

带有偏序锥的DEARA模型研究及应用

张炳江, 张文英[†]

(北京信息科技大学 理学院, 北京 100192)

摘要: 数据包络分析(DEA)和回归分析(RA)两种方法都是处理多属性决策问题中常用的方法,前者的评价基准是基于“优秀者”,后者的评价基准是基于“平均像”.将这两种方法结合起来形成一个统一的评价方法,即DEARA方法,可以实现从“优秀者”到“平均像”的连续评价.此外,一种锥比率DEA模型 C^2WH 可以利用锥比率体现决策者对样本指标和决策单元的偏好,基于此模型,提出一种带有偏序锥的DEARA模型.最后,将所提出模型应用于我国铁路运输企业的效率分析上,通过实例表明所提出的模型在处理客观数据与主观因素并存的多属性决策中的合理性.

关键词: 多目标多属性决策; 数据包络分析; 回归分析; 约束锥; 绩效评价

中图分类号: O221

文献标志码: A

Research and application of DEARA model with preference constrained cone

ZHANG Bing-jiang, ZHANG Wen-ying[†]

(School of Applied Sciences, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100192, China)

Abstract: Data envelopment analysis(DEA) and regression analysis(RA) are the methods commonly used in dealing with multi-attribute decision making(MAPM). The evaluation criteria of DEA and RA are “good” and “average image”, respectively. Combining these two methods to form a unified evaluation method, namely DEARA method, can realize continuous evaluation from the “good” to “average image”. In addition, a cone ratio DEA model(C^2WH) can use the cone ratio to reflect the decision maker's preference for the sample index and decision-making unit. Based on this model, a DEARA model with a partial cone is proposed. The proposed model is applied to the analysis of the efficiency of railway transportation enterprises. The rationality of the proposed model in the multi-attribute decision-making of objective data and supervised factors is verified by examples.

Keywords: multi-objective MADM; DEA; RA; constraint cone; performance evaluation

0 引言

数据包络分析(Data envelopment analysis, DEA)是根据多指标投入和多指标产出对相同类型的单元进行相对有效性或效益评价的一种系统分析方法,能提供更准确的相对效率的估计、边际输入或输出值和目标水平^[1]. DEA基于“优秀者”评价,在输入与输出之间没有必需要想定的特定模型,也没有参数.回归分析(Regression analysis, RA)是基于“平均像”评价,其规定输入与输出之间存有模型,是带有参数的性能评价法^[2].在处理一些问题时,人们常常将这两种方法分别使用.无论是基于优秀者来评价的DEA,

还是基于平均像进行效果评价的RA,都是一种极端的评价方式.在实际问题处理的过程中,人们并不都是以优秀者或中间者作为评价基准,而是根据自身的实际情况选择一个适当的评价基准.

DEA和RA都是综合评价方法,在对目标进行评估时有着相同的优点和各自的不足.例如,DEA能提供更准确的相对效率评估,因为它是一个边界的方法;而RA提供的是置信区间评估. DEA能够指出哪些决策单元(Decision making unit, DMU)效率低下以及低下的原因,RA也能预测哪个样本在集体中的表现.一般情况下,由于DEA方法是一个边界评价方

收稿日期: 2017-04-24; 修回日期: 2017-10-17.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11271362).

责任编辑: 刘宝碇.

作者简介: 张炳江(1964—),男,副教授,博士,从事集值优化、多目标决策等研究; 张文英(1992—),女,硕士生,从事多目标优化及应用的研究.

[†]通讯作者. E-mail: zwy1004_or@163.com

法,得到的决策单元的效率值是小于等于1的. RA方法是一个“中间”评价方法,如果认为评价基准一侧的样本的效率值是小于等于1的,则基准另一侧的样本的效率值可以认为是大于等于1的. 根据上述的分析以及DEA和RA两种方法的共同特点,再加上Thanassoulis^[3]等学者对这方面已进行的研究,将DEA与RA这两种方法融合起来,在同一范围内进行“中间”评价是可行的.

此外,由于人类的思考方式是连续变化的,将DEA与RA这两种方法融合起来,形成两种方法之间的一种新的评价方法,即在同一范围内对决策单元或样本进行“连续性”评价是可行的也是必要的. 在实际应用中,例如高考结束后所有考生都要填报志愿,并不是所有的考生都会以清华大学和北京大学这样名校作为参考基准来报志愿的,也不会是所有的考生都以“二本”分数线作为自己的参考目标,而是考生会根据自己的分数报考与自己分数相近的学校. 在社会经济活动中也存在大量这样的情况,同类型企业有的追求是国际一流水准,有的发展目标是国内领先水平. 因此,一种能够形成既具有连续性又具有有效性评价基准的综合评价方法,无论在理论研究上还是在实际应用中都是必要的. 本文将DEA与RA这两种方法融合起来,形成两种方法之间的这一新的评价方法(DEARA)就是基于这样的考虑.

本文首先给出DEARA方法对各个DMU进行评价. 其特点是评价某一DMU时,计算得到的该DMU的权重就是最有利于这一DMU自身的权重,并且这样的评价结果都是理想的结果,不受任何人为因素的干扰. 然而,在一些决策问题的处理过程中,决策者参与决策评价是经常发生的事. 由于DEARA方法不能完全反映决策者对于DMU的输入或输出指标之间的重要度问题,评价结果只能单纯地由原始的输入和输出数据得到,这在处理实际应用问题时会有缺陷. 因此,需要对DEARA模型作进一步推广,即研究带有偏序锥的DEARA模型.

层次分析法(AHP)是美国运筹学家Saaty^[4-6]在20世纪70年代提出的一种实用的分析多目标、多准则复杂大系统的有力工具. AHP方法依据问卷调查,构造评价者的主观判断矩阵,并对评价者的“价值观”进行数理分析. 在具体的评价过程中,在DEARA模型中引入基于AHP方法构建的偏序锥,通过这种偏序锥来反映决策者对于决策单元(或样本)的输入或输出指标之间的价值判断. 最后通过对我国铁路运输企业的绩效分析验证DEARA模型以及带有偏

序锥的DEARA模型的可行性和实用性.

1 DEARA模型

1.1 数据包络分析

数据包络分析方法是1978年由Charnes、Cooper和Rhodes三位著名运筹学家首先提出来的. 它把单输入、单输出的工程效率概念推广到多输入、多输出同类决策单元的有效性评价中. DEA是基于优秀者,并且在输入与输出之间没有必要想定的特定模型,也没有参数,是评价多输入、多输出的同类部门(或单元)间相对有效性的一种重要方法.

设有 n 个决策单元,每个决策单元都有 m 个输入和 s 个输出,分别记第 j 个决策单元DMU _{j} 的输入和输出为 $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})^T, Y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj})^T, j = 1, 2, \dots, n$. 其中: $x_{ij} > 0, y_{rj} > 0, i = 1, 2, \dots, m, r = 1, 2, \dots, s$. 对 $j_0 (1 \leq j_0 \leq n)$ 决策单元进行效率评价,其C²R的等价的线性规划模型为

$$\begin{aligned} (\text{C}^2\text{R}) \max E_{j_0} &= \mu^T Y_{j_0}. \\ \text{s.t. } \omega^T X_j - \mu^T Y_j &\geq 0, j = 1, 2, \dots, n; \\ \omega^T X_{j_0} &= 1; \\ \omega &\geq 0, \mu \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $\omega^T = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m), \mu^T = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s)$ 分别为输入量和输出量的重要度向量. 引入非阿基米德无穷小 ε ,模型(1)的等价非线性规划模型为

$$\begin{aligned} (\text{D}_{\text{C}^2\text{R}}) \min \theta - \varepsilon &\left(\sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \right). \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- &= \theta x_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ &= y_{rj}, r = 1, 2, \dots, s; \\ \lambda_j &\geq 0, j = 1, 2, \dots, n; \\ s_r^+ &\geq 0, s_i^- \geq 0; \\ r &= 1, 2, \dots, s, i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $s^+ = (s_1^+, s_2^+, \dots, s_s^+)$ 和 $s^- = (s_1^-, s_2^-, \dots, s_m^-)$ 分别为输出量和输入量所对应的松弛变量.

1.2 回归分析

回归分析法是多元统计分析的一种,是研究两个或者多个随机变量间关联性的方法,是数理统计学与机器学习研究中的重要内容. 回归分析法是依据事物发展变化的因果关系来预测事物未来的发展趋势,它是研究变量间相互关系的一种定量预测方法,又称回归模型预测法或因果法.

最小二乘回归是一种线性回归模型,线性回归是

使用线性函数从现有的数据中估计出模型中所包含的未知参数的过程, 基于所建立的回归模型可以对未来的数据进行预测. 给定训练样本集 $\{x_i, y_i\}, x_i \in \mathbf{R}_d, i = 1, 2, \dots, n, x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{id})^T, y_i \in \mathbf{R}$, 寻找一个线性函数

$$f(x) = w^T x = \sum_{j=1}^d w_j x_j, \quad (3)$$

使损失函数 $L(f(x), y)$ 达到最小值, 即寻找一个最优的向量 w 使损失函数最小. 这里取损失函数为对训练样本预测的误差平方和, 即

$$L(f(x), y) = \sum_{i=1}^n (w x_i - y_i)^2. \quad (4)$$

对 w 求偏导并令其为零, 最终可得线性回归方程

$$f(x) = y^T X ((X^T X)^{-1})^T x. \quad (5)$$

其中: X 为 $n \times d$ 矩阵, 它的每一行由列向量 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的转置构成; w 为 d 维列向量; $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. 若 $X^T X$ 不可逆, 则可以计算 $X^T X$ 的伪逆.

1.3 EMA方法和DEARA模型

假设输入变量 x 与输出变量 y 之间有如下关系式成立:

$$f(x, y, p) = 0, \quad (6)$$

其中 p 是模型的参数.

一般情况下, 式 (6) 对于每一个样本 i 的样本值 (x_i, y_i) 不是都成立的, 其中的残差用 z_i 表示, 即

$$z_i = f(x_i, y_i). \quad (7)$$

假设表示残差的误差函数为 $e_i(z_i)$, 则对于 n 个样本的综合误差可表示为

$$E = E(e_1(z_1), e_2(z_2), \dots, e_n(z_n)). \quad (8)$$

运用EMA(Error minimization analysis)方法对综合误差最小化处理求得参数 p . 在输出为单一变量时, 对于EMA方法, 设定 $e(z) = z^2, E = \sum z^2$, 则综合误差分析(EMA)就相当于线性回归分析. 如果式 (6) 的变量为多输入和多输出, 则式 (6) 的线性关系表达式可以写成

$$uy = v^T x,$$

即

$$uy - v^T x = 0.$$

此时, 残差为

$$z_i = uy_i - v^T x_i.$$

如果设定关注的0号样本的 $v^T x_0 = 1$, 并且规定

$z_i > 0$ 时有 $e_i(z_i) = 0$, 则有

$$z_i = uy_i - v^T x_i \leq 0. \quad (9)$$

式 (9) 即为DEA方法的C²R模型的约束条件. 还有

$$e_0(z_0) = uy_0 - v^T x_0.$$

因为 $v^T x_0 = 1$, 所以 $e_0(z_0) = uy_0 - 1$. $e_0(z_0)$ 的最小化, 就是 uy_0 的最大化. 在这种情况下, 综合误差分析(EMA)就相当于数据包络分析.

由上述分析可以看出, DEA和RA通过EMA建立了联系. 虽然DEA和RA是两种评价方法, 但本质上是相通的. RA是对于因变量(输入或输出)在其估计平均水平上的一种平均法; DEA在许多方面是一个基于异常值的评价方法, 即DEA是一个边界的方法. 然而, 无论是基于优秀者进行评价的DEA, 还是基于平均像来进行性能评价的RA, 都是极端的评价方法, 如果将DEA与RA结合在一个框架结构内, 则形成了一种新的“中间”评价方法, 即DEARA方法.

本文提出的DEARA方法与已有的一些文献的折衷评价方法是不同的. 已有的一些折衷评价方法大多是将两种“极端”的评价方法结合起来解决问题, 如乐观评价法与悲观评价法的结合形成的乐观系数法^[7]; 还有的是将几种各自带有缺陷的方法结合起来形成一种新的评价方法以克服原评价方法的缺陷, 如将线性规划、回归分析、灰色理论以及指数曲线预测等方法结合起来形成的组合预测法^[8-13]. 这些评价方法只是简单地将两种或两种以上的方法结合起来形成一种新的评价方法, 并将原数据进行了重新处理, 但没有改变评价基准. 如图1所示(以单输入和单输出为例), DEARA方法能够在DEA的评价基准(边界)和RA的评价基准(“中间”的RR'线)提供新的且具有连续性的评价基准. DEARA这种评价方法依据参变量的连续变化, 使得RA评价法向DEA评价法过度的广义性能评价成为可能.

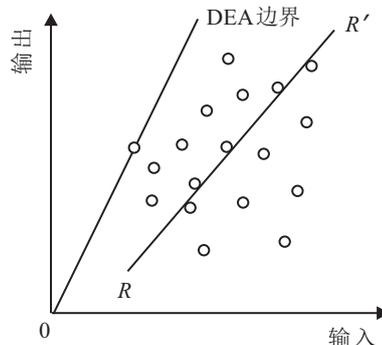


图1 DEA和RA

由上面的分析, 根据DEA的C²R模型和线性回归模型, 建立每个决策单元的DEARA模型. 即对于

某决策单元 DMU_{j_0} , 有如下 DEARA 的线性规划模型:

$$\begin{aligned} \min L &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i \rho_i + \beta_i \eta_i). \\ \text{s.t. } u^T y_i - v^T x_i &= \rho_i - \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ v^T x_0 &= 1; \\ u \geq 0, v \geq 0, \rho \geq 0, \eta \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

其中: $\rho_i \geq 0$ 是正的残差变量, $\eta_i \geq 0$ 是负的残差变量, u 和 v 体现的是决策单元根据优化模型自动配置的最优权重.

对于模型(10), 如果设 $\alpha_i = \beta_i = 1 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 DEARA 模型即为最小绝对值型的线性回归分析; 如果设 $\alpha_i \rightarrow \infty, \beta_i \rightarrow 0 (i \neq 0, \beta_0 = 1)$, 则 DEARA 模型就成为 C^2R 型数据包络分析. 此处, 根据模型(10)的解, 得到 DMU_{j_0} 的输出评价值的总和为 $u^T y_0 = \rho_0 - \eta_0 + v^T x_0 = 1 + \rho_0 - \eta_0$, $u^T y_0$ 称为 DMU_{j_0} 的一般化效率值. DMU_{j_0} 的输入输出数据 (x_0, y_0) 在模型关系式 $u^T y = v^T x$ 存在的情况下, 当 $\rho_0 = \eta_0 = 0$ 时, 一般化效率值为 1. 对于 DEA, 相对效率其实是与最优线性生产函数的相对比较, 效率值一定是小于等于 1 的. 如果规定 $z_i > 0$ 时误差函数 $e_i(z_i)$ 可以不为零, 则对于 DEARA, 一般化效率值大于 1 的决策单元是可以存在的.

DEARA 模型(模型(10))中的 DEA 与 RA 的结合方法并不是简单的线性组合, 而是通过两个参变量函数完成的. 这两个参变量函数是非线性的(参看“残差比例系数的讨论”部分), 它们随着自变量的变化, 使得 DEARA 方法可以无误差地过渡到 DEA 方法或 RA 方法.

对于 DEA 模型而言, 效益小于或等于 1 以及产出值为正值是线性规划求解的前提. 但对于 DEARA 模型而言, 效益大于或等于 1 以及产出值为负值是可以理解的, 因为如果决策单元的某一项产出按利润计算, 则可以出现负值. 对于这一点, 作为决策人或投资人在正常运营的条件下是必须要考虑的问题. 因此, 运用 DEARA 模型在解决这样的问题时有其现实和管理的意义.

2 带偏序锥的 DEARA 模型

通常的 DEA 模型认为投入和产出的每个指标都是同等重要的, 是由线性规划模型优化产生的, 没有对投入指标之间和产出指标之间预先赋予权重值, 这一点对于实际应用是存在不足的, 不能反映决策者对于各个决策单元(或样本)的输入或输出的主观偏好

信息. 在实际应用过程中, 投入指标之间和产出指标之间并不是一成不变的, 即决策单元的改善方案不是单一的. 其实, 在为无效决策单元提出改善方案时, 还有必要考虑决策单元的内部状况和外部环境以及决策者的主观愿望, 也就是要考虑社会事实以及评价者的价值观. 当初 Chilingirian 和 Sherman 等人正是应用带偏好锥的 DEA 模型评估了初级医生的相对效率, 得到了很好的结果, 之后有许多学者将带偏好锥的 DEA 模型应用到各个领域解决一些实际问题, 并取得了很好的效果^[4]. 为此, 本文在模型(10)的基础上提出一种广义的 DEARA 模型, 以解决决策单元改善方案单一性的问题.

本文利用闭凸锥形成的偏序锥来体现决策者对于各个决策单元(或样本)的输入或输出的主观偏好, 主要是在 DEARA 模型上引入基于 AHP 方法构建的约束锥, 具体形式如下:

$$\begin{aligned} \min L &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i \rho_i + \beta_i \eta_i). \\ \text{s.t. } u^T y_i - v^T x_i &= \rho_i - \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ v^T x_0 &= 1; \\ u \in U, v \in V, \rho \geq 0, \eta \geq 0; \\ U &= \{u | AU \geq 0\}; \\ V &= \{v | BV \geq 0\}. \end{aligned} \quad (11)$$

其中: $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 $m \times n$ 矩阵, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 为 $s \times n$ 矩阵, 分别由输入和输出向量组成; $V, U \subseteq E_+^n$ 为闭凸锥, 并且 $\text{int}V \neq \emptyset, \text{int}U \neq \emptyset$. 上述模型的对偶模型为

$$\begin{aligned} \max \theta. \\ \text{s.t. } - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + \theta x_{j_0} &\in V^*; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j &\in U^*; \\ -\alpha_j \leq \lambda_j \leq \beta_j, \quad j &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (12)$$

其中 U^* 和 V^* 分别为 U 和 V 的负极锥.

基于偏序锥的模型更能反映决策者的偏好, 在具体的评价过程中可以实现主观与客观相结合、定性与定量相集成的交互式评价与决策, 所以在处理一些实际问题时, 模型(11)更加实用.

3 关于残差比例系数的讨论

由于处理问题的实际情况不同, 两个参变量比例系数 α_i 和 β_i 的选择是多种多样的. 无论两个参

变量比例系数如何变化, 都需要保证以下这几个条件成立: 1) 这两个参变量是同一个变量 t 的两个函数. 2) 这两个函数的变化是连续的. 3) 变量 t 为某一值时, 有 $\alpha_i = \beta_i = 1$, 此时 DEARA 成为线性回归分析; 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 有 $\alpha_i \rightarrow +\infty, \beta_i \rightarrow 0 (i \neq 0, \beta_0 = 1)$, 此时 DEARA 便成为数据包络分析.

根据上面的讨论, 构造如下函数来表达残差比例系数 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 和 $\beta_i (i \neq 0)$ 的变化:

$$\alpha_i = \exp(t), i = 1, 2, \dots, n; \tag{13}$$

$$\beta_i = \exp(-t), i \neq 0, \beta_0 = 1. \tag{14}$$

4 实际案例分析

4.1 样本数据来源及指标选取

本文主要运用带有偏序锥 DEARA 模型对我国 18 个铁路局(公司)2008 年的绩效进行评价. 评价数据见表 1^[15].

表 1 我国 18 个铁路局(公司)2008 年的指标原始数据

铁路局(公司)	DMU	I_1	I_2	I_3	I_4	O_1	O_2
哈尔滨局	1	1066	12333.5	129300	2697865.07	149544	2619392
沈阳局	2	1560	18398.7	188476	3870472.37	317417	2760440
北京局	3	1746	12603.7	139031	3353330.14	291473	3024812
太原局	4	1259	7422.9	81549	2230976.27	294964	4422618
呼和浩特局	5	522	3769.2	45604	1080003.2	110417	1635706
郑州局	6	1157	7056.7	85634	2109045.08	237114	1740635
武汉局	7	850	6745.8	64726	1813285.28	158745	1261696
西安局	8	711	5326.9	69086	1671539.32	147199	1303419
济南局	9	596	6997.6	63170	1722307.89	165498	1677238
上海局	10	1751	11213	136953	3685598.12	281196	3538200
南昌局	11	1046	7355.7	75394	2015082.02	160848	1203222
广铁集团	12	1029	7592.2	122145	2909701.55	241276	2717067
南宁局	13	679	4491.9	45289	1123253.31	105147	1082222
成都局	14	1184	9075.9	99737	2691615.84	174607	2161180
昆明局	15	381	3071.5	32650	785725.85	40706	760716
兰州局	16	842	5825.2	57639	1450069.96	150303	1163509
乌鲁木齐局	17	601	4959.9	38674	1334997.36	92678	1563219
青藏铁路	18	245	3384.5	13178	657908.83	19674	420594

根据 Pedraja-Chaparro 的研究, 对 DEA 模型结果有较大影响的 3 个方面分别是投入产出指标的数量、投入产出指标之间的相关程度和样本规模的大小, 其中样本规模至少为投入产出指标之和的 3 倍^[16]. 由于 DEA 效率是一种相对效率, 只要各决策单元间具有可比性, 则其测算结果也具有可信性, 能够真实反映所取指标的效率情况. 鉴于此, 本文选取我国 18 个铁路局作为研究对象, 其中能够反映铁路运输运行过程中人、财、物的投入指标为机车 I_1 (台)、营业里程 I_2 (km)、从业人数 I_3 和运输总支出 I_4 (万元), 能反映铁路运输企业的产出和经济效益情况的产出指标为换算周转量 O_1 (10^6 t/km) 和运输总收入 O_2 (万元).

4.2 基于偏序锥 DEARA 模型的铁路运输企业的绩效分析

根据表 1 的 18 个铁路局(公司)的投入产出数据, 很容易得到对应决策单元 DMU1 的 D_{C^2R} 模型, 即将相应的数据代入模型(2)即可. 其余的 17 个铁路局的决策单元模型可以同样地表示出来. 本文利用 Lingo11 软件对这些模型求解, 其计算结果见表 2, 其中非阿基米德无穷小量 $\varepsilon = 10^{-6}$.

根据表 2 的计算结果可以对 18 个铁路局(公司)进行综合分析: 决策单元 4 和 9 的相对效率值均等于 1, 说明这两个铁路局(公司)为 DEA 有效; 决策单元 12 的相对效率大于 0.9 且小于 1; 相对效率值最低的

表2 基于模型(2)的计算结果

DMU	θ_0	s^-			s^+		
		x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	y_{11}	y_{12}
1	0.700	0.00	4 230.95	42 146.57	565 820.39	25 154.86	0.00
2	0.777	0.00	2 655.53	36 248.95	0.00	0.00	961 100.59
3	0.695	0.00	662.84	11 386.20	0.00	0.00	1 127 715.18
4	1.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5	0.898	0.00	534.74	9 978.87	122 689.7	0.00	0.00
6	0.869	0.00	0.00	7 851.37	12 030.48	0.00	1 767 407.81
7	0.758	0.00	275.38	0.00	34 015.18	0.00	878 433.04
8	0.841	0.00	0.00	12 641.6	163 680.23	0.00	683 273.25
9	1.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	0.675	0.00	0.00	11 646.64	278 419.74	0.00	539 488.23
11	0.640	0.00	220.05	1 078.11	0.00	0.00	1 083 688.24
12	0.956	0.00	0.00	42 765.27	759 565.92	0.00	563 965.28
13	0.708	31.94	534.28	2 995.39	0.00	0.00	494 326.38
14	0.596	0.00	0.00	4 930.1	114 961.02	0.00	168 550.19
15	0.568	0.00	469.02	4 530.92	62 855.21	10 029.52	0.00
16	0.784	18.57	784.4	3 633.36	0.00	0.00	1 090 097.38
17	0.745	2.93	1 072.99	0.00	206 432.65	11 580.01	0.00
18	0.589	24.45	1 285.88	0.00	175 017.6	8 377.28	0.00

铁路局是决策单元15(昆明局). 此外决策单元1、2、3、5、6、7、8、10、11、12、13、14、15、16、17和18的相对效率值均小于1,说明这些铁路局(公司)为非DEA有效. 从表2中决策单元8的投入产出来看,如果达到综合效率DEA有效,则产出指标和投入指标都需要调整. 投入指标中从业人数、运输总支出的实际值分别是81 727.6和1 835 219.55,径向变量需要分别减少12 641.60和163 680.23才能达到预期标准,在产出指标中,运输总收入需要在松弛上增加683 273.25才能达到DEA有效.

基于表1中18个铁路局(公司)的投入产出数据,通过DEARA对这18个铁路局(公司)的绩效进行评价. 对应于决策单元1(哈尔滨局)的DEARA线性规划模型很容易得到,即将投入产出数据代入模型(10)中;而其他17个铁路局(公司)的模型只需要对约束条件 $v^T x_0 = 1$ 的数据进行改变就可以得到. 对于模型(10),目标函数中正的残差变量 ρ_i 和负的残差变量 η_i 的系数分别利用式(13)和(14)得出, $t = 0, 1, \dots, 8$. 计算结果见表3,其中DEARA(t)表示 t 取上述值时对应的计算结果. 图2是表3计算结果的图示化表示.

由图2和表3中可以看出,从RA的评价到DEA

的评价,18个铁路局(公司)在整个区域上它们的性能都比较相似,即 t 从0到1这一阶段,一般化效率值都处于减小的状态; t 从1到8这一阶段,一般化效率值都处于平稳状态. 从铁路局(公司)的经济效率的角度而言,每个铁路局(公司)基于平均像时的经济性都比基于优秀者时的经济性好. 当 $t = 0$ (DEARA模型为线性回归模型)时,决策单元4(太原局)的一般化效率值最高;当 $t = 8$ (DEARA模型为数据包络分析模型)时,决策单元4(太原局)和决策单元9(济南局)的一般化效率值达到1,即这时两个铁路局的经济效益是最好的. t 从0到8这一阶段,决策单元2(沈阳局)的一般化效率值变化最小,决策单元4(太原局)的一般化效率值变化最大. 由于当 t 增大时,DEARA模型为数据包络模型,对比表2和表3的结果是相符的,两个结果都显示只有决策单元4和9是相对有效的.

对于表1的数据,采用RA方法进行计算后作对比分析. 其RA模型采用 $y_{ij} = \beta_{1j}x_{1j} + \beta_{2j}x_{2j} + \beta_{3j}x_{3j} + \beta_{4j}x_{4j}$,其中 $i = 1, 2$ 为输出项目, $j = 1, 2, \dots, 15$ 为决策单元. 因为DEARA模型是使目标函数最小化,也就相当于RA中常数项为零,所以选用不带常数项的线性回归模型进行计算. RA方法计算的各个决策单元的效率值如表4所示.

表3 基于模型(10)的计算结果

DMU	DEARA(0)	DEARA(1)	DEARA(2)	DEARA(3)	DEARA(4)	DEARA(5)	DEARA(6)	DEARA(7)	DEARA(8)
1	0.7811	0.5083	0.5075	0.5075	0.5075	0.5075	0.5075	0.5075	0.5075
2	0.8606	0.7314	0.7317	0.7317	0.7317	0.7317	0.7317	0.7317	0.7317
3	0.9967	0.7125	0.6839	0.6839	0.6839	0.6839	0.6839	0.6839	0.6839
4	1.7185	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	1.4357	0.8605	0.8605	0.8605	0.8605	0.8605	0.8605	0.8605	0.8605
6	1.1085	0.8747	0.8674	0.8674	0.8674	0.8674	0.8674	0.8674	0.8674
7	0.9614	0.7521	0.7521	0.7521	0.7521	0.7521	0.7521	0.7521	0.7521
8	1.0559	0.8063	0.8063	0.8063	0.8063	0.8063	0.8063	0.8063	0.8063
9	1.1794	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	1.0000	0.6496	0.6496	0.6496	0.6496	0.6496	0.6496	0.6496	0.6496
11	0.8102	0.6563	0.6335	0.6335	0.6335	0.6335	0.6335	0.6335	0.6335
12	1.0529	0.8575	0.8518	0.8518	0.8518	0.8518	0.8518	0.8518	0.8518
13	0.9235	0.6610	0.6462	0.6462	0.6462	0.6462	0.6462	0.6462	0.6462
14	0.8521	0.5812	0.5812	0.5812	0.5812	0.5812	0.5812	0.5812	0.5812
15	0.8206	0.4267	0.4267	0.4267	0.4267	0.4267	0.4267	0.4267	0.4267
16	1.0000	0.7620	0.7380	0.7380	0.7380	0.7380	0.7380	0.7380	0.7380
17	1.0795	0.6126	0.6126	0.6126	0.6126	0.6126	0.6126	0.6126	0.6126
18	0.5002	0.2693	0.2740	0.2740	0.2740	0.2740	0.2740	0.2740	0.2740

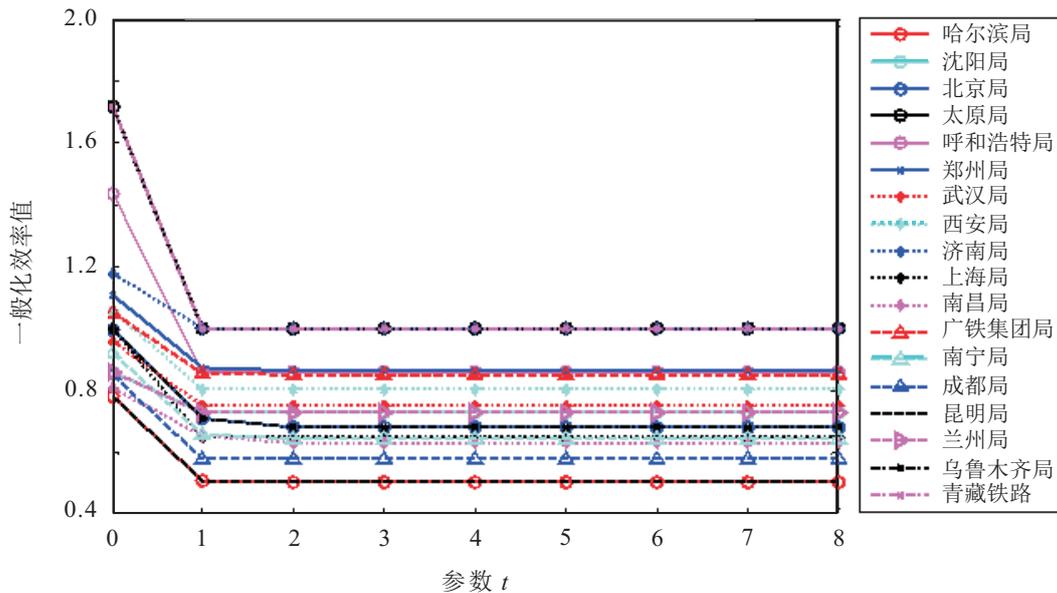


图2 18个铁路局(公司)基于DEARA模型一般化效率值的推移

表4 回归分析的效率计算结果

DMU	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
效率	0.74	0.73	0.97	1.07	0.96	1.05	0.91	0.92	0.73	0.99	0.98	0.89	1.05	0.92	0.92	1.02	0.89	0.64

表4是根据线性回归模型通过计算得到的18个铁路局(公司)的效率值. 对于DEARA模型, 当 $t = 0$ 时, DEARA模型即为线性回归模型, 因此, 对比表4和表3中DEARA(0)的数值可以看到, 两组数的结果基本保持一致, 只有个别决策单元的数值差距略微大一些, 例如, 决策单元4和9. 在利用单纯的DEARA模型

分析时, 只有决策单元4和9随着 t 的增大其效率值趋于1, 说明这两个决策单元本身就处于边缘上, 评估分析时更适合使用DEA方法($t \rightarrow +\infty$ 时, DEARA模型 \rightarrow DEA模型). 这时若使用RA方法分析决策单元4和9, 则将导致评价结果不准确.

对于模型(11), 首先确定偏序锥 U 和 V , 采用层次

分析法(AHP)的1~9标度,并依据决策者对输入输出指标的偏好确定偏序锥 U 和 V .具体计算步骤如下.

Step 1: 利用AHP方法的1~9标度,对输入和输出指标分别构建判断矩阵 A_2 和 B_2 ,即

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 2 & 1 & 1 & 1/5 \\ 3 & 1 & 1 & 1/4 \\ 6 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

并检验其一致性.

Step 2: 计算判断矩阵 A_2 和 B_2 的最大特征 $\lambda_{\max}^{A_2} = 4.0601, \lambda_{\max}^{B_2} = 2$.

Step 3: 构造矩阵 $A = A_2 - \lambda_{\max}^{A_2} E$ 和 $B = B_2 - \lambda_{\max}^{B_2} E$,其中 E 为单位矩阵,即

$$A_2 = \begin{bmatrix} -3.0601 & 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 2 & -3.0601 & 1 & 1/5 \\ 3 & 1 & -3.0601 & 1/4 \\ 6 & 5 & 4 & -3.0601 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Step 4: 构造闭凸锥 $Av \geq 0$ 和 $Bu \geq 0$.其中: $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T \geq 0, u = (u_1, u_2)^T \geq 0$.

Step 5: 构造输入极锥 $V' = \{v | Av \geq 0\}$ 和 $U' = \{Bu \geq 0\}$.

Step 6: 构造负极锥 $V = \{v | -Av \leq 0\}$ 和 $U = \{u | -Bu \leq 0\}$.

负极锥 $V = \{v | -Av \leq 0\}$ 和 $U = \{u | -Bu \leq 0\}$ 就是模型(11)中引用的 V 和 U ,根据模型对每个决策单元进行评价.将表1的输入输出数据代入下面模型:

$$\min L = \sum_{i=1}^{18} (e^t \rho_i + e^{-t} \eta_i).$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} u^T y_i - v^T x_i = \rho_i - \eta_i, i = 1, 2, \dots, 18; \\ v^T x_0 = 1; \\ u \in U, v \in V, \rho \geq 0, \eta \geq 0. \end{cases}$$

依据上述模型计算18个运输企业的一般化效率值,其计算结果如表5及图3所示.

由表5的计算结果得知,随着 t 的变化,决策单元2、3、6、7、8、11、12、14、16和18的一般化效率始终都小于1,说明它们一直处在评价基准的同一侧.决策单元1、5、9、10、13、15和17的一般化效率值在 $t = 1$ 时由大于1变化为小于1.决策单元4在 $t = 0$ (基于RA方法的评价)时,一般化效率值为

表5 基于模型(11)的计算结果

DMU	DEA-RA(0)	DEA-RA(1)	DEA-RA(2)	DEA-RA(3)	DEA-RA(4)	DEA-RA(5)	DEA-RA(6)	DEA-RA(7)	DEA-RA(8)
1	1.0218	0.4874	0.4858	0.4858	0.4858	0.4856	0.4848	0.2860	0.2201
2	0.7716	0.3684	0.3668	0.3668	0.3668	0.3661	0.3585	0.3231	0.3657
3	0.9694	0.4609	0.4609	0.4609	0.4604	0.4591	0.4586	0.4087	0.2538
4	2.1030	1.0000	1.0000	0.9991	0.9994	0.9998	0.9997	0.9717	0.9930
5	1.6049	0.7632	0.7631	0.7631	0.7630	0.7630	0.7080	0.7619	0.7532
6	0.9041	0.4299	0.4299	0.4299	0.4297	0.4291	0.4236	0.1655	0.1583
7	0.7595	0.3612	0.3611	0.3611	0.3610	0.3609	0.3611	0.3573	0.3243
8	0.8447	0.4016	0.4016	0.4016	0.4016	0.3998	0.4004	0.2279	0.3957
9	1.0490	0.4988	0.4988	0.4988	0.4988	0.4985	0.4945	0.4746	0.4971
10	1.0247	0.4883	0.4872	0.4870	0.4870	0.4850	0.4860	0.1819	0.2565
11	0.6538	0.3109	0.3109	0.3109	0.3108	0.3108	0.3086	0.1648	0.3096
12	0.9997	0.4765	0.4755	0.4755	0.4754	0.4742	0.4558	0.3887	0.2773
13	1.0360	0.4926	0.4926	0.4924	0.4918	0.4869	0.1832	0.4921	0.3660
14	0.8576	0.4078	0.4077	0.4077	0.4077	0.4046	0.4074	0.4017	0.4073
15	1.0191	0.4845	0.4845	0.4845	0.4843	0.4836	0.4791	0.4725	0.4810
16	0.8761	0.4167	0.4166	0.4166	0.4163	0.4165	0.4165	0.4104	0.1723
17	1.2396	0.5898	0.5898	0.5897	0.5887	0.5896	0.5870	0.5886	0.3579
18	0.6745	0.3207	0.3207	0.3207	0.3202	0.3206	0.2941	0.3200	0.0760

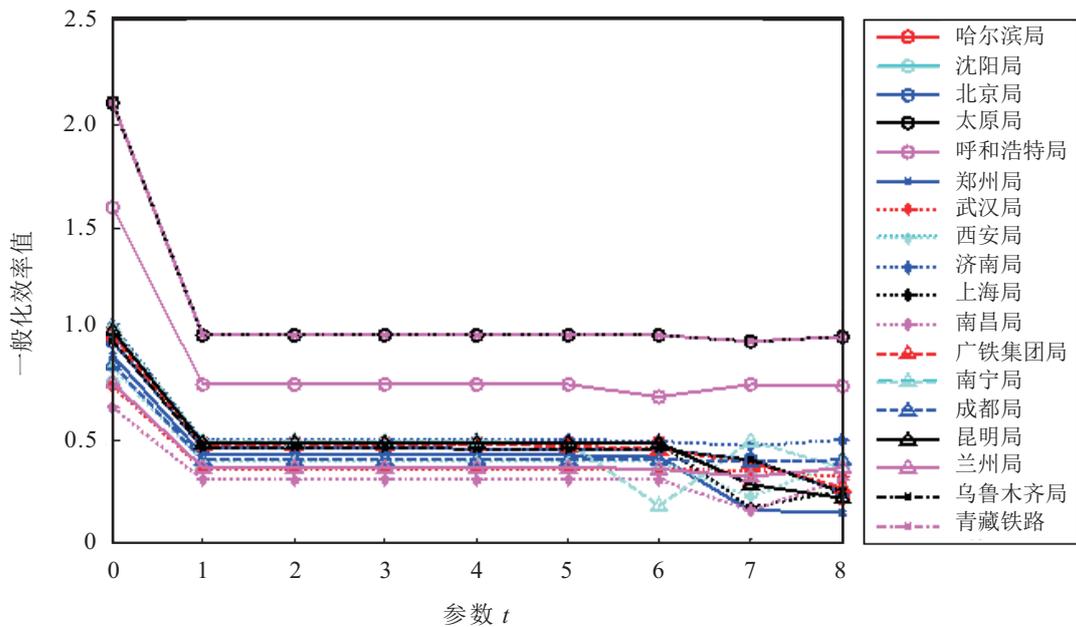


图3 18个铁路局(公司)基于模型(11)一般化效率值的推移

2.1030,而且其一般化效率值是 $t = 0$ 时所有决策单元中最大的,说明在该时刻该效率值是远离评价基准的.而后可以发现随着 t 的变化,决策单元10的一般化效率值要么等于1,要么接近于1,一直都处于评价基准之上.在 $t = 2, \dots, 6$ 阶段,除了决策单元13(南宁局)有小小的波动外,其他的决策单元都处于平稳阶段.与DEARA模型的计算结果对比显示,模型(11)加入决策者的偏好信息以后改变了铁路局的效率值,受决策者偏好的作用,当 $t = 7, 8$ 时所有决策单元的一般化效率值又一次有了起伏,最后趋近于小于或等于1(基于DEA方法的评价).

总之,随着 t 的增大,正的残差比例系数增大,负的残差比例系数减小,导致正的残差影响增大,负的残差影响减小,使得DEARA模型或带偏序锥的DEARA模型都趋近于DEA模型,此时所有决策单元的一般化效率值都小于或等于1,说明模型(11)是合理的.

5 结论

本文将数据包络分析与回归分析两种方法结合起来形成一种新的方法,即可以实现两种方法之间评价的DEARA方法,并通过实例验证了DEA方法和RA方法是DEARA方法的两个特例. DEARA方法不仅包含了原来两种方法的优点,而且评价基准可以在DEA的边界基准和RA的“中间”基准之间连续变化.在此基础上,引入了能够体现决策者主观意识的偏序锥,提出了带有偏序锥的DEARA模型.偏序锥是根据决策者的偏好而引进的表明不同的输入和输出指标重要性程度的闭凸锥.偏序锥的构造引用

了AHP方法.通过将DEARA模型和带有偏序锥的DEARA模型运用于我国铁路运输企业的绩效评价,验证了本文提出的新模型的有效性和实用性.与传统的模型相比,新模型增加了决策者的主观偏好,运用主观与客观相结合的思想,有效地改进了原模型理想化的缺点.

在对新模型中正残差变量和负残差变量的系数选取时,如何选择更合适的系数模式有待于进一步研究.

参考文献(References)

- [1] Charnes A, Cooper W W, Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units[J]. *European J of Operational Research*, 1978, 3 (4): 429-444.
- [2] 王惠文, 刘强, 屠永平. 偏最小二乘回归模型内涵分析方法研究[J]. *北京航空航天大学学报*, 2000, 26(4): 473-476.
(Wang H W, Liu Q, Tu Y P. Identification of optimal subspace from PLS regression[J]. *J of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2000, 26(4): 473-476.)
- [3] Thanassoulis E. A comparison of regression analysis and data envelopment analysis as alternative methods for performance assessments[J]. *The Operations Research Society of Japan*, 1994, 2-E-2: 204-205.
- [4] Saaty T L. A scaling method for priorities in hierarchical structures[J]. *J of Mathematical Psychology*, 1978, 1(1): 57-68.
- [5] Saaty T L. Axiomatic foundation of the analytic hierarchy process[J]. *Management Science*, 1986, 23(7): 851-855.
- [6] Saaty T L, Vargas L G. Uncertainty and rank order in the analytic hierarchy process[J]. *European J of Operational*

- Research, 1987, 32(1): 107-117.
- [7] 王春雨, 贝金兰. 乐观系数估分方法研究[J]. 内蒙古科技与经济, 2005(2): 92-93.
(Wang C Y, Bei J L. Research on estimation of optimistic coefficient[J]. Inner Mongolia Science Technology & Economy, 2005(2): 92-93.)
- [8] 周传世. 线性规划在确定组合预测组合权数中的应用[J]. 预测, 1993(4): 39-40.
(Zhou C S. The application of linear programming in determining the combination weight of combination forecasting[J]. Forecasting, 1993(4): 39-40.)
- [9] 陈华友, 盛昭瀚, 刘春林. 调和平均的组合预测方法之性质研究[J]. 系统工程学报, 2004, 19(6): 620-624.
(Chen H Y, Sheng Z H, Liu C L. Research on properties of harmonic means combination forecasting method[J]. J of Systems Engineering, 2004, 19(6): 620-624.)
- [10] 张倩, 沈利, 蔡焕杰, 等. 基于灰色理论和回归分析的需水量组合预测研究[J]. 西北农林科技大学学报: 自然科学版, 2010, 38(8): 223-227.
(Zhang Q, Shen L, Cai H J, et al. Combination forecast research on water demand based on the grey theory and regression analysis[J]. J of Northwest A & F University: Natural Science Edition, 2010, 38(8): 223-227.)
- [11] 黄召杰, 陈伟. 组合预测方法在我国铁路客流预测中的应用[J]. 交通科技与经济, 2011, 13(4): 97-98.
(Huang Z J, Chen W. Combination forecast method of china railway passenger flow forecast in the application[J]. Technology & Economy in Areas of Communications, 2011, 13(4): 97-98.)
- [12] 曾波, 刘思峰, 方志耕, 等. 灰色组合预测模型及其应用[J]. 中国管理科学, 2009, 17(5): 150-155.
(Zeng B, Liu S F, Fang Z G, et al. Grey combined forecast models and its application[J]. Chinese J of Management Science, 2009, 17(5): 150-155.)
- [13] 仝哲, 张炳江. 关于春运铁路客运量预测模型的研究[J]. 北京信息科技大学学报, 2016, 31(3): 80-83.
(Tong Z, Zhang B J. Forecasting model for spring festival railway passenger capacity[J]. J of Beijing Information Science & Technology University, 2016, 31(3): 80-83.)
- [14] 罗旋, 陈廷, 刘文芬. 锥比率 DEA 模型在医院相对效率评估中的应用[C]. 中国运筹学会第七届学术交流会议论文集. 香港, 2004: 342-347.
(Luo X, Chen T, Liu W F. An application of cone ratio DEA model in the relative evaluation of hospital[C]. Operations Research Society of China. Hong Kong, 2004: 342-347.)
- [15] 郗志芳. 我国铁路运输企业的绩效评价[D]. 北京: 北京交通大学经济管理学院, 2010.
(Xi Z F. Research on the performance measurement of China's railway transport enterprises[D]. Beijing: School of Economics and Management, Beijing Jiaotong University, 2010.)
- [16] Pedraja-Chaparro F, Salinas-Jimenez J, Smith P. On the quality of data envelopment analysis[J]. J of the Operational Research Society, 1999, 50(5): 636-644.
- [17] 龚本刚, 张孝琪, 郭丹丹. 基于证据理论-DEA交叉效率的混合型多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(5): 943-948.
(Gong B G, Zhang X Q, Guo D D. Method for hybrid multiple attribute decision-making based on Dempster-Shafer theory and cross efficiency of DEA[J]. Control and Decision, 2016, 31(5): 943-948.)
- [18] Wu J, Yin P Z, Sun J S, et al. Evaluating the environmental efficiency of a two-stage system with undesired outputs by a DEA approach: An interest preference perspective[J]. European J of Operational Research, 2016, 254(3): 1047-1062.
- [19] Sookdeo B. An efficiency reporting system for organizational sustainability based on work study techniques[J]. South African J of Industrial Engineering December, 2016, 27(4): 227-236.
- [20] Zha Y, Zhao L L, Bian Y W. Measuring regional efficiency of energy and carbon dioxide emissions in China: A chance constrained DEA approach[J]. Computers & Operations Research, 2016, 66(2): 351-361.
- [21] 郭清娥, 王雪青, 位珍. 基于DEA交叉评价的模糊综合评价模型及其应用[J]. 控制与决策, 2012, 27(4): 575-578.
(Guo Q E, Wang X Q, Wei Z. Fuzzy comprehensive evaluation based on cross-evaluation and its application[J]. Control and Decision, 2012, 27(4): 575-578.)
- [22] 苏世兰, 李国安, 张炳江. 基于偏序锥DEA的军事情报机构的考评[J]. 北京信息科技大学学报, 2013, 28(5): 61-66.
(Su S L, Li G A, Zhang B J. Efficiency evaluating of military technology intelligence agencies based on DEA with preference constrained cone[J]. J of Beijing Information Science and Technology University, 2013, 28(5): 61-66.)
- [23] Liu L, Li L, Chen Y. The assessment model of service performance for the third party logistics based on imprecise super-efficiency DEA[C]. The 8th Int Conf of Chinese Logistics & Transportation Professionals. Virginia: ASCE Press, 2009: 3603-3608.
- [24] Sheng Z. The research on agricultural products logistics efficiency in China based on DEA-Malmquist model[J]. Computer Modelling & New Technologies, 2014, 18(12C): 1101-1106.

(责任编辑: 李君玲)