. 系统的 $NU(\tau)$ 随 τ 变化如图4所示. 可见,该系统有多个稳定区间.

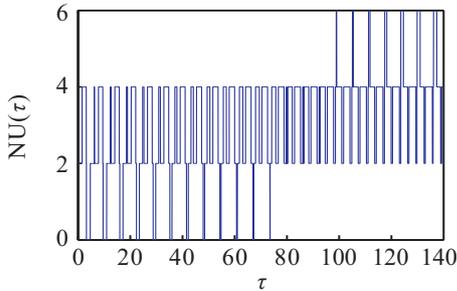


图4 例3的 $NU(\tau)$ 变化情况

含多稳定时滞区间的例子还有很多,如文献[10]中第3节的例子. 很明显,多稳定区间的情况也证实时滞对系统稳定性可以有正面作用.

1.5 频域方法与时域方法

习惯上,人们通常将控制领域中的分析方法笼统地分为频域方法和时域方法. 如果这样区分,则针对完全稳定性问题的方法属于前者(前文已提到,这样的归类不一定十分合适). 这自然会带来一个问题,为什么不采用时域方法来分析时滞系统完全稳定性呢? 的确,时域分析方法有很多优势,如:数学工具相对简单,可有效处理非标称系统,可结合现有计算机工具箱(例如LMI工具箱). 特别地,基于Lyapunov-Krasovskii泛函或Lyapunov-Razumikhin函数结合LMI工具箱的研究方法被大量报道.

需要指出的是,据作者了解,时域方法是不能研究时滞系统完全稳定性的. 首先,该方法具有保守性(不能找到所有稳定区间),尤其一些基于简单Lyapunov泛函或函数的方法只能处理 $\tau \in [0, \bar{\tau})$ 型的时滞区间. 更主要的是,该方法通过间接地构建Lyapunov泛函或函数进行研究,无法深入涉及系统的内部性质. 更多关于时滞系统时域分析方法的介绍可参考文献[18]中第2部分.

1.6 对时变时滞稳定性问题的指导性作用

本文介绍的完全稳定性问题是针对时不变不确定时滞. 那么完全稳定性分析的结论可以应用于时变时滞的情况吗? 要想全面回答这个问题并不容易. 在这一小节中,作者简要给出一些个人观点.

为控制文章篇幅,这里考虑两个线性时滞系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau), \quad (5)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau(t)). \quad (6)$$

其中: A 和 B 为常数矩阵, τ 为一个常数时滞,而 $\tau(t)$ 表示一个时变时滞(这也是两个时滞系统的区别所在). 这里假定没有其他关于 $\tau(t)$ 的信息/限制(在一些研究中会有关于 $\tau(t)$ 变化率的信息/限制,不过这不影响下面的讨论).

理论上,时滞系统(6)存在一个关于 $\tau(t)$ 的精确稳定集合 $\mathcal{S}_{\tau(t)}$ (即,时滞系统(6)渐近稳定,当且仅当 $\tau(t) \in \mathcal{S}_{\tau(t)}$). 然而,据作者了解,现有的方法只可以提供充分但不必要的稳定条件. 因此,精确稳定集合 $\mathcal{S}_{\tau(t)}$ 通常是得不到的,实际中往往只能得到含保守性的估计结果.

基于现有的科学研究水平,人们对非标称系统(如含时变参数、模型不确定性、外界干扰等)的认知深度和研究能力还非常有限. 例如,对于时滞系统(6),绝大多数现有的研究是基于构建不同的Lyapunov函数/泛函,采用不同的推导技术,从而尽可能地降低所提出稳定性判据的保守性. 关于这方面的研究,本文推荐一部最近出版的专著^[20]. 这本书中涵盖了现有文献中几乎所有相关Lyapunov函数/泛函方法及分析技术.

上述方法的最大局限性在于只能提升数值结果而很难更进一步触碰更深入的问题本质. 人们可能遇到的实际情况是,对于一个新的稳定性判据,很难真正验证其是否正确(至多采用数值仿真来观察,这也是这类研究方法的一个弊端). 这也导致近些年时滞系统领域较常见的一类现象:某些学者提出一些保守性较之前方法更低的方法并公开发表,可是一段时间后读者会发现并指出这些方法存在错误.

针对时滞系统(5),可以应用完全稳定性分析的方法获取其时滞 τ 的精确稳定集合 \mathcal{S}_{τ} . 由本文后面的介绍可知,这个结果是可以得到的,且无任何保守性(即,时滞系统(5)渐近稳定,当且仅当 $\tau \in \mathcal{S}_{\tau}$).

以上结论对于研究时变时滞系统(6)及其精确稳定集合 $\mathcal{S}_{\tau(t)}$ 具有指导性作用. 一个直观且重要的性质是: $\mathcal{S}_{\tau(t)} \subseteq \mathcal{S}_{\tau}$. 也就是说,时变时滞系统(6)的精确稳定集合 $\mathcal{S}_{\tau(t)}$ 一定是时不变时滞系统(5)的精确稳定集合 \mathcal{S}_{τ} 的子集. 这为研究时变时滞系统(6)的稳定域提供了一个可靠的上界(得到超过这个上界的结果一定是错误的). 关于时滞系统稳定性/镇定性时滞上界的观点和研究可以参考文献[21].

2 现有方法回顾

本节将简要回顾现有文献中关于时滞系统完全稳定性或相关问题的研究方法。

2.1 Rekasius代换法

由于时滞系统的特征函数(3)为准多项式, 现有的数学工具无法对其“直接”处理. 出于将原来的特征函数转换为一种容易处理的形式目的, 文献[22]提出了如下代换方法(称为Rekasius代换):

$$e^{-\tau\lambda} = \frac{1 - T\lambda}{1 + T\lambda}, \quad (7)$$

其中 T 为一个实数.

对于一个纯虚数 $\lambda = j\omega$, 以上的Rekasius代换(7)是一个精确的代换(不是近似的处理).

将式(7)代入原来的特征函数(3), 得到

$$R(\lambda, T) = a_0(\lambda) + a_1(\lambda) \left(\frac{1 - T\lambda}{1 + T\lambda} \right) + \dots + a_q(\lambda) \left(\frac{1 - T\lambda}{1 + T\lambda} \right)^q. \quad (8)$$

进一步, 对式(8)两边同时乘以 $(1 + T\lambda)^q$, 得到如下的新特征函数:

$$a_0(\lambda)(1 + T\lambda)^q + a_1(\lambda)(1 - T\lambda)(1 + T\lambda)^{q-1} + \dots + a_q(\lambda)(1 - T\lambda)^q. \quad (9)$$

可见, 经过Rekasius代换后得到的新特征函数(9)为一个关于 λ 和 T 的标准多项式. 因此可以采用一些代数方法对其分析. 相关处理及具体细节可参见文献[10].

目前Rekasius代换被大量应用于时滞系统领域^[10-11, 23-24]. 这里简要归纳该方法的优势与不足.

Rekasius代换方法的优势: 该方法对所处理的特征函数没有很强的限制, 可扩展至多时滞系统^[23-24].

Rekasius代换方法的不足:

1) Rekasius代换方法本身不具备分析渐近行为的功能, 需要额外采用其他工具来配合稳定性分析.

2) 近期的文献[25]指出: Rekasius代换会丢失临界虚根的重根信息! 这导致一个负面的结果: 在利用Rekasius代换后, 即使结合其他工具, 也无法处理含重临界虚根的情况(甚至会给出误导性的结论).

关于上述Rekasius代换方法的不足2), 现有的公开文献中尚无证明. 考虑到Rekasius代换方法是当前时滞系统领域非常流行的一种方法, 这里有必要给出一个明确的证明.

证明 (Rekasius代换不能保留重根信息) 如果Rekasius代换可保留重根信息, 则对于一个重临界虚根 $\lambda = j\omega$, 至少以下条件必须同时满足:

$$\begin{cases} \frac{\partial(f(\lambda, \tau))}{\partial\lambda} = 0, \\ \frac{\partial(R(\lambda, T))}{\partial\lambda} = 0, \end{cases}$$

这就要求

$$\frac{\partial(e^{-\tau\lambda})}{\partial\lambda} = \frac{\partial\left(\frac{1 - T\lambda}{1 + T\lambda}\right)}{\partial\lambda}. \quad (10)$$

因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial(e^{-\tau\lambda})}{\partial\lambda} &= -\tau e^{-\tau\lambda} = -\tau \frac{1 - T\lambda}{1 + T\lambda}, \\ \frac{\partial\left(\frac{1 - T\lambda}{1 + T\lambda}\right)}{\partial\lambda} &= \frac{-T(1 + T\lambda) - T(1 - T\lambda)}{(1 + T\lambda)^2} = \frac{-2T}{(1 + T\lambda)^2}, \end{aligned}$$

条件(10)引入了一个额外要求 “ $-\tau \frac{1 - T\lambda}{1 + T\lambda} = \frac{-2T}{(1 + T\lambda)^2}$ ”, 即

$$\tau = \frac{2T}{(1 + T\lambda)(1 - T\lambda)} = \frac{2T}{1 + T^2\omega^2}. \quad (11)$$

显然, 式(11)是一个额外条件. 因此, 通常情况下Rekasius代换会丢失重根信息. \square

2.2 辅助特征函数法

考虑特征函数(3)的一种特殊形式

$$f(\lambda, \tau) = a_0(\lambda) + a_1(\lambda)e^{-\tau\lambda}. \quad (12)$$

对于特征函数(12), 可以采用辅助特征函数方法.

如果 $\lambda = j\omega \neq 0$ 是特征函数(12)对应的一个临界虚根, 当且仅当 $|a_0(j\omega)| = |a_1(j\omega)|$, 则有如下引理.

引理1 考虑一个具有特征函数(12)的时滞系统. 如果 $\lambda = j\omega \neq 0$ 是一个临界虚根, 则当且仅当 $W = \omega^2$ 是辅助特征方程 $F(W) = 0$ 的一个正实根, 其中

$$F(W) = \text{Re}(a_0(j\omega))^2 + \text{Im}(a_0(j\omega))^2 - \text{Re}(a_1(j\omega))^2 - \text{Im}(a_1(j\omega))^2 \quad (13)$$

为对应的辅助特征函数.

因为式(13)的等号右边为 ω 的多项式, 且仅含偶次项, 所以可将式(13)中的函数表示为 $W = \omega^2$ 的多项式函数.

引理2 考虑一个 W 的单根对应的时滞系统临界虚根. 随着 τ 在其对应的一个正临界时滞附近增加, 如果 $\frac{dF(W)}{dW} > 0$ (或 < 0), 则该临界虚根从左向右 (或从右向左) 穿越虚轴.

进一步, 如果所有 W 根都为单根, 则所有临界虚根的渐近行为可以直接根据 W 根的大小顺序得到. 具体而言, 假设辅助特征方程有 u 个根, 则对它们按降序编号, 有

$$W_0 > W_1 > \cdots > W_{u-1},$$

对应的临界虚根及临界时滞分别表示为 $(\lambda_0, \tau_{0,k})$, $(\lambda_1, \tau_{1,k}), \dots, (\lambda_{u-1}, \tau_{u-1,k})$. 则可知, 随着 τ 增加: $(\lambda_0, \tau_{0,k})$ 附近的根轨迹从左向右穿越虚轴, $(\lambda_1, \tau_{1,k})$ 附近的根轨迹从右向左穿越虚轴, $(\lambda_2, \tau_{2,k})$ 附近的根轨迹从左向右穿越虚轴, \dots .

辅助特征函数的使用可追溯至文献[8]. 这里概括一下这种方法的优势和不足.

辅助特征函数方法的优势:

1) 对临界虚根的检测可简单有效地通过求解辅助特征方程完成. 由于这是一个多项式方程求解工作, 现有的计算软件可以非常快速、准确地完成, 且每个 W 根的重数也可准确检测.

2) 在辅助特征方程没有重根的前提下, 所有临界虚根的渐近行为可以直接判断, 无需其他计算(如计算 $F(W)$ 关于 W 的导数).

可见, 基于辅助特征函数的完全稳定性分析基本上只需计算辅助特征函数的解析表达式并求解对应多项式方程的根. 这是一个纯代数方法.

辅助函数方法的不足:

1) 对于辅助特征方程有重根的情况, 现有文献尚无报道相关处理方法. 在文献[26]中明确指出, 辅助特征函数具有重根的情况为一个开放问题(Open problem).

需要注意, 一个重临界虚根和一个重 W 根是有区别的(切勿混淆). 在现有文献中二者的区别未被明确地介绍. 这里本文明确指出: 一个重临界虚根一定对应一个重 W 根; 但反过来, 一个重 W 根不一定对应一个重临界虚根(具体的细节将报道于作者其他相关论文).

2) 对于辅助特征函数方法, 以上介绍的结论目前还不能有效地扩展至一般形式的特征函数(3). 即现有辅助特征函数方法仅适用于特征函数(3)中 $q = 1$ 的情况.

2.3 直接方法

为避免混淆, 这里介绍的“直接方法”是指文献[9]提出的利用特征方程共轭对称性从而直接(无需额外的代换或工具)分析时滞系统稳定性的方法.

为了方便, 这里仍以特征函数(12)进行说明.

如果 $\lambda = j\omega$ 是特征函数(12)的临界虚根, 则存在一个 τ 满足 $a_0(j\omega) + a_1(j\omega)e^{-j\omega\tau} = 0$. 进一步, 由时滞系统特征谱的共轭对称性, 对于这个 τ , $\lambda = -j\omega$ 也一定是特征函数(12)的根, 即 $a_0(-j\omega) + a_1(-j\omega)e^{j\omega\tau} = 0$. 换言之, 如果 $\lambda = j\omega$ 是一个临界虚根, 则存在一个

τ 满足如下方程组:

$$\begin{cases} a_0(j\omega) + a_1(j\omega)e^{-j\omega\tau} = 0, \\ a_0(-j\omega) + a_1(-j\omega)e^{j\omega\tau} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

消去方程组(14)中的 $e^{-j\omega\tau}$ 和 $e^{j\omega\tau}$ 项, 从而得到

$$a_0(j\omega)a_0(-j\omega) - a_1(j\omega)a_1(-j\omega) = 0. \quad (15)$$

不难发现, 条件(15)与辅助特征函数(13)等价.

相比于辅助特征函数方法, 直接方法可扩展至一般形式的特征函数(3), 即不限制 $q = 1$ 的条件. 这是直接方法的一个优势.

根据时滞系统特征谱的共轭对称性, 如果 $\lambda = j\omega$ 是一般形式特征函数(3)的一个临界虚根, 则存在一个 τ 满足如下方程组:

$$\begin{cases} a_0(j\omega) + a_1(j\omega)e^{-j\omega\tau} + \cdots + \\ a_q(j\omega)e^{-qj\omega\tau} = 0, \\ a_0(-j\omega) + a_1(-j\omega)e^{j\omega\tau} + \cdots + \\ a_q(-j\omega)e^{qj\omega\tau} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

显然, 要想消去方程组(16)的指数项要比处理式(14)棘手很多. 为此, 文献[9]中提出了一种迭代消去方法. 该方法第1步消去方程组中的 $e^{-qj\omega\tau}$ 和 $e^{qj\omega\tau}$ 项, 得到一个方程组

$$\begin{cases} F^{(1)}(-j\omega, \tau) = 0, \\ F^{(1)}(j\omega, \tau) = 0. \end{cases}$$

第2步消去方程组中的 $e^{-(q-1)j\omega\tau}$ 和 $e^{(q-1)j\omega\tau}$ 项, 得到方程组

$$\begin{cases} F^{(2)}(-j\omega, \tau) = 0, \\ F^{(2)}(j\omega, \tau) = 0. \end{cases}$$

重复以上步骤. 最后, 在该方法的第 q 步可消去方程组中的 $e^{-j\omega\tau}$ 和 $e^{j\omega\tau}$ 项, 从而消去原方程中所有指数项并得到一个关于 $W = \omega^2$ 的多项式方程 $F^{(q)}(W) = 0$.

利用方程 $F^{(q)}(W) = 0$, 可以得到如下结论:

1) 如果 $\lambda = j\omega$ 是时滞系统的一个临界虚根, 则 $W = \omega^2$ 是方程 $F^{(q)}(W) = 0$ 的一个正实根.

2) 如果 $\lambda = j\omega$ 是时滞系统的一个单临界虚根, 则在其非退化的情况下, 其虚根的穿越方向可通过计算导数 $\frac{F^{(q)}(W)}{dW}$ 来判断(具体判据比 $q = 1$ 的情况要稍微复杂).

该方法的不足:

1) 方程 $F^{(q)}(W) = 0$ 有正实根是时滞系统含临界虚根的必要条件, 但不是充分条件. 在实际应用中, 需要额外地反代 $F^{(q)}(W) = 0$ 的正实根至原特征方程, 从而排除可能的假根.

2) 该方法对 $F^{(q)}(W) = 0$ 的重根情况没有明确研究.

2.4 重临界虚根的渐近行为分析

通过对已有方法的回顾可见,关于时滞系统重临界虚根的分析始终是一个技术难点. 在这一小节中,将介绍文献中有关这方面的报道.

事实上,关于重临界虚根的研究至少可追溯至1969年发表的文献[7]. 该文献中研究具有特殊特征函数(12)的时滞系统的临界虚根渐近行为. 对于重临界虚根的渐近行为,该文献提出一种几何分析方法. 虽然这篇论文发表于半个世纪前,但很长时间内没有其他文献能够达到这篇论文的研究深度和问题的解决程度. 概括地说,该论文的贡献有以下两方面:

1) 在历史上首次系统地研究一类时滞系统重临界虚根的渐近行为,对后来的研究有非常大的启发性.

2) 考虑并解决了所研究问题涉及的全部情况. 具体讲,对特征函数(12)可涉及的重根情况,无论其重数多高,是否涉及退化情况,全部可用该文章提出方法有效解决.

当然,这篇文章同样存在技术不足:

1) 所提出结论及方法无法应用于一般形式的特征函数(3);

2) 所依赖的数学工具(Lagrange's inversion formula)较经典,很难扩展到更一般形式的问题或更深入的研究;

3) 没有明确地研究一致性问题,这对研究完全稳定性问题是一个明显不足.

从这篇开拓性的文献[7]中可以发现有两类技术难点有待解决.

第1个技术难点:对一般情况下一个临界虚根在一个临界时滞处的渐近行为的数学描述和分析方法. 对于这点,直到最近10年才有实质性的进展. 在文献[27]中,首次明确指出应该采用皮瑟级数(Puiseux series)来描述一般情况下一个临界虚根在一个临界时滞处的渐近行为. 该描述可适用于单根和重根的情况. 后来,文献[28]给出了更适合时滞系统的数学分析并给出了一般情况下计算皮瑟级数的方法.

第2个技术难点:一个临界虚根对应无穷多个临界时滞,因此仅研究在一个临界时滞处的局部情况远远不足以解决完全稳定性问题. 关于这点,直到最近的文献[12]才引入一个启发性的解决思路:提出一致性的概念. 在文献[12]中发现并证明了:对于

一类含重临界虚根的时滞系统,其临界虚根的渐近行为在其对应的所有临界时滞处均对系统稳定性产生一样的影响. 这个性质称之为时滞系统临界虚根渐近行为的一致性(在上下文明确的情况下,简称为一致性). 但文献[12]的方法和结论有3个非常大的局限性:1) 只能处理二重根;2) 不能处理退化情况;3) 需要一个额外的假定条件(对于所研究临界参数对, $\partial f(\lambda, \tau)/\partial \tau \neq 0$).

以上简单回顾了时滞系统领域关于重临界虚根渐近行为的几个代表性研究工作. 总体可见,还需要一些全新的数学工具进行深入研究.

在接下来的两个小节中,将介绍与本文讨论的完全稳定性问题相近的两类问题.

2.5 $[0, \bar{\tau})$ 型稳定区间的研究

在时滞系统领域,有许多文献专门研究时滞系统的 $\tau \in [0, \bar{\tau})$ 型稳定/镇定区间^[18,21,29]. 这样的 τ 有时称为 delay margin. 进一步,如果 $\bar{\tau} = \infty$,则可判定系统为时滞无关稳定.

对于时滞系统(1),其存在一个 $\tau \in [0, \bar{\tau})$ 型稳定区间的充要条件是 $\tau = 0$ 时该系统渐近稳定. 如果该条件满足,则稳定区间 $[0, \bar{\tau})$ 的检测等价于对所有临界参数对的检测($\bar{\tau}$ 的值等于该系统对应的最小临界时滞). 如果该系统没有临界参数对,则 $\bar{\tau} = \infty$.

更多相关细节可参考文献[30-31]. 总之,分析 $\tau \in [0, \bar{\tau})$ 型稳定区间的问题相对简单(不需要分析临界虚根的渐近行为). 因此,这种研究方法的局限性(对本文前面给出的例子该方法均无效)不足以解决完全稳定性问题.

2.6 固定时滞情况下的稳定性分析

这一小节将讨论固定时滞情况下,时滞系统的稳定性研究. 在这种条件下,特征函数(3)为 λ 的函数(τ 不再是变量).

当时滞 τ 为一个已知固定常数时(为简便说明,这里假设 τ 不是一个临界时滞),可以依据复变函数中的幅角原理检测复平面中某一个区域内所包含的特征根个数.

另一方面,有这样的数学性质:如果特征函数(3)含有右半平面的根,则这些根一定在距离原点的有限远范围内.

依据以上两点,可选取一条 $C_0 \cup C_+$ 中经过原点附近虚轴且包含原点附近充分大区域的一条闭曲线. 进一步,检测 λ 沿这条闭曲线正方向运动一周时特征函数(3)的幅角变化. 这个幅角变化量除以 2π 就是时滞系统的不稳定根个数. 如果不稳定根个数为

0, 则所研究时滞系统渐近稳定, 这样的稳定性条件即为充分必要条件(不含保守性).

以上就是利用幅角原理研究固定时滞系统稳定性的基本思路, 不同版本的判据和更多细节可参考文献[32-35]等.

概括地说, 以上方法可精确地计算时滞固定且已知时的不稳定根个数, 从而判断系统是否渐近稳定. 此外, 该方法可扩展至含多时滞的系统^[33].

然而, 该方法的局限性同样明显:

1) 该方法不能研究完全稳定性问题, 因不能处理时滞为一个不确定的自由参数的情况;

2) 所采用的数学工具较经典(幅角原理), 在分析更复杂的问题时较难获得更深入结果.

3 涉及的技术问题

在本节将详细介绍时滞系统完全稳定性研究通常所需的理论基础和具体步骤.

首先给出一些常用概念.

如果一个参数对 $(\lambda \in \mathbf{C}_0, \tau \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\})$ 满足 $f(\lambda, \tau) = 0$, 则称该 λ 为临界虚根, 该 τ 为临界时滞, (λ, τ) 为一个临界参数对.

时滞系统的渐近行为常指, 时滞系统的临界虚根随其对应临界时滞的微小变化而变化的情况.

3.1 τ -分解思路

当正时滞 τ 连续变化时, 时滞系统(1)的所有特征根都随之连续变化(该性质称为时滞系统的谱连续性). 因此, 当 τ 从0开始增加时, $\text{NU}(\tau)$ 仅在临界时滞处有可能变化. 所有的临界时滞将非负 τ 轴分成无穷多个相连的子区间. 在每个子区间内 $\text{NU}(\tau)$ 是一个常数. 例如, 要研究一个子区间 (τ', τ'') 的稳定性情况(其中 τ' 和 τ'' 为两个临界时滞且满足在区间 (τ', τ'') 内不存在其他的临界时滞). 假如 $\text{NU}(\tau' - \varepsilon)$ 已知, 并且已知 $\tau = \tau'$ 时的系统渐近行为, 则可以精确地计算 $\text{NU}(\tau' + \varepsilon)$. 进一步, 由谱连续性可以确定对于任意的 $\tau \in (\tau', \tau'')$, $\text{NU}(\tau) = \text{NU}(\tau' + \varepsilon)$.

以上就是文献中常用到的 τ -分解思路/方法, 由此获得的结果是准确的(不含任何保守性). 据作者所知, 这是目前研究时滞系统完全稳定性的唯一途径. 概况起来, 时滞系统的完全稳定性分析需要依次解决如下两个问题.

问题1: 如何检测时滞系统(1)的全部临界虚根和临界时滞(或者检测全部临界参数对).

问题1不是本文讨论的重点, 且文献中已有多种有效解决方法.

问题2: 如何分析时滞系统(1)的临界虚根关于临

界时滞的渐近行为.

问题2是完全稳定性问题的主要技术难题. 由于一个临界虚根对应无穷多个临界时滞, 该问题可以进一步分解为如下两个子问题.

问题2.1: 如何对一个临界虚根在一个临界时滞处的渐近行为进行分析.

问题2.1也可称为如何对一个临界参数对的渐近行为分析.

问题2.2: 如何对一个临界虚根在其对应的所有(无穷多个)临界时滞处的渐近行为进行分析.

可见, 问题2.2比问题2.1具有更高的难度和挑战性.

下面将对问题1、问题2.1和问题2.2分别讨论.

3.2 问题1的解

令 $z = e^{-\tau\lambda}$, 可将特征函数 $f(\lambda, \tau)$ 转换为一个二变量多项式

$$p(\lambda, z) = \sum_{i=0}^q a_i(\lambda) z^i. \quad (17)$$

这样, 对特征方程 $f(\lambda, \tau) = 0$ 的临界参数对的检测可转换为对方程 $p(\lambda, z) = 0$ 的临界参数对 (λ, z) (其中 $\lambda \in \mathbf{C}_0, z \in \partial \mathbf{D}$) 的检测.

由特征函数 $f(\lambda, \tau)$ 谱的共轭对称性可知, 如果 λ 是一个临界虚根, 则 $-\lambda$ 也一定是一个临界虚根, 且它们的渐近行为是关于实轴对称的. 此外, 如果 $\lambda = 0$ 是一个临界虚根, 则系统对于所有 $\tau \geq 0$ 都有一个特征根 $\lambda = 0$ (系统对于任何 $\tau \geq 0$ 都不会渐近稳定). 因此, 实际中仅需检测具有正虚部的临界虚根并研究它们的渐近行为.

不失一般性, 假定系统有 u 个 (λ, z) 的临界参数对并表示为 $(\lambda_0 = j\omega_0, z_0), \dots, (\lambda_{u-1} = j\omega_{u-1}, z_{u-1}), 0 < \omega_0 \leq \dots \leq \omega_{u-1}$, 则系统有且仅有 u 组 (λ, τ) 的临界参数对, 它们可由如下关系确定:

对于一个临界虚根 λ_α , 其对应的(无穷多个)临界时滞为

$$\tau_{\alpha, k} \triangleq \tau_{\alpha, 0} + \frac{2k\pi}{\omega_\alpha}, \quad k \in \mathbf{N},$$

$$\tau_{\alpha, 0} \triangleq \min\{\tau \geq 0 : e^{-\tau\lambda_\alpha} = z_\alpha\}.$$

即由一个 (λ, z) 的临界参数对可确定一组 (λ, τ) 的临界参数对 $(\lambda_\alpha, \tau_{\alpha, k}), k \in \mathbf{N}$.

注3 如果系统没有临界虚根, 则可知, 对于所有 $\tau > 0, \text{NU}(\tau) = \text{NU}(0)$.

3.3 问题2.1的解

如果一个临界时滞有一个微小变化 $\Delta\tau = \pm\varepsilon$, 则对应的临界虚根也会有相应的变化 $\Delta\lambda$. 这就是时

滞系统临界虚根渐近行为的数学描述,其直观表现就是临界虚根随 τ 在临界时滞附近变化的局部根轨迹.

最近的文献指出:一个单根的临界虚根的渐近行为对应一个($\Delta\lambda$ 关于 $\Delta\tau$ 的)泰勒级数,而一个重根的临界虚根的渐近行为对应一组($\Delta\lambda$ 关于 $\Delta\tau$ 的)皮瑟级数(粗略地说,皮瑟级数是具有分数幂指数的无穷级数,见文献[28]及文献[13]中第2章).因泰勒级数可被看作一种简单形式的皮瑟级数,故对于一个参数对的渐近行为可统一通过调用皮瑟级数来分析.关于调用皮瑟级数的通用算法可见文献[13]中第4章.

进一步,对于任意一个临界参数对 $(\lambda_\alpha, \tau_{\alpha,k})$ (其中 $\tau_{\alpha,k} > 0$),定义符号 $\Delta NU_{\lambda_\alpha}(\tau_{\alpha,k})$ 表示当 τ 从 $\tau_{\alpha,k} - \varepsilon$ 增加到 $\tau_{\alpha,k} + \varepsilon$ 时,由临界虚根 λ_α 的变化所引起的不稳定根个数的变化.这样,可以通过 $\Delta NU_{\lambda_\alpha}(\tau_{\alpha,k})$ 量化地描述临界参数对 $(\lambda_\alpha, \tau_{\alpha,k})$ 的渐近行为对系统稳定性的影响.

例4 考虑3个特征函数

$$f(\lambda, \tau) = e^{-3\tau\lambda} - (\lambda^6 - \lambda^4 + \lambda^2)e^{-2\tau\lambda} - (\lambda^{10} - \lambda^8 + \lambda^6)e^{-\tau\lambda} + \lambda^{12}, \quad (18)$$

$$f(\lambda, \tau) = e^{-2\tau\lambda} + \left(\frac{\pi}{2}\lambda^3 - \lambda^2 + \frac{\pi}{2}\lambda + 1\right)e^{-\tau\lambda} - \frac{\pi}{2}\lambda^5 - \frac{\pi}{2}\lambda^3 - \lambda^2, \quad (19)$$

$$f(\lambda, \tau) = e^{-\tau\lambda} + \frac{3\pi}{8}\lambda^5 - \frac{\pi^2}{8}\lambda^4 + \frac{5\pi}{4}\lambda^3 - \frac{\pi^2}{4}\lambda^2 + \frac{7\pi}{8}\lambda - \frac{\pi^2}{8} + 1. \quad (20)$$

对于以上3个特征函数,当 $\tau = \pi$ 时, $\lambda = j$ 都是一个三重临界虚根.此时,可以通过调用临界参数对 (j, π) 对应的皮瑟级数来分析对应的渐近行为.

对于特征函数(18),其对应的皮瑟级数为

$$\begin{cases} \Delta\lambda = (0.14 - 0.23j)\Delta\tau + o(\Delta\tau), \\ \Delta\lambda = (0.15 - 0.12j)\Delta\tau + o(\Delta\tau), \\ \Delta\lambda = (0.13 - 0.07j)\Delta\tau + o(\Delta\tau). \end{cases}$$

这组皮瑟级数由3个独立的泰勒级数构成.由该组皮瑟级数可知,当 τ 由 $\pi - \varepsilon$ 增加至 $\pi + \varepsilon$ 时,3个特征根由左向右穿越虚轴 C_0 ,即该三重临界虚根的渐近行为使系统多了3个不稳定根($\Delta NU_j(\pi) = +3$).

对于特征函数(19),其对应的皮瑟级数为

$$\begin{cases} \Delta\lambda = (0.14 - 0.23j)\Delta\tau + o(\Delta\tau), \\ \Delta\lambda = (0.15 + 0.35j)(\Delta\tau)^{\frac{1}{2}} + o((\Delta\tau)^{\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

这组皮瑟级数由一个独立的泰勒级数和一个独立的皮瑟级数构成,从中可知,当 τ 由 $\pi - \varepsilon$ 增加至 $\pi + \varepsilon$ 时,系统的不稳定根个数净增加一个($\Delta NU_j(\pi) = +1$).

对于特征函数(20),其对应的皮瑟级数为

$$\Delta\lambda = (0.55 + 0.09j)(\Delta\tau)^{\frac{1}{3}} + o((\Delta\tau)^{\frac{1}{3}}).$$

由此可确定,当 τ 由 $\pi - \varepsilon$ 增加至 $\pi + \varepsilon$ 时,系统的不稳定根个数净减少一个($\Delta NU_j(\pi) = -1$).

上述结果表明,即使同一个临界参数对 (j, π) (且临界虚根重数相同),所对应的渐近行为可能有很大差别.为更直观地说明,图5~图7给出了 (j, π) 附近的根轨迹.

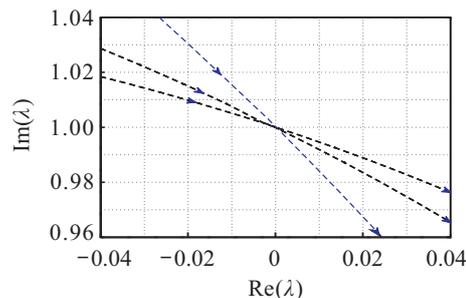


图5 关于特征函数(18)的根轨迹

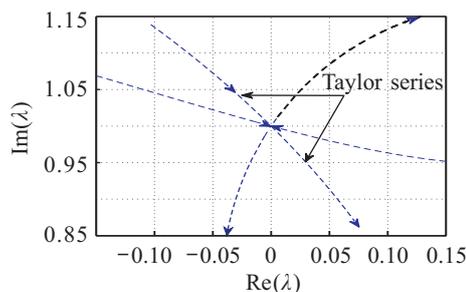


图6 关于特征函数(19)的根轨迹

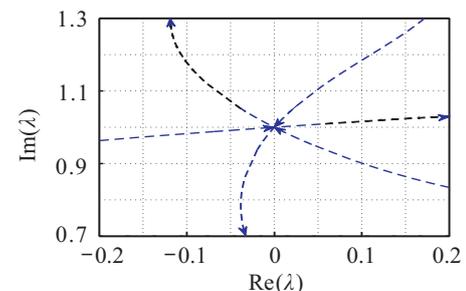


图7 关于特征函数(20)的根轨迹

需注意,如果一个临界时滞等于0,如 $\tau_{\alpha,0} = 0$,则此时关于临界虚根 λ_α 的渐近行为是指:当 τ 从0增加到 $+\varepsilon$ 时,临界虚根 λ_α 如何变化.显然,这种情况下的渐近行为也可以通过调用皮瑟级数进行分析,从而确定 $NU(+\varepsilon)$,见如下定理.

定理1 如果时滞系统(1)在 $\tau = 0$ 时没有临界虚根,则 $NU(+\varepsilon) - NU(0) = 0$;否则, $NU(+\varepsilon) - NU(0)$ 等于所有这些临界虚根对应皮瑟级数在代入 $\Delta\tau = +\varepsilon$ 时在 C_+ 中取值的个数.

不难理解,要求解时滞系统完全稳定性, $NU(+\varepsilon)$ 的值是一个必需信息.

3.4 问题2.2及一致性猜想

要想在无穷多个临界时滞处逐个分析其渐近行为是不现实的. 为尝试克服这个问题, 文献[13,36]中提出了一个大胆的猜想: 猜想对于一个临界虚根 λ_α , 在其对应的无穷多个正临界时滞 $\tau_{\alpha,k}$ 处, 其渐近行为对系统稳定性的影响是相同的. 即对于一个临界虚根 λ_α , 在其对应的无穷多个正临界时滞 $\tau_{\alpha,k}$ 处, $NU_{\lambda_\alpha}(\tau_{\alpha,k})$ 是一个常数.

上面的猜想称为一致性猜想. 由于时滞系统渐近行为的复杂性, 要想证实一致性猜想是非常困难的. 这里给出两个具有代表性的例子.

例5 考虑一个具有特征函数

$$f(\lambda, \tau) = (\lambda + 1)e^{-2\tau\lambda} + (\lambda + 2)e^{-\tau\lambda} + \frac{21\pi}{2}\lambda^2 + \frac{21\pi}{2}\lambda + 1$$

的时滞系统. 对于该系统, $\lambda = j$ 是一个临界虚根, 对应的临界时滞为 $\tau = (2k + 1)\pi$. 通过计算可知, 当 $\tau = \pi, 3\pi, \dots, 19\pi$ 时, $\lambda = j$ 为单根. 这时, 可能倾向于认为对于所有的临界时滞 $\lambda = j$ 都是单根(通常需验证 f_λ 是否为零来验证临界虚根是否为重根). 然而, 当 $\tau = 21\pi$ 时, $\lambda = j$ 是一个二重根.

注4 在许多文献中, 仅考虑单根的临界虚根的情况(通常做法是, 引入一个“假定系统不含重根的临界虚根”的前提条件), 这样可极大地简化问题的复杂度. 例5说明, 在实际中完全排除重根的可能性不是一件容易的事情, 因此需要一种可处理重根的临界虚根的分析方法. 近年来, 时滞系统重根临界虚根的渐近行为逐渐引起较大关注, 且不断有新的相关文献报道. 这里推荐一篇专门关于时滞系统重根临界虚根的综合[37].

例6 考虑一个时滞系统, 其特征函数为

$$f(\lambda, \tau) = \sum_{i=0}^4 a_i(\lambda)e^{-i\tau\lambda}$$

其中

$$a_0(\lambda) = \frac{15}{8}\pi^2\lambda^6 + \left(\frac{11}{4}\pi - \frac{15}{8}\pi^2\right)\lambda^4 + \frac{9}{2}\pi\lambda^3 + \left(1 + \frac{1}{2}\pi - \frac{75}{8}\pi^2\right)\lambda^2 + \left(3 + \frac{9}{2}\pi\right)\lambda + 1 - \frac{9}{4}\pi - \frac{45}{8}\pi^2,$$

$$a_1(\lambda) = \frac{5}{4}\pi\lambda^5 + \frac{11}{2}\pi\lambda^4 + \left(1 + \frac{7}{2}\pi\right)\lambda^3 + (\pi + 7)\lambda^2 + \left(11 + \frac{9}{4}\pi\right)\lambda + 4 - \frac{9}{2}\pi,$$

$$a_2(\lambda) = \frac{5}{4}\pi\lambda^5 + \frac{11}{4}\pi\lambda^4 + (3 - \pi)\lambda^3 + \left(13 + \frac{1}{2}\pi\right)\lambda^2 + \left(15 - \frac{9}{4}\pi\right)\lambda + 6 - \frac{9}{4}\pi,$$

$$a_3(\lambda) = 3\lambda^3 + 9\lambda^2 + 9\lambda + 4,$$

$$a_4(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

这里专门讨论临界参数对 $(j, (2k + 1)\pi)$. 当 τ 等于 $\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi$ 时, 临界虚根 $\lambda = j$ 的重数分别为 2, 3, 4, 2. 对应的皮瑟级数(全部退化)如下:

$$\begin{cases} \Delta\lambda = 0.1592j\Delta\tau + (0.5371 - 0.3138j)(\Delta\tau)^2 + o((\Delta\tau)^2), \\ \Delta\lambda = 0.0796j\Delta\tau + 0.0063j(\Delta\tau)^2 + 0.0421j(\Delta\tau)^3 + (0.0362 + 0.0137j)(\Delta\tau)^4 + o((\Delta\tau)^4); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\lambda = (0.0385 + 0.0698j)(\Delta\tau)^{\frac{1}{2}} + o((\Delta\tau)^{\frac{1}{2}}), \\ \Delta\lambda = 0.1592j\Delta\tau + 0.0253j(\Delta\tau)^2 + 0.6696j(\Delta\tau)^3 + (1.1585 + 0.4376j)(\Delta\tau)^4 + o((\Delta\tau)^4); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\lambda = -0.1592j\Delta\tau + (-0.5371 + 0.3644j)(\Delta\tau)^2 + o((\Delta\tau)^2), \\ \Delta\lambda = -0.0988j(\Delta\tau)^{\frac{1}{3}} + (-0.0356 + 0.0028j)(\Delta\tau)^{\frac{2}{3}} + o((\Delta\tau)^{\frac{2}{3}}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\lambda = -0.0796j\Delta\tau + (-0.0671 + 0.0487j)(\Delta\tau)^2 + o((\Delta\tau)^2), \\ \Delta\lambda = -0.1592j\Delta\tau + 0.0253j(\Delta\tau)^2 + 0.6615j(\Delta\tau)^3 + (-1.1585 - 0.4363j)(\Delta\tau)^4 + o((\Delta\tau)^4). \end{cases}$$

以上分别对应 $k = 0, 1, 2, 3$ (即 $\tau = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi$) 的情况.

例6比较有代表性地反映了时滞系统渐近行为的复杂性: 1) 一个临界虚根可以在其对应的所有临界时滞处都是重根; 2) 一个临界虚根的重数会随不同的临界时滞变化, 如果变化, 则其对应皮瑟级数的结构必随之变化; 3) 皮瑟级数可含有多个共轭类; 4) 皮瑟级数会出现退化情况(皮瑟级数的首项可能不足以判断渐近行为对稳定性的影响, 这时需要继续计算皮瑟级数的高阶项, 直到可以判断渐近行为对稳定性的影响, 这种情况称为退化情况), 且退化程度可能很高. 如在例6中, 有时需计算到皮瑟级数的第4项.

4 新频域扫描框架

直到最近几年, 时滞系统完全稳定性问题才由文献[13,36]中建立的新频域扫描框架彻底解决(这里说的频域扫描框架, 不仅仅是一个图形化判据, 它指一套完整的自成体系的研究方法). 在该框架下, 上一

节介绍的问题1和问题2都可以得到解决,且无需借助额外工具.

经典的频域扫描技术在时滞系统领域中已被大量使用,如文献[18,30,38],其中文献[38](1946年)首次应用频域扫描技术分析时滞系统稳定性.但这些方法不足以分析完全稳定性问题.下文将要介绍的新频域扫描方法是通过引入解析曲线而建立的一套可深入分析时滞系统渐近行为的数学框架.

首先引入两个指标 $n \in \mathbf{N}_+$ 和 $g \in \mathbf{N}_+$. 对于一个临界参数对,用 n 表示其临界虚根的重数,用 g 表示其临界时滞的重数. 即对于一个临界参数对, n 和 g 满足

$$f_{\lambda^0} = \dots = f_{\lambda^{n-1}} = 0, f_{\lambda^n} \neq 0, \quad (21)$$

$$f_{\tau^0} = \dots = f_{\tau^{g-1}} = 0, f_{\tau^g} \neq 0. \quad (22)$$

4.1 频域扫描曲线

这里给出频域扫描曲线的生成方法:扫描 $\omega \geq 0$, 对于每个 $\lambda = j\omega$, 可得到 q 个关于方程 $p(j\omega, z) = 0$ 的 z 的解(表示为 $z_1(j\omega), \dots, z_q(j\omega)$). 于是,得到 q 条频域扫描曲线 $\Gamma_i(\omega): |z_i(j\omega)|$ vs. $\omega, i = 1, 2, \dots, q$. 为方便起见,将平行于横轴纵坐标为1的直线表示为 \mathfrak{S}_1 , 它是为便于说明和理解而引入的参照线. 如果 $(\lambda_\alpha, \tau_{\alpha,k})$ 是一个临界参数对,具有指标 g , 则 g 条频域扫描曲线在 $\omega = \omega_\alpha$ 处与参照线 \mathfrak{S}_1 相交.

作为最直接的应用,问题1可通过频域扫描曲线得到解决:频域扫描曲线与参照线 \mathfrak{S}_1 的交点对应 $p(\lambda, z) = 0$ 的临界参数对;如果频域扫描曲线与参照线 \mathfrak{S}_1 没有交点,则所研究时滞系统没有临界虚根.

接下来介绍频域扫描框架的核心功能:通过观察频域扫描曲线可系统地解决问题2.

4.2 解析曲线角度

已有方法大多“直接”从特征方程着手研究时滞系统稳定性,这是最直接的思路. 而这里将介绍一个不同的研究角度.

首先,分析特征函数 $f(\lambda, \tau)$ 在一个临界参数对 $(\lambda_\alpha, \tau_{\alpha,k})$ 处关于 $\Delta\lambda$ 和 $\Delta\tau$ 的级数展开式 $F_{(\lambda_\alpha, \tau_{\alpha,k})}(\Delta\lambda, \Delta\tau)$ (在不引起混淆的情况下,通常省略下标而简记为 $F(\Delta\lambda, \Delta\tau)$). 则临界参数对的渐近行为完全由方程 $F(\Delta\lambda, \Delta\tau) = 0$ 决定.

进一步,从代数几何角度,方程 $F(\Delta\lambda, \Delta\tau) = 0$ 定义了一条 C^2 平面上的解析曲线^[39], 其中原点 $(0, 0)$ 要么是一个非奇异点,要么是一个奇异点(相关定义可参考文献[40]):原点 $(0, 0)$ 为一个非奇异点,如果 $\text{ord}(F(\Delta\lambda, 0))|_{\Delta\lambda=0} = 1$ 和/或 $\text{ord}(F(0, \Delta\tau))|_{\Delta\tau=0} = 1$; 否则,原点 $(0, 0)$ 为一个奇异点.

这样,时滞系统(1)的一个临界参数对可以看作其对应解析曲线的一个非奇异点(如果 $n = 1$ 和/或 $g = 1$) 或一个奇异点(如果 $n > 1$ 且 $g > 1$). 因此,时滞系统的完全稳定性问题事实上包括两种可能的情况:非奇异情况和奇异情况.

现在回顾已有研究结果(结合表1),可以发现,文献中关于时滞系统完全稳定性的结论全部是只针对相对简单的非奇异情况. 而对于相对更复杂的奇异情况,甚至没有任何报道.

注5 作者认为,直到解析曲线的引入才使人们清楚之前对时滞系统完全稳定性问题到底研究到了什么程度;才帮助人们认识到,时滞系统完全稳定性问题的难点在于其奇异情况(已有的分析工具全部不能处理奇异情况).

根据上述解析曲线观点及奇异/非奇异情况分类,人们被指引向一种现代数学工具:解析曲线的奇异分析^[39].

4.3 皮瑟级数与对偶皮瑟级数

前文中应用 $\Delta\lambda$ 关于 $\Delta\tau$ 的皮瑟级数研究 $\Delta\lambda$ 随 $\Delta\tau$ 的变化情况,从而可分析一个临界参数对 λ 关于 τ 的渐近行为.

反过来,如果考虑 $\Delta\tau$ 如何随 $\Delta\lambda$ 变化,这对应一组 $\Delta\tau$ 关于 $\Delta\lambda$ 的皮瑟级数(见下面的定理2). 区别于前面用到的 $\Delta\lambda$ 关于 $\Delta\tau$ 的皮瑟级数,称这样的 $\Delta\tau$ 关于 $\Delta\lambda$ 的皮瑟级数为对偶皮瑟级数.

定理2 一个具有指标 n 和 g 的临界参数对 $(\lambda_\alpha, \tau_{\alpha,k})$ 对应 v 个 ($v \in \mathbf{N}_+$) 皮瑟级数

$$\begin{cases} \text{PS}_1 : \Delta\lambda = \sum_{i=g_1}^{\infty} C_{1i}(\Delta\tau)^{\frac{i}{n_1}}, \\ \vdots \\ \text{PS}_v : \Delta\lambda = \sum_{i=g_v}^{\infty} C_{vi}(\Delta\tau)^{\frac{i}{n_v}}. \end{cases} \quad (23)$$

其中: C_{1i}, \dots, C_{vi} 为复数系数,满足 $C_{lg_l} \neq 0 (l = 1, 2, \dots, v); n_l \in \mathbf{N}_+$ 与 $g_l \in \mathbf{N}_+$ 满足 $n_1 + \dots + n_v = n$ 与 $g_1 + \dots + g_v = g$.

每个皮瑟级数 PS_l 对应一个对偶皮瑟级数

$$\text{DPS}_l : \Delta\tau = \sum_{i=n_l}^{\infty} D_{li}(\Delta\lambda)^{\frac{i}{g_l}},$$

其中 D_{li} 为复数系数且 $D_{ln_l} \neq 0$. 这样,一个临界参数对 $(\lambda_\alpha, \tau_{\alpha,k})$ 便决定了 v 个对偶皮瑟级数

$$\begin{cases} \text{DPS}_1 : \Delta\tau = \sum_{i=n_1}^{\infty} D_{1i}(\Delta\lambda)^{\frac{i}{g_1}}, \\ \vdots \\ \text{DPS}_v : \Delta\tau = \sum_{i=n_v}^{\infty} D_{vi}(\Delta\lambda)^{\frac{i}{g_v}}. \end{cases} \quad (24)$$

由以上定理可知,一个临界参数对 $(\lambda_\alpha, \tau_{\alpha,k})$ 对应 v 个皮瑟级数与对偶皮瑟级数,即

$$\begin{cases} \text{PS}_l : \Delta\lambda = \sum_{i=g_l}^{\infty} C_{li}(\Delta\tau)^{\frac{i}{n_l}}, \\ \text{DPS}_l : \Delta\tau = \sum_{i=n_l}^{\infty} D_{li}(\Delta\lambda)^{\frac{i}{g_l}}, \\ l = 1, 2, \dots, v. \end{cases} \quad (25)$$

称式(25)中的皮瑟级数 PS_l 连同对偶皮瑟级数 DPS_l 为第 l 个对偶皮瑟级数对.

注6 对偶皮瑟级数的引入是建立频域扫描数学框架的关键一步,主要体现在研究频域扫描曲线渐近行为(见下一小节)和证明一致性(主要通过研究皮瑟级数与对偶皮瑟级数的关联,参见文献[13]中定理8.3的证明)中.

4.4 频域扫描曲线渐近行为

如果存在一组具有指标 g 的临界参数对 $(\lambda_\alpha \neq 0, \tau_{\alpha,k})$, $k \in \mathbf{N}$ (根据文献[13]中性质1.2:指标 g 是一个常数,不随 k 变化),则一定存在 g 条频域扫描曲线满足 $z_i(j\omega_\alpha) = z_\alpha = e^{-\tau_{\alpha,0}\lambda_\alpha}$ 并与参照线 \mathfrak{S}_1 在 $\omega = \omega_\alpha$ 处相交.在这 g 条频域扫描曲线中,用 $\text{NF}_{z_\alpha}(\omega_\alpha + \varepsilon)(\text{NF}_{z_\alpha}(\omega_\alpha - \varepsilon))$ 表示当 $\omega = \omega_\alpha + \varepsilon(\omega = \omega_\alpha - \varepsilon)$ 时在参照线 \mathfrak{S}_1 上方的频域扫描曲线的个数.为描述频域扫描曲线的渐近行为,定义符号 $\Delta\text{NF}_{z_\alpha}(\omega_\alpha)$ 如下:

$$\Delta\text{NF}_{z_\alpha}(\omega_\alpha) = \text{NF}_{z_\alpha}(\omega_\alpha + \varepsilon) - \text{NF}_{z_\alpha}(\omega_\alpha - \varepsilon). \quad (26)$$

可见, $\Delta\text{NF}_{z_\alpha}(\omega_\alpha)$ 的值可简单地通过观察频域扫描曲线确定.

一个非常重要的发现是,可以应用对偶皮瑟级数研究频域扫描曲线的渐近行为.

定理3 对于一个临界参数对 $(\lambda_\alpha, \tau_{\alpha,k})$,有如下关系成立:

$\Delta\text{NF}_{z_\alpha}(\omega_\alpha) = \text{ND}_{(\lambda_\alpha, \tau_{\alpha,k})}(+\varepsilon j) - \text{ND}_{(\lambda_\alpha, \tau_{\alpha,k})}(-\varepsilon j)$, 其中 $\text{ND}_{(\lambda_\alpha, \tau_{\alpha,k})}(+\varepsilon j)(\text{ND}_{(\lambda_\alpha, \tau_{\alpha,k})}(-\varepsilon j))$ 表示对偶皮瑟级数(24)中当 $\Delta\lambda = +\varepsilon j(\Delta\lambda = -\varepsilon j)$ 时虚部为正值

的个数.

注7 由于 $\Delta\text{NF}_{z_\alpha}(\omega_\alpha)$ 是与临界时滞无关的,如果能够证明“对于一个正 $\tau_{\alpha,k}$, $\Delta\text{NU}_{\lambda_\alpha}(\tau_{\alpha,k}) = \Delta\text{NF}_{z_\alpha}(\omega_\alpha)$ ”,则一致性猜想成立.这为证明一致性提供了一个重要的思路.

4.5 一致性猜想的证实

基于以上介绍的概念和结论,一致性猜想最近在文献[13,36]中得到证实.其结论如下.

定理4 考虑时滞系统(1)的一个临界虚根 λ_α .对于其所有正临界时滞 $\tau_{\alpha,k} > 0$, $\Delta\text{NU}_{\lambda_\alpha}(\tau_{\alpha,k})$ 是一个常数,且满足 $\Delta\text{NU}_{\lambda_\alpha}(\tau_{\alpha,k}) = \Delta\text{NF}_{z_\alpha}(\omega_\alpha)$.

定理4给出了两个重要结果,解释如下:

1) 定理4明确指出,对于一般形式的时滞系统(1),关于其渐近行为的一致性成立.该结论无任何条件限制.

2) 定理4提供了一种非常简单的分析渐近行为的方法.该方法仅需要观察频域扫描曲线,是一种图形化判据,无需任何分析渐近行为的计算(如调用并分析皮瑟级数或对偶皮瑟级数).

5 完全稳定性问题的系统求解

基于时滞系统渐近行为一致性,本节将系统地求解时滞系统完全稳定性问题.

5.1 当 $\tau \rightarrow +\infty$ 时系统稳定性

从前面的例子可以看到,在某一范围内增加时滞有可能带来镇定作用.然而如果时滞一直增加,它将对系统的稳定性产生怎样的影响?对于一般形式的时滞系统(1),这个问题人们一直未找到答案.之前的方法无法确认是否遗漏了时滞系统的一些稳定区间(很明显,只能对有限大的 τ 计算 $\text{NU}(\tau)$).因此,这个答案是求解时滞系统的完全稳定性问题的一个前提.

本小节将通过研究 $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{NU}(\tau)$ 来找到答案.

首先介绍一些有用的概念.对于一条频域扫描曲线 $\Gamma_i(\omega)$,临界频率 ω_α 称为穿越(接触)频率,如果 $\Gamma_i(\omega)$ 在 $\omega = \omega_\alpha$ 处穿越参照线 \mathfrak{S}_1 (与参照线 \mathfrak{S}_1 接触但不发生穿越).

明确了上面的概念后,现在给出两个相关结论.

定理5 如果时滞系统(1)有穿越频率,则存在一个 τ^* 使得时滞系统(1)对于所有 $\tau > \tau^*$ 都不稳定,且 $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{NU}(\tau) = \infty$.

定理6 一个时滞系统(1)一定属于下面3种类型中的一种:

类型1:系统有穿越频率, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{NU}(\tau) = \infty$;

类型2:系统既没有穿越频率也没有接触频率,对于所有 $\tau > 0$, $\text{NU}(\tau) = \text{NU}(0)$;

类型3:系统有接触频率但没有穿越频率,对于所有非临界时滞的 τ , $\text{NU}(\tau)$ 都是一个常数.

由上面定理可见,根据 $\tau \rightarrow \infty$ 的稳定性情况,可对所有的时滞系统进行分类.类型1的时滞系统在文献中较常见(本文稍后给出的例子就属于类型1).对于一个类型2的时滞系统,如果 $\text{NU}(0) = 0$,则对应于文献中常见的时滞无关稳定性.对于满足 $\text{NU}(0) > 0$ 且属于类型2的时滞系统,可见文献[13]中例9.1.属于类型3的时滞系统可见文献[41]中例4(临界虚根为单根情况)及文献[12]中的第3节的例子(临界虚根为二重根).

5.2 求解完全稳定性问题步骤

至此,时滞系统(1)的完全稳定性问题所涉及的技术难点都已可解,并且,它们都可在频域扫描框架下“统一”地解决(无需额外的工具).现在可以系统地解决时滞系统(1)的完全稳定性问题,具体步骤如下.

Step 1:生成频域扫描曲线.通过频域扫描曲线检测所有的临界虚根($\lambda_\alpha, \alpha = 0, 1, \dots$)和对应的临界时滞($\tau_{\alpha,k}, k \in \mathbf{N}$).

Step 2:对于一个临界虚根 λ_α ,可以取其任意一个正临界时滞 $\tau_{\alpha,k}$ 通过调用皮瑟级数计算 $\Delta NU_{\lambda_\alpha}(\tau_{\alpha,k})$,其值表示为 U_{λ_α} .由一致性可知,对于所有正临界时滞 $\tau_{\alpha,k}, k \in \mathbf{N}, \Delta NU_{\lambda_\alpha}(\tau_{\alpha,k}) = U_{\lambda_\alpha}$.或者,也可直接通过观察频域扫描曲线知道 $U_{\lambda_\alpha} = \Delta NF_{z_\alpha}(\omega_\alpha)$.

Step 3:根据定理1计算 $NU(+\varepsilon)$.

通过以上步骤,可以得到 $NU(\tau)$ 的显函数表达式,见下面定理.

定理7 对于任意非临界时滞 $\tau > 0$,时滞系统(1)的 $NU(\tau)$ 可表达为如下函数:

$$NU(\tau) = NU(+\varepsilon) + \sum_{\alpha=0}^{u-1} NU_\alpha(\tau). \quad (27)$$

其中

$$NU_\alpha(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < \tau_{\alpha,0}, \\ 2U_{\lambda_\alpha} \left[\frac{\tau - \tau_{\alpha,0}}{2\pi/\omega_\alpha} \right], & \tau > \tau_{\alpha,0}, \end{cases} \quad \tau_{\alpha,0} \neq 0;$$
$$NU_\alpha(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < \tau_{\alpha,1}, \\ 2U_{\lambda_\alpha} \left[\frac{\tau - \tau_{\alpha,1}}{2\pi/\omega_\alpha} \right], & \tau > \tau_{\alpha,1}, \end{cases} \quad \tau_{\alpha,0} = 0.$$

至此,可以彻底地求解时滞系统(1)的完全稳定性问题:时滞系统(1)渐近稳定当且仅当 τ 属于 $NU(\tau) = 0$ 的区间(不包括临界时滞点).此外,由定理5和定理6可以判断 $\tau \rightarrow \infty$ 时的系统稳定性情况.

5.3 完全稳定性问题解的意义和启发

对于一个无时滞的控制系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

其中 $u(t)$ 为控制器信号,这里取常见的状态反馈控制器 $u(t) = Kx(t)$ (K 为反馈控制矩阵).于是闭环系统为

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t). \quad (28)$$

很明显,该闭环系统渐近稳定的充要条件是:矩阵 $A + BK$ 的所有特征根都位于复平面左半平面 C_- .当然, $A + BK$ 的特征根个数等于该矩阵的维数(该维数是一个有限大的数,通常不会很大).

然而,即使对于一个标量形式的时滞系统(例如,时滞系统(1)中的所有系统矩阵都是 1×1 维),其特征根也有无穷多个.因此,时滞系统的分析与控制问题通常比无时滞系统复杂得多.做一个对比:基于闭环表达式(28)的控制器设计问题,一个自动化相关专业大二本科生会掌握若干种求解办法;但对于一个时滞系统,很多时滞领域的专家也仅仅能分析低维和一些特殊的系统.

可见,完全稳定性的求解(尤其是 $NU(\tau)$ 显式表达式的获得)是令人兴奋的,在很大程度上可以克服时滞系统的无穷维性!这将极大简化时滞系统的分析与设计.沿着这条线索,未来有望获得更多有价值的新成果.

6 实例说明

现在通过一个例子说明分析时滞系统完全稳定性的整个步骤.

例7 考虑一个时滞系统,其特征函数为

$$f(\lambda, \tau) = \sum_{i=0}^5 a_i(\lambda) e^{-i\tau\lambda}.$$

其中

$$a_0(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 5\lambda^2 + 4\lambda + 4,$$
$$a_1(\lambda) = 5\lambda^3 + 10\lambda^2 + 15\lambda + 10,$$
$$a_2(\lambda) = 4\lambda^3 + 14\lambda^2 + 24\lambda + 14,$$
$$a_3(\lambda) = \lambda^3 + 11\lambda^2 + 21\lambda + 11,$$
$$a_4(\lambda) = 5\lambda^2 + 10\lambda + 5,$$
$$a_5(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

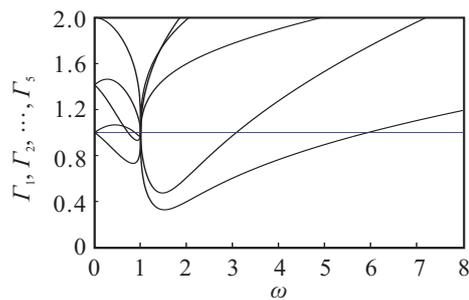


图8 例7的频域扫描曲线

生成该系统的频域扫描曲线,如图8所示.由频域扫描曲线可以检测到该系统含5组临界参数对

$$\left(0.7266j, 5.1884 + \frac{2k\pi}{0.7266} \right),$$
$$\left(0.8753j, 2.9402 + \frac{2k\pi}{0.8753} \right),$$
$$(j, \pi + 2k\pi),$$
$$\left(3.0777j, 0.4083 + \frac{2k\pi}{3.0777} \right),$$

$$\left(5.9358j, 0.1577 + \frac{2k\pi}{5.9358}\right).$$

下面介绍如何分析临界参数对 $(j, \pi + 2k\pi)$ 的渐近行为(其他临界参数对的渐近行为相对简单).

对于所有 $k \in \mathbf{N}$, 该组参数对的指标 n 和 g 都为 $n = 2, g = 5$. 由定理4, 可根据频域扫描曲线确定: 对于所有 $k \in \mathbf{N}, \Delta NU_j((2k + 1)\pi) = +1$. 该结论可通过调用皮瑟级数进行验证. 对于临界参数对 $(j, (2k + 1)\pi)$, 其皮瑟级数为

$$\begin{cases} \Delta\lambda = (0.5 - 0.5j)(\Delta\tau)^2 + o((\Delta\tau)^2), \\ \Delta\lambda = (0.5 + 0.5j)(\Delta\tau)^3 + o((\Delta\tau)^3). \end{cases} \quad (29)$$

同时, 还给出 (j, π) 附近的根轨迹(图9)以直观地说明以上结果.

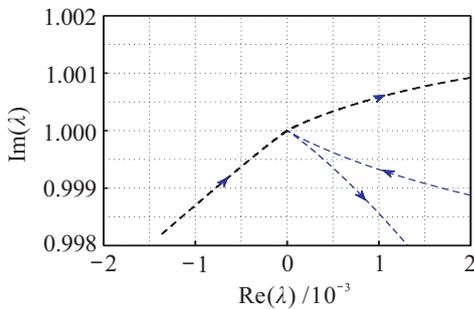


图9 例7中 (j, π) 附近的根轨迹

需要说明的是该例子较为特殊: 对于任意 $k \in \mathbf{N}$, 临界参数对 $(j, (2k + 1)\pi)$ 的皮瑟级数都为式(29)(同样情况通常不多见). 这里取这样的例子为了通过调用皮瑟级数可以验证一致性性质, 从而证实结论的正确性. 至此, 便可以分析所有临界参数对的渐近行为. 这里直接给出结果

$$U_{0.7266j} = -1, U_{0.8753j} = -1, U_j = +1,$$

$$U_{3.0777j} = +1, U_{5.9358j} = +1.$$

当 $\tau = 0$ 时系统特征根全部在左半平面 \mathbf{C}_- , 因此根据定理1, $NU(+\varepsilon) = 0$.

最后, 根据定理7, 对于任意非临界时滞的 τ 值, 系统不稳定根个数 $NU(\tau)$ 可显式地表达为

$$NU(\tau) = \sum_{\alpha=0}^4 NU_{\alpha}(\tau).$$

其中

$$NU_0(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 5.1884; \\ 2U_{0.7266j} \left\lceil \frac{\tau - 5.1884}{8.6474} \right\rceil, & \tau > 5.1884. \end{cases}$$

$$NU_1(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 2.9402; \\ 2U_{0.8753j} \left\lceil \frac{\tau - 2.9402}{7.1783} \right\rceil, & \tau > 2.9402. \end{cases}$$

$$NU_2(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < \pi; \\ 2U_j \left\lceil \frac{\tau - \pi}{2\pi} \right\rceil, & \tau > \pi. \end{cases}$$

$$NU_3(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0.4803; \\ 2U_{3.0777j} \left\lceil \frac{\tau - 0.4803}{2.0415} \right\rceil, & \tau > 0.4803. \end{cases}$$

$$NU_4(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0.1577; \\ 2U_{5.9358j} \left\lceil \frac{\tau - 0.1577}{1.0585} \right\rceil, & \tau > 0.1577. \end{cases}$$

图10给出了精确获得 $NU(\tau)$ 的变化情况. 该图也证实了定理5的正确性, 即对于例7, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} NU(\tau) = \infty$. 至此, 可以得出该时滞系统的完全稳定性结论: 该系统渐近稳定当且仅当 $\tau \in [0, 0.1577)$.

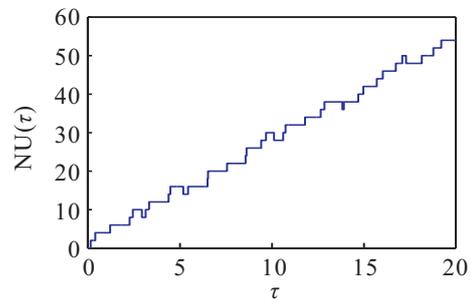


图10 例7的 $NU(\tau)$ 变化情况

7 扩展

上文介绍的频域扫描框架可以扩展至除 Retarded 型时滞系统之外的其他类型的时滞系统. 下面主要以中立型时滞系统为例进行讨论.

7.1 中立型时滞系统

中立型 (Neutral) 时滞系统是除了 Retarded 型时滞系统外在文献中最常见的时滞系统类型之一. 相比于前文介绍的内容, 关于中立型时滞系统的稳定性问题要更复杂一些. 要完全讲清楚技术性差别需要较长的篇幅(感兴趣的读者可参考文献[4]中1.2节的详细介绍), 下面概括分析中立型时滞系统完全稳定性的步骤.

考虑如下的中立型时滞系统:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + C\dot{x}(t - \tau), \quad (30)$$

其中 A, B, C 为维数兼容的系统矩阵. 该系统的特征函数为

$$f(\lambda, \tau) = \det(\lambda I - A - Be^{-\tau\lambda} - \lambda Ce^{-\tau\lambda}). \quad (31)$$

系统(30)的指数稳定充要条件是: 所有特征根均位于左半平面 \mathbf{C}_- 且其中立算子是指数稳定的.

需要说明的是, 对于前文介绍的 Retarded 型时滞系统, 其指数稳定与渐近稳定是等价的, 而这样的等价关系对于中立型时滞系统(30)不一定成立.

可见,与 Retarded 型时滞系统相比,中立型时滞系统(30)的稳定性有一个额外的必要条件:中立算子稳定. 如果中立算子不稳定,则对于任意 $\tau > 0$,中立型时滞系统(30)有无穷多个不稳定根. 因此,实际的研究步骤是:1) 检验中立算子是否稳定. 若中立算子稳定,则进行下一步;否则中立型时滞系统(30)对于任意 $\tau > 0$ 都不会稳定. 2) 分析 $NU(\tau)$ 随 τ 的变化情况. 这可应用频域扫描方法完成,基本步骤与针对 Retarded 型系统(1)时完全相同,主要是因为中立型时滞系统(30)的特征函数(31)也是准多项式形式.

具体说,中立型时滞系统(30)的中立算子是指如下方程:

$$x(t) = Cx(t - \tau). \quad (32)$$

对于任意 $\tau > 0$,中立算子(32)指数稳定当且仅当矩阵 C 的谱半径小于1.

中立算子(32)的稳定性也可以通过观察频域扫描曲线进行判断. 从而,该必要条件可以“嵌入”到前文介绍的频域扫描框架内进行检验.

定理8 中立算子(32)指数稳定当且仅当 $\omega \rightarrow \infty$ 时所有的频域扫描曲线都在参照线 \Im_1 上方.

可见,对中立型时滞系统(30)的完全稳定性分析可全部在频域扫描框架内完成. 相关例子和更多细节可见于文献[13]中第10章. 进一步,今后可以考虑更复杂的中立型时滞系统模型,例如将式(30)中 $Bx(t - \tau)$ 与 $Cx(t - \tau)$ 两项的 τ 变为两个独立的时滞参数.

7.2 其他类型时滞系统

频域扫描框架还可扩展至更多类型的时滞系统,大体思路与7.1节中介绍类似. 得益于解析曲线数学角度,频域扫描框架对所研究系统的特征函数没有形式上的限制.

目前,频域扫描框架已证实可应用于分数阶时滞系统、分布时滞系统和多时滞系统. 一些初步结果可见文献[36]中第V节.

7.3 多时滞系统

到目前为止,本文讨论的时滞系统都仅含一个时滞参数 τ . 当所研究系统涉及多个独立的时滞参数时,其稳定性更难分析.

考虑如下的多时滞系统:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{\ell=1}^L B_{\ell}x(t - \tau_{\ell}). \quad (33)$$

其中: $\tau_{\ell}(\ell = 1, 2, \dots, L)$ 为相互独立的时滞参数, A 、 B_{ℓ} 为维数兼容的系统矩阵.

多时滞系统(33)的特征函数为

$$f(\lambda, \tau_1, \dots, \tau_L) = \det \left(\lambda I - A - \sum_{\ell=1}^L B_{\ell} e^{-\tau_{\ell} \lambda} \right). \quad (34)$$

近年来,关于多时滞系统的稳定性是一个较热的研究方向^[23-24,42]. 然而,据作者了解,关于多参数的渐近行为分析仍是数学中的一个开放问题. 因此,对于多时滞系统的稳定性问题尚有一些技术难点有待解决.

本文介绍的结果可为人们提供一种有效的思路来分析多时滞系统(33)的稳定性. 将本文介绍的结果稍作扩展,便可分析出系统(33)关于每个时滞参数的渐近行为. 这样,可以用一种“递归”方法确定任意给定多时滞参数时系统(33)的稳定性. 一些初步结果在文献[36]中有报道.

7.4 几何与拓扑分析

以上几个小节从“宽度”方面介绍了本文方法的扩展. 即频域扫描框架可应用于更多类型的时滞系统,从而具有更广的适用面. 这一小节将从“深度”方面介绍频域扫描框架的进一步扩展.

通过前文的例子可见,时滞系统的渐近行为可能非常复杂:一个临界虚根可能对应重根、多个共轭类、退化等情况. 更直观地,这些复杂的渐近行为会表现在时滞系统的局部根轨迹上. 这里,以最常见的非重根的临界虚根为例加以解释:如果一个单重临界虚根不是退化的,则它对应的根轨迹直接地穿越虚轴;如果一个单重临界虚根是退化的,则它对应的根轨迹曲折地接触或穿越虚轴. 进一步,对应的退化项越多(即退化程度越高),它的根轨迹越曲折(这里可以结合文献[43]中的几何描述:一个单重临界虚根含的退化项越多,其根轨迹与虚轴具有越高的接触度,根轨迹表现得越平).

前文的例子还表明,一个临界虚根的重数可能随不同的临界时滞变化:对应不同的临界时滞,一个临界虚根可能在单根与不同重数的重根间切换. 例5说明,要想确定一个临界虚根是否一直为单根其实并不容易. 综上所述,对于“一个临界虚根可能的重数的判断”这个看似简单的任务,之前的文献中尚无有效的办法解决.

可见,虽然现在可以分析时滞系统的渐近行为对稳定性的影响,但是系统的很多更深入的信息仍不能得到有效且全面的了解.

基于此,文献[36]中提出了一个全新的几何及拓扑研究思路,其步骤及相关成果如下:

1) 引入了一个全新的指标:渐近行为特征度 (Asymptotic behavior signature). 通过该指标,可以描述任意情况下时滞系统临界虚根渐近行为及频域扫描曲线渐近行为的复杂程度. 该指标充分考虑了指标 n 与 g 、皮瑟级数及对偶皮瑟级数的共轭类个数、退化项个数等信息.

2) 证明了临界虚根的渐近行为特征度永远等于对应的频域扫描曲线的渐近行为特征度. 进一步,由这个等价性可知,临界虚根的渐近行为特征度也具有有一致性.

3) 根据渐近行为特征度的等价性和一致性,通过观察频域扫描曲线可以确定时滞系统的渐近行为特征度. 这样,从频域扫描曲线的几何结构便可确定临界虚根的可能重数及退化情况.

4) 根据其频域扫描曲线的结构,可以对所有时滞系统进行拓扑分类,使得对时滞系统的研究与认知上升一个层次. 换言之,可以同时研究一类时滞系统(而不再仅针对一个给定时滞系统进行专门的研究),并对同一类时滞系统进行归类整理. 当需要研究某一

个时滞系统时,仅需判断它属于哪类时滞系统,从而该系统的所有内部性质都可“直接”确定.

8 未来工作展望

8.1 拓扑库的建立

在7.4节中指出,可以对时滞系统的渐近行为通过其频域扫描曲线的几何结构进行分类. 沿这个思路,今后可以建立一个公开的拓扑库,收集各种典型的时滞系统频域扫描曲线以供人们参考. 这个工作的理论意义在前文中已介绍. 其实际操作也不困难,只需要一个免费网址即可(世界上任何一个人发现了新的拓扑类型都可随时上传到该拓扑库中). 而这样的交流方式也符合当今世界(尤其科研领域)日益频繁和便利的交流与合作模式.

这里借用文献[36]中的图9(见本文中图11)加以说明. 显然,仅通过图11便可以概括一条频域扫描曲线(FSC)与参考线相交的情况下,渐近行为特征度为1、2、3时所对应的所有6种根轨迹的情况. 可见,这种既直观又高度概括的科研新模式,为今后人们研究和认知时滞系统提供了非常大的便利.

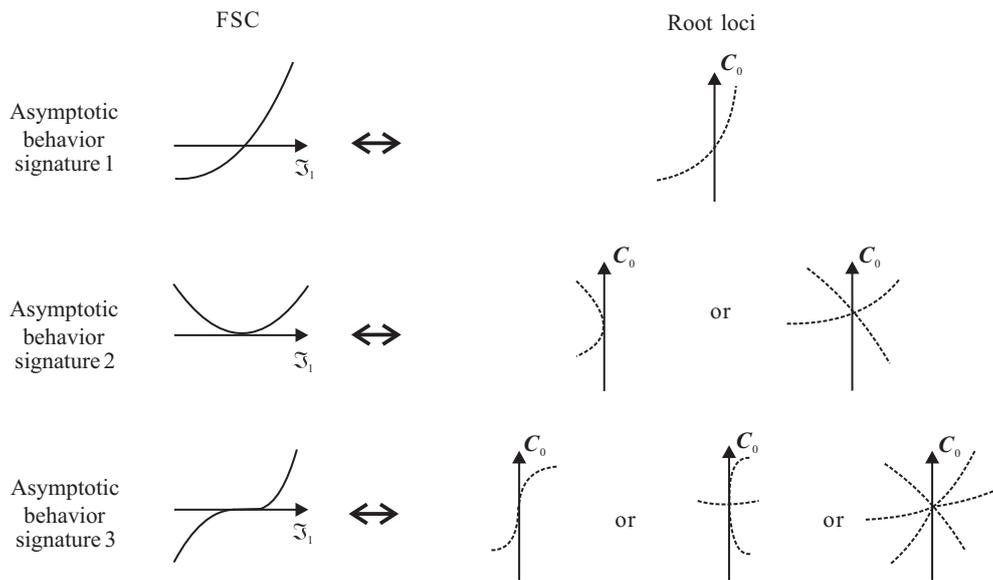


图11 一个拓扑关系图

8.2 不同科研问题的应用

应用完全稳定性分析的思路和方法,可能会对今后一些其他学科或具体科研/应用问题产生新的认知.

例如作者最近应用频域扫描方法发现,对于神经网络系统可以存在多个时滞稳定区间和不含零时滞稳定区间. 这种现象之前未被发现和报道.

本文介绍的方法可应用于更多与时滞因素有关联的学科. 例如,作者及合作者正尝试应用频域扫描

方法研究生物/医学中的一些时滞动态模型.

8.3 程序或软件包开发

前文提到了几款时滞系统领域的辅助分析设计软件包. 这些基本都是由国外科研团队开发的.

基于本文介绍的方法,可以很大程度克服时滞系统的无穷维性. 事实上,作者最近的工作发现,对于一些具体稳定性分析或控制器设计问题,甚至可将其转换为一个纯代数级别的问题. 这是开发新时滞系统辅助分析软件包的核心,可为开发自动化程序或一套

独立的软件包,甚至超越国外同行的相关工作提供技术保障。

这里介绍一个已完成的工作。作者最近开发了一个可自动分析多时滞系统的Matlab程序,从而,可应用不同于已有文献中的方法,成功复制了文献[42]中的稳定穿越图。

8.4 教学及科普

由于本文介绍的方法是一种图形化方法,使用简单且无需很高的理论门槛。这尤其有利于大学生和工程技术人员。

例如,作者近年来开始应用频域扫描方法于大学生毕业设计指导。从效果来看,得到以下几点正面反馈:

1) 频域扫描方法使用简单,使用者可先不关心内部的数学推导或证明。这点类似于本科生熟悉的Nyquist判据。学生们可短时间掌握该工具并正确分析一个时滞系统相关问题。

2) 可更好地理解时滞系统相关性质,并纠正过去错误的认识。例如,对于本科生而言,遇到时滞的第一反应可能是应用Smith预估控制器从而将时滞抵消。在了解完全稳定性相关内容后,人们可准确计算出一个系统在时滞处于哪些范围内稳定,从而可以确定在某些时候时滞是有益的(这种情况自然不应采用Smith预估控制器)。

作者认为,能将本文内容融汇到教学与科普中,将是一件非常有意义的工作。

9 结论

时滞系统完全稳定性是与很多学科相关的一个基础理论问题,长期以来受到人们的关注。由于其复杂性,要想清晰地了解并系统地解决这个问题并不容易。

本文用较通俗的语言,由浅入深地对时滞系统完全稳定性问题做了较全面的介绍,并给出了一些例子便于直观理解。

首先,给出时滞系统完全稳定性问题的相关基础知识,并介绍了时滞系统的(无穷维)谱特性;其次,简要回顾了现有文献中关于时滞系统完全稳定性问题的研究方法,并分别指出了这些方法的优缺点;再次,解释分析时滞系统完全稳定性问题所需步骤及涉及的技术难点,从而表明,完全稳定性问题是相当复杂的;最后,介绍了最近报道的频域扫描框架,这是基于解析曲线建立起来的一套自成体系的研究框架,在频域扫描框架内,可以系统地解决完全稳定性问题。

参考文献(References)

- [1] Niculescu S I. Delay effects on stability: A robust control approach[M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
- [2] Bellman R, Cooke K L. Differential-difference equations[M]. New York: Academic Press, 1963.
- [3] Hale J K, Verduyn Lunel S M. Introduction to functional differential equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [4] Michiels W, Niculescu S-I. Stability and stabilization of time-delay systems: An eigenvalue-based approach[M]. Philadelphia: SIAM, 2007.
- [5] Richard J P. Time-delay systems: An overview of some recent advances and open problems[J]. Automatica, 2003, 39(10): 1667-1694.
- [6] Sipahi R, Niculescu S-I, Abdallah C T, et al. Stability and stabilization of systems with time delay[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2011, 31(1): 38-65.
- [7] Lee M S, Hsu C S. On the τ -decomposition method of stability analysis for retarded dynamical systems[J]. SIAM J on Control and Optimization, 1969, 7(2): 242-259.
- [8] Cooke K L, van den Driessche P. On zeros of some transcendental equations[J]. Funkcialaj Ekvacioj, 1986, 29(1): 77-90.
- [9] Walton K, Marshall J E. Direct method for TDS stability analysis[J]. Proc of IEE, Part D: Control Theory and Applications, 1987, 134(2): 101-107.
- [10] Olgac N, Sipahi R. An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant(LTI) systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(5): 793-797.
- [11] Sipahi R, Olgac N. Degenerate cases in using the direct method[J]. ASME J of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2003, 125(2): 194-201.
- [12] Jarlebring E, Michiels W. Invariance properties in the root sensitivity of time-delay systems with double imaginary roots[J]. Automatica, 2010, 46(6): 1112-1115.
- [13] Li X G, Niculescu S I, Çela A. Analytic curve frequency-sweeping stability tests for systems with commensurate delays[M]. London: Springer, 2015.
- [14] Engelborghs K, Luzyanina T, Roose D. Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL[J]. ACM Trans on Mathematical Software, 2002, 28(1): 1-21.
- [15] Breda D, Maset S, Vermiglio R. Stability of linear delay differential equations: A numerical approach with Matlab[M]. New York: Springer, 2015.
- [16] Gumussoy S, Michiels W. A predictor-corrector type

- algorithm for the pseudospectral abscissa computation of time-delay systems[J]. *Automatica*, 2010, 46(4): 657-664.
- [17] Vyhlídal T, Zítek P. Mapping based algorithm for large-scale computation of quasipolynomial zeros[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2009, 54(1): 171-177.
- [18] Gu K, Kharitonov V L, Chen J. *Stability of time-delay systems*[M]. Boston: Birkhäuser, 2003.
- [19] Kharitonov V L, Niculescu S I, Moreno J, et al. Static output feedback stabilization: Necessary conditions for multiple delay controllers[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(1): 82-86.
- [20] Fridman E. *Introduction to time-delay systems: Analysis and control*[M]. Basel: Birkhäuser, 2014.
- [21] Middleton R H, Miller D E. On the achievable delay margin using LTI control for unstable plants[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2007, 52(7): 1194-1207.
- [22] Rekasius Z V. A stability test for systems with delays[C]. *Proc of Joint Automatic Control Conf.* San Francisco, 1980: TP9-A.
- [23] Delice I I, Sipahi R. Delay-independent stability test for systems with multiple time-delays[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2012, 57(4): 963-972.
- [24] Fazelinia H, Sipahi R, Olgac N. Stability analysis of multiple time delayed systems using "building block" concept[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2007, 52(5): 799-810.
- [25] Boussaada I, Niculescu S I. Tracking the algebraic multiplicity of crossing imaginary roots for generic quasipolynomials: A Vandermonde-based approach[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2016, 61(6): 1601-1606.
- [26] Wang Z H, Hu H Y. Stability switches of time-delayed dynamic systems with unknown parameters[J]. *J of Sound and Vibration*, 2000, 233(2): 215-233.
- [27] Chen J, Fu P, Niculescu S I, et al. An eigenvalue perturbation approach to stability analysis, Part II: When will zeros of time-delay systems cross imaginary axis?[J]. *SIAM J on Control and Optimization*, 2010, 48(8): 5583-5605.
- [28] Li X G, Niculescu S I, Çela A, et al. On computing Puiseux series for multiple imaginary characteristic roots of LTI systems with commensurate delays[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2013, 58(5): 1338-1343.
- [29] Qi T, Zhu J, Chen J. Fundamental limits on uncertain delays: When is a delay system stabilizable by LTI controllers[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2017, 62(3): 1314-1328.
- [30] Chen J, Latchman H A. Frequency sweeping tests for stability independent of delay[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(9): 1640-1645.
- [31] Fu P, Niculescu S I, Chen J. Stability of linear neutral time-delay systems: Exact conditions via matrix pencil solutions[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2006, 51(6): 1063-1069.
- [32] Hassard B D. Counting roots of the characteristic equation for linear delay-differential systems[J]. *J of Differential Equations*, 1997, 136(2): 222-235.
- [33] Hu G D, Liu M. Stability criteria of linear neutral systems with multiple delays[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2007, 52(4): 720-724.
- [34] Stépán G. *Retarded dynamical systems: Stability and characteristic functions*[M]. Harlow: Longman Scientific & Technical, 1989.
- [35] Vyhlídal T, Zítek P. Modification of mikhaylov criterion for neutral time-delay systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2009, 54(10): 2430-2435.
- [36] Li X G, Niculescu S I, Çela A, et al. A frequency-sweeping framework for complete stability analysis of time-delay systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2017, 62(8): 3701-3716.
- [37] Niculescu S I, Boussaada I, Li X G. Critical delays and multiple characteristic roots in dynamical systems: An overview[C]. *The 20th Int Conf on System Theory, Control and Computing.* Sinaia, 2016.
- [38] Tsytkin Ya Z. The systems with delayed feedback[J]. *Avtomathika i Telemekh*, 1946, 7: 107-129.
- [39] Casas-Alvero E. *Singularities of plane curves*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [40] Fulton W. *Algebraic curves: An introduction to algebraic geometry*[M]. New York: Benjamin, 1969.
- [41] Li X G, Niculescu S I, Çela A, et al. On τ -decomposition frequency-sweeping test for a class of time-delay systems, Part I: Simple imaginary roots case[C]. *The 10th IFAC Workshop on Time-Delay Systems*, Boston, 2012: 132-137.
- [42] Gu K, Naghnaeian M. Stability crossing set for systems with three delays[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2011, 56(1): 11-26.
- [43] Bruce J W, Giblin P J. *Curves and singularities*[M]. Cambridge: Cambridge Univeristy Press, 1984.

(责任编辑: 李君玲)