

高斯中继信道反馈下马尔可夫跳变线性系统的可镇定性

宋 杨^{1,2†}, 刘永壮^{1,2}, 黄正龙^{1,2}, 侯维岩³

(1. 上海大学 机电工程与自动化学院, 上海 200072; 2. 上海电站自动化技术重点实验室, 上海 200072; 3. 郑州大学 信息工程学院, 郑州 450001)

摘 要: 研究利用高斯中继信道实现反馈信息传输情形下马尔可夫跳变线性系统的均方可镇定性问题. 首先针对一般类型的高斯信道, 从信息论角度给出上述马尔可夫跳变线性系统镇定所需要的必要条件; 然后分别针对半双工串联中继信道以及非正交网络信道这两种特殊类型的高斯信道, 在考虑传输信号存在平均功率约束的情况下, 给出马尔可夫跳变线性系统的均方可镇定性与上述信道参量之间的内在联系; 最后通过数值仿真例子验证了上述理论结果.

关键词: 网络控制; 马尔可夫跳变系统; 均方可镇定; 信息论; 高斯中继信道

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Stabilizability of Markov jump linear systems over a Gaussian relay channel

SONG Yang^{1,2†}, LIU Yong-zhuang^{1,2}, HUANG Zheng-long^{1,2}, HOU Wei-yan³

(1. School of Mechatronics Engineering and Automation, Shanghai University, Shanghai 200072, China; 2. Shanghai Key Laboratory of Power Station Automation Technology, Shanghai 200072, China; 3. School of Information Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: Mean square stabilizability of a Markov jump linear system Using Gaussian relay communication channels is investigated. Firstly, necessary conditions of general Gaussian channels are given to guarantee the mean square stabilizability of the Markov jump linear system. Considering two specified types of Gaussian relay channels (i.e. half-duplex cascade channels and nonorthogonal network channels) with average power constraint, the relationships between mean square stabilizability of the Markov jump linear system and the parameters of the communication channels are presented. Finally, the proposed theoretic results are verified by a numerical example.

Keywords: networked control; Markov jump systems; mean-square stabilizability; information-theory; Gaussian relay channel

0 引 言

网络控制系统(Network control systems, NCSs)是指经由有线或无线通信网络实现信息传递的一类控制系统. 在NCSs现有研究中,考虑通信环节对系统性能的影响时,大多将其等效为不同特征的网络诱导延时,进而借助于时滞系统、鲁棒与随机控制等既有的控制理论与方法展开分析. 近年来,一些学者通过融合通信、信息和控制理论讨论通信信道参量对控制系统性能的内在约束问题^[1],信息熵理论是进行上述探索的重要工具之一. 文献[2-3]的研究表明,为保证线性定常系统为可镇定,反馈信道所需的最小

数据率取决于该定常系统的特征值等特征. 文献[4]针对有损信道情形,给出了保证系统为可镇定所需最小信道数据传输率与被控对象的特征值和数据丢包概率之间的关系. 文献[5]使用线性矩阵不等式方法得到了系统镇定所需要的最小信噪比. 文献[6]考虑了闭环控制系统的宽平稳性和输入信号功率谱密度的联系. 文献[7]针对受扰系统的跟踪控制问题,得到了系统的灵敏度函数与其Bode积分间的关系. 文献[8-9]给出了高斯信道下镇定线性定常系统的信道必要条件和编码策略. 文献[10]针对多种具体高斯网络信道,给出了线性系统均方可镇定的信道必要条

收稿日期: 2017-03-27; 修回日期: 2017-10-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61573237).

责任编委: 俞立.

作者简介: 宋杨(1976—),男,教授,博士,从事切换控制、网络控制等研究; 刘永壮(1989—),男,博士生,从事网络控制系统、切换控制的研究.

†通讯作者. E-mail: y_song@shu.edu.cn

件. 文献[11]针对多输入多输出网络控制系统,提出了负熵率概念并在此基础上给出了系统的扰动抑制性能所满足的基本约束. 文献[12]给出了模拟可擦除信道下分散控制系统的均方稳定性必要和充分条件. 文献[13]提出了两类特殊的高斯信道(高斯广播信道、高斯多接入性信道)下标量线性系统状态反馈可镇定的充要条件. 文献[14]进一步将上述结果推广到高斯乘积信道环境. 值得一提的是,上述研究基本上都是针对被控对象为线性定常系统展开的. 近年来,也有文献将被控对象从线性定常拓展为更为复杂的一类常见随机系统——马尔科夫跳变系统. 文献[15]给出了在无外部干扰下的马尔可夫跳变系统可镇定的数据率下界. 文献[16]给出了标量非齐次马尔可夫跳变系统均方稳定充分条件. 文献[17]研究了高斯信道的信噪比对Markov切换系统扰动抑制性能的影响.

本文进一步给出串联信道以及非正交高斯网络环境下,为保证闭环系统为可镇定,信道参量与Markov跳变系统自身特征之间存在的约束关系,并通过数值仿真例子验证了上述理论结果.

1 问题描述和准备

考虑如下离散Markov跳变线性系统:

$$X_{k+1} = A_{\sigma(k)}X_k + U_k + W_k, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (1)$$

其中: $X_k \in \mathbf{R}^n, U_k \in \mathbf{R}^n, W_k \in \mathbf{R}^n$ 分别为系统的状态、控制输入、过程干扰,初始状态 X_0 服从高斯分布 $\mathcal{N}(0, \Sigma_{x_0})$. 过程干扰 W_k 服从高斯分布 $\mathcal{N}(0, \Sigma_{w_k})$, 状态矩阵 $A_{\sigma(k)}$ 非奇异. 切换信号 $\{\sigma(k)\}$ 是一个在有限集合 $S = \{1, 2, \dots, N\}$ 内取值的Markov链,其初始概率分布记为 $F := [f_1 \dots f_N]^T, f_i := \Pr\{\sigma(0) = i\}$.

假设1 系统初始状态 X_0 、过程干扰 W_k 和切换信号 $\{\sigma(k)\}$ 三者相互独立.

假设2 Markov链 $\sigma(k)$ 不可约且非周期.

由假设2可知,Markov链 $\sigma(k)$ 为遍历,其平稳分布 $\Pi := [\pi_1 \dots \pi_N]^T$ 可如下求取:

$$\begin{cases} \Pi^T = \Pi^T P, \\ [1 \dots 1]\Pi = 1, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $P := [p_{ij}]_{N \times N}$ 为一步转移概率矩阵, $p_{ij} := \Pr\{\sigma(k+1) = j | \sigma(k) = i\}$.

定义1 随机变量 X 的熵 $H(X)$ 定义为

$$H(X) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log p(x), \quad (3)$$

其中 $p(x)$ 为随机变量 X 的概率密度.

熵的概念可以表征随机变量的不确定程度,解决了信息的量化度量问题.

定义2 考虑两个随机变量 X 和 Y , 他们的联合概率密度函数 $p(x, y)$, 其边际概率密度函数分别记为 $p(x)$ 和 $p(y)$, 则互信息 $I(X; Y)$ 定义如下:

$$I(X; Y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)}. \quad (4)$$

互信息和熵存在如下关系^[16]:

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X).$$

引理1^[18](数据处理不等式) 若 $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ 构成马尔可夫链, 则 $I(X; Y) \geq I(X; Z)$.

引理2^[17](微分熵不等式) 考虑具有 N 模态的离散Markov链 $\{\sigma(k)\}, k \in \mathbf{Z}^+$, 矩阵 $A_j \in \mathbf{R}_{N \times N}$ 可逆, $j = 1, 2, \dots, N$. 构造随机过程 $Y_k = A_{\sigma(k)}X$, 则对于 $\forall k \in \mathbf{Z}^+$, 总存在

$$h(Y_k) \geq h(X) + \sum_{i=1}^N (\pi_i + C^T P^{k-1} p_i) \log |\det A_i|.$$

其中: $X \in \mathbf{R}^n$ 为 N 维随机变量, $C = [c_1 \dots c_N]^T, c_j = f_j - \pi_j, [\pi_1 \dots \pi_N]^T$ 为 $\{\sigma(k)\}$ 的平稳分布, p_i 为转移概率矩阵 P 的第 i 列.

引理3^[18] 设随机变量 $X \in \mathbf{R}^n$ 均值为零, 协方差矩阵表示为 $M = E(XX^T)$, 那么随机变量 X 的微分熵具有如下性质:

$$h(X) \leq \frac{1}{2} \log(2\pi e)^n |M|, \quad (5)$$

当且仅当 $X \sim \mathcal{N}(0, M)$ 时等号成立.

定义3 考虑Markov跳变线性系统(1), 若对于任意初始条件 $\{X_0, \sigma(0)\}$ 及任意时刻 k , 都存在常量 $M < \infty$, 使得 $E[\|X_k\|^2] \leq M$, 则称系统(1)均方可镇定.

定义4^[9](信道容量) 离散无记忆信道输入信号为 $\{X_k\}$, 输出信号为 $\{Y_k\}$, 那么信道容量(Channel capacity)定义为

$$C = \max_{p(x)} I(X, Y) = \max_{p(x)} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{I(X_{[0,k]}; Y_{[0,k]})}{k+1}. \quad (6)$$

其中: $p(x)$ 为随机变量 X 的概率密度, 且满足条件 $E(X^2) \leq P; X_{[0,k]} := \{X_0, X_1, \dots, X_k\}, Y_{[0,k]} := \{Y_0, Y_1, \dots, Y_k\}$. 特别地, 对于高斯信道(见图1), 信道噪声服从方差为 N 的高斯分布, 其信道容量为

$$\max I(X, Y) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{N}{P} \right). \quad (7)$$

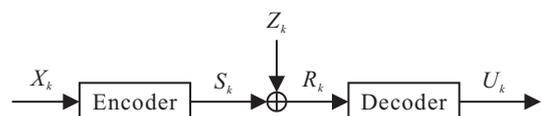


图1 高斯信道

引理4^[10] 如果线性系统经过高斯信道达到均方稳定,考虑从0到 $K-1$ 时刻总存在

$$\log |\det A_i| \leq \liminf_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} I(X_{[0,K-1]} \rightarrow R_{[0,K-1]}). \quad (8)$$

其中: $I(X_{[0,k-1]} \rightarrow R_{[0,k-1]})$ 表示由 $X_{[0,k-1]}$ 输送到编码器 $R_{[0,k-1]}$ 的定向信息,有

$$I(X_{[0,K-1]} \rightarrow R_{[0,K-1]}) = \sum_{k=0}^{K-1} I(X_{[0,k]}; R_k | R_{[0,k-1]}),$$

$$X_{[0,k]} := \{X_0, X_1, \dots, X_k\},$$

$$R_{[0,k-1]} := \{R_0, R_1, \dots, R_{k-1}\};$$

$|\det A_i|$ 表示矩阵 A_i 行列式的绝对值.在引理2的基础上延伸,有如下引理.

引理5 考虑经过如图1所示的高斯信道离散Markov跳跃线性系统(1),若其为均方可镇定,则如下条件必然满足:

$$\sum_{i=1}^N (\pi_i + C^T P^{k-1} p_i) \log |\det A_i| \leq \liminf_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} I(X_{[0,K-1]} \rightarrow R_{[0,K-1]}), \quad (9)$$

其中Markov链具有 N 个模态.

证明 由引理(4)可知

$$I(X_{[0,K-1]} \rightarrow R_{[0,K-1]}) = \sum_{k=0}^{K-1} I(X_{[0,k]}; R_k | R_{[0,k-1]}). \quad (10)$$

由互信息和熵的相关性质和式(10)可得

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{K-1} I(X_{[0,k]}; R_k | R_{[0,k-1]}) \geq \\ & \sum_{k=1}^{K-1} (h(A_{\sigma(k-1)} X_k | R_{[0,k-1]}) - h(X_k | R_{[0,k]})) + \\ & I(X_0; R_0). \end{aligned} \quad (11)$$

由引理2可知

$$\begin{aligned} & h(A_{\sigma(k-1)} X_{k-1} | R_{[0,k-1]}) \geq \\ & \sum_{i=1}^N (\pi_i + C^T P^{k-1} p_i) \log |\det A_i| + \\ & h(X_{k-1} | R_{[0,k-1]}). \end{aligned} \quad (12)$$

将式(12)代入(11),得到

$$\begin{aligned} & I(X_{[0,K-1]} \rightarrow R_{[0,K-1]}) \geq \\ & \sum_{i=1}^N (\pi_i + C^T P^{k-1} p_i) \log |\det A_i| + \\ & h(X_0) - h(X_{k-1} | R_{[0,k-1]}). \end{aligned} \quad (13)$$

注意到,加入条件使熵减小的事实

$$\begin{aligned} & I(X_{[0,K-1]} \rightarrow R_{[0,K-1]}) \geq \\ & (K-1) \sum_{i=1}^N (\pi_i + C^T P^{k-1} p_i) \log |\det A_i| + \\ & h(X_0) - h(X_{k-1}), \end{aligned} \quad (14)$$

由系统均方可镇定和引理3可知,总存在 $h(X_k) \leq \log((2\pi e)^n |\det M|)$,当且仅当 X_k 服从高斯分布时等号成立.于是有

$$\begin{aligned} & I(X_{[0,K-1]} \rightarrow R_{[0,K-1]}) \geq \\ & (K-1) \sum_{i=1}^N (\pi_i + C^T P^{k-1} p_i) \log |\det A_i| + \\ & h(X_0) - \log((2\pi e)^n |\det M|), \end{aligned} \quad (15)$$

进而有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N (\pi_i + C^T P^{k-1} p_i) \log |\det A_i| \leq \\ & \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} I(X_{[0,K-1]} \rightarrow R_{[0,K-1]}) + \\ & I(R_t, X_{[1,Lk]} | Y_{[1,t-1]}^i, R_{[0,k-1]}). \end{aligned} \quad (16)$$

引理5得证. \square

2 高斯串联信道

在无线网络控制环境中,采样/编码器与解码器、执行机构之间往往距离较远,因此需要在信道中使用中继器完成信号传递.考虑如图2含单个中继的半双工串联中继信道,其中中继节点 R 不能同时接收和传输信号.

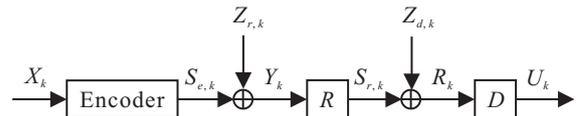


图2 半双工串联中继信道

对于随机任意时刻高斯信号 X_k 均值为零,方差记为 σ_x^2 .通过编码器 E 产生 $S_{e,k} = f_n(\{X_i\}_{i=1}^n)$ 信号并满足平均功率约束 $E[S_{e,k}^2] \leq P_S$.通过信道有 $Y_k = S_{e,k} + Z_{r,k}$, Y_k 经过中继 R 产生 $S_{r,k}$, $R_k = S_{r,k} + Z_{d,k}$ 满足平均功率约束 $E[S_{r,k}^2] \leq P_r$,噪声方差分别为 N_r 和 N_d .

定理1 任意离散Markov跳跃线性系统(1)单一中继节点的高斯信道如图2所示,若系统均方可镇定,则总存在如下关系:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N (\pi_i + C^T P^{k-1} p_i) \log |\det A_i| \leq \\ & \min\{C_{S_e \rightarrow Y}, C_{S_r \rightarrow R}\}. \end{aligned} \quad (17)$$

其中: $C_{S_e \rightarrow Y}$ 为从 S_e 到 Y 的信道容量, $C_{S_r \rightarrow R}$ 为从 S_r 到 R 的信道容量, N 为马尔可夫链的 N 个模态.

证明 考虑0到 $K-1$ 时刻, $I(S_{e,[0,K-1]}; R_{[0,K-1]})$ 由于 $S_{e,[1,K]} \rightarrow Y \rightarrow S_r \rightarrow R$ 成为Markov链, 由引理1可知, $I(S_{e,[0,K-1]}; R_{[0,K-1]})$ 小于

$$\min\{I(S_{e,[0,K-1]}; Y_{[0,K-1]}), I(S_{r,[0,K-1]}; R_{[0,K-1]})\}.$$

由定义4可知, 当 $K \rightarrow \infty$ 时, 有

$$I(S_{e,[1,k]}; R_{[1,k]}) \leq \min\left\{C_{S_e \rightarrow Y}, C_{S_r \rightarrow R}\right\}, \quad (18)$$

结合引理5可得证. \square

某些情况下信号传输距离较远, 往往需要通过多个中继才能够传输到控制器, 因此下文进一步考虑多个中继半双工式协作传输的情况.

考虑在 $L-1$ 中继上采用半双工传输信息如图3所示, 从 X 到 R 需要 L 个时长, 在 $[nL+1, (n+1)L]$ 时段, $nL+1$ 编码器编码信号 X_{nL+1} 经过高斯信道传到中继 R_1 , $nL+2$ 时刻再传输到 R_2 , 最后 $(n+1)L$ 经中继 R_{L-1} 到译码器控制器, 任意时刻只允许单一中继传输信号. S_k 表示从编码器在 k 时刻传出的信号, S_k^i 表示从半双工中继 R_i 输出的信号, 关系由下式给出:

$$S_k = f_k(X_{[0,k]}, U_{[0,k-1]}), \quad k = 1 + nL, \quad n \in N; \quad (19)$$

$$S_k^i = g_k^i(Y_{[0,k]}^i), \quad k = 1 + i + nL, \quad n \in N. \quad (20)$$

其他时刻 $S_k = S_k^i = 0$ 且满足平均功率约束 $E(S_k^2) = LP_S$, $E((S_k^i)^2) = LP_r^i$. 信号通过高斯串联信道的过程, 存在关系

$$Y_k^1 = S_k + Z_k^1, \quad Y_k^i = S_k^i + Z_k^i,$$

$$k = i + nL, \quad n \in N.$$

其他时刻 $Y_k^i = 0$, 其中 $Z_k^i \sim N(0, N_i)$ 是相互独立的高斯白噪声.

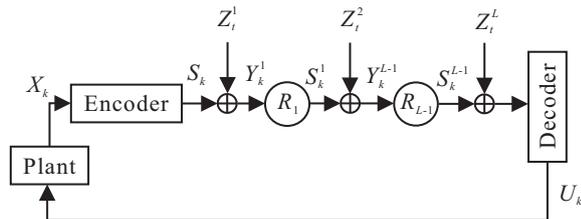


图3 中继半双工信道

定理2 离散Markov跳跃线性系统(1)经过如图3所示的串联高斯信道, 若系统均方可镇定, 则总存在如下关系:

$$\sum_{i=1}^N (\pi_i + C^T P^{k-1} p_i) \log |\det A_i| \leq \frac{1}{2} \min \left\{ \log \left(1 + \frac{LP_r^{i-1}}{N_i} \right), \log \left(1 + \frac{LP_S}{N_1} \right) \right\}. \quad (21)$$

证明 考虑1到 LK 时刻, $I(X_{[1,LK]} \rightarrow R_{[1,LK]})$ 可由添加信息使互信息增大得到, 由链式法则

$$I(X_{[1,LK]} \rightarrow R_{[1,LK]}) \leq$$

$$I(X_{[1,LK]}; Y_{[1,LK]}^i, R_{[1,LK]}) = \sum_{t=1}^{LK} I(X_{[1,LK]}; R_t, Y_t^i | Y_{[1,t-1]}^i, R_{[1,t-1]}), \quad (22)$$

互信息和熵的性质

$$I(X_{[1,LK]} \rightarrow R_{[1,LK]}) \leq$$

$$\sum_{t=1}^{LK} ((h(Y_t^i | Y_{[1,t-1]}^i, R_{[0,k-1]}) + h(Y_t^i | Y_{[1,t-1]}^i, R_{[0,k-1]}, X_{[0,k-1]})) + I(R_t, X_{[1,Lk]} | Y_{[1,t-1]}^i, R_{[0,k-1]})), \quad (23)$$

可得

$$I(X_{[1,LK]} \rightarrow R_{[1,LK]}) = \sum_{t=1}^K I(S_{r,t}^{i-1}, Y_t^i) = \sum_{t=0}^{K-1} I(S_{r,t+i}^{i-1}, Y_{t+i}^i). \quad (24)$$

当输入为高斯分布时互信息最大, 可得

$$I(X_{[1,LK]} \rightarrow R_{[1,LK]}) \leq \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{K-1} \log \left(1 + \frac{LP_r^{i-1}}{N_i} \right) = \frac{K}{2} \log \left(1 + \frac{LP_r^{i-1}}{N_i} \right). \quad (25)$$

因此有

$$I(X_{[1,LK]}, R_{[1,LK]}) \leq \frac{K}{2} \log \left(1 + \frac{LP_r^{i-1}}{N_i} \right). \quad (26)$$

将式(22) $Y_{[1,LK]}^i$ 换成 $Y_{[1,LK]}^1$, 同理可以得到

$$I(X_{[0,LK]}, R_{[0,LK]}) \leq \frac{K}{2} \log \left(1 + \frac{LP_S}{N_1} \right). \quad (27)$$

综合式(26)和(27)得到上界为

$$I(X_{[1,LK]}, R_{[1,LK]}) \leq \frac{K}{2} \min \left\{ \log \left(1 + \frac{LP_r^{i-1}}{N_i} \right), \log \left(1 + \frac{LP_S}{N_1} \right) \right\}. \quad (28)$$

由引理5和式(28)得到

$$\sum_{i=1}^N (\pi_i + C^T P^{k-1} p_i) \log |\det A_i| \leq \frac{1}{2} \min \left\{ \log \left(1 + \frac{LP_r^{i-1}}{N_i} \right), \log \left(1 + \frac{LP_S}{N_1} \right) \right\}. \quad (29)$$

定理2得证. \square

3 非正交高斯中继信道

实际通信常使用多条中继信道协作通信, 中继节点都是半双工模式, 任意时刻节点可以以相同的频率传输信号, 不存在相互干扰, 称为非正交中继信道, 本文即考虑这种信道, 如图4所示.

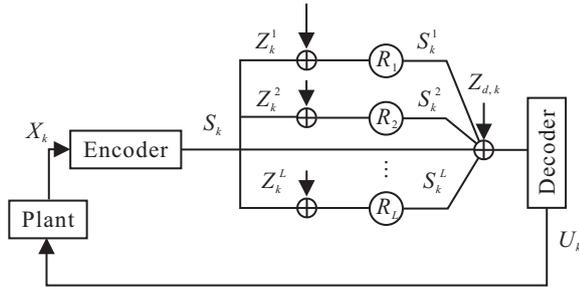


图4 非正交高斯中继信道系统

图4中: S_k 表示信道输入, 且满足平均功率条件 $E[S_k^2] \leq P_S$; 信道中白噪声 Z_k^i 和 $Z_{d,k}$ 相互独立, 分别满足 $Z_k^i \sim \mathcal{N}(0, N_r^i)$ 和 $Z_{d,k} \sim \mathcal{N}(0, N_d)$. 在上述信道中, 传输过程分为两个阶段, 在第1阶段, 编码器 E 以功率 $2\beta P_S$ 周边广播, β 表示两个阶段的功率相关系数, 满足 $0 \leq \beta \leq 1$, 此时中继 R_i 和编码器 D 只收不发, 此阶段称为监听阶段, 中继节点的输入输出满足

$$Y_k^i = S_k + Z_k^i, S_k^i = 0, k = 1, 3, 5, \dots \quad (30)$$

在第2阶段, 中继节点 R_i 以功率 $2P_r^i$ 向解码器 D 发送信号, 此时编码器也以 $2(1-\beta)P_S$ 功率向解码器 D 发送信号. 中继节点的输入输出关系满足

$$S_k^i = g(Y_{[0,k-1]}^i), Y_k^i = 0, k = 2, 4, 6, \dots \quad (31)$$

解码器 D 接收的信号为

$$R_k = S_k + \sum_{i=1}^L S_k^i + Z_{d,k}, \quad (32)$$

其中 $Y_{[0,k-1]}^i := \{Y_0^i, Y_1^i, \dots, Y_{k-1}^i\}$, 满足约束 $E[g(Y_{[0,k-1]}^i)^2] = 2P_r^i, g(\cdot)$ 为中继节点编码策略.

定理3 马尔可夫跳变线性系统(1)经过如图4所示的非正交高斯中继信道, 若系统均方可镇定, 则总存在如下关系:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N (\pi_i + C^T P^{k-1} p_i) \log |\det \mathcal{A}_i| \leq \\ & \frac{1}{4} \log \left(1 + 2\beta P_S \left(\sum_{i=1}^L \frac{1}{N_r^i} + \frac{1}{N_d} \right) \right) + \\ & \frac{1}{4} \log \left(1 + \frac{2(1-\beta)P_S}{N_d} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

证明 序列 $X_{[1,2K]}$ 到 $R_{[1,2K]}$ 的互信息有

$$\begin{aligned} I(X_{[1,2K]}; R_{[1,2K]}) & \leq \\ I(X_{[1,2K]}; \{Y_{[1,2K]}^i\}_{i=1}^L, R_{[1,2K]}) & \end{aligned} \quad (34)$$

其中

$$\begin{aligned} X_{[0,K-1]} & := \{X_0, X_1, \dots, X_{K-1}\}, \\ R_{[0,K-1]} & := \{R_0, R_1, \dots, R_{K-1}\}, \\ \{Y_{[1,2K]}^i\}_{i=1}^L & := \{Y_{[1,2K]}^1, Y_{[1,2K]}^2, \dots, Y_{[1,2K]}^L\}. \end{aligned}$$

根据 $R_k = S_k + Z_{d,k} + \sum_{i=1}^L S_k^i$, 以及 S_k^i 和 $Y_{[1,k-1]}^i$ 存在函数关系 $S_k^i = g_t^i(Y_{[0,k-1]}^i)$, 令 $\tilde{R}_k = R_k - \sum_{i=1}^L S_k^i$, 有

$$\begin{aligned} I(X_{[1,2K]}; R_{[1,2K]}) & \leq \\ I(X_{[1,2K]}; \{Y_{[1,2K]}^i\}_{i=1}^L, \tilde{R}_{[1,2K]}) & = \\ \sum_{k=1}^{2K} I(X_{[1,2K]}; \{Y_k^i\}_{i=1}^L, \tilde{R}_k | \tilde{R}_{[1,k-1]}, \{\{Y_{[1,k-1]}^i\}_{i=1}^L\}) & \end{aligned} \quad (35)$$

根据 $X_k \rightarrow S_k \rightarrow (\{Y_k^i\}_{i=1}^L, \tilde{R}_k)$ 属于一条 Markov 链, 由数据处理定理可得

$$\begin{aligned} I(X_{[1,2K]}; R_{[1,2K]}) & \leq \\ \sum_{k=1}^{2K} I(S_k; \{Y_k^i\}_{i=1}^L, \tilde{R}_k | \tilde{R}_{[1,k-1]}, \{\{Y_{[1,k-1]}^i\}_{i=1}^L\}) & \leq \\ \sum_{k=1}^{2K} I(S_k; \{Y_k^i\}_{i=1}^L, \tilde{R}_k) & \end{aligned} \quad (36)$$

将式(36)代入(31)和(32)可得

$$\begin{aligned} I(X_{[1,2K]}; R_{[1,2K]}) & = \\ \sum_{k=1}^K I(S_{2k}; \tilde{R}_{2k}) + \sum_{k=1}^K I(S_{2k-1}; \{Y_{2k-1}^i\}_{i=1}^L, \tilde{R}_{2k-1}) & \end{aligned} \quad (37)$$

其中

$$\begin{aligned} E(S_{2k}^2) & = 2(\beta - 1)P_S, \\ Y_{2k-1}^i & = S_{2k-1} + Z_{2k-1}^i, E(S_{2k-1}^2) = 2\beta P_S, \\ \tilde{R}_{2k-1} & = S_{2k-1} + Z_{d,2k-1}. \end{aligned}$$

由文献[16]互信息定理可得

$$\begin{aligned} I(X_{[1,2K]}; R_{[1,2K]}) & \leq \\ \frac{K}{2} \log \left(1 + 2\beta P_S \left(\sum_{i=1}^L \frac{1}{N_r^i} + \frac{1}{N_d} \right) \right) & + \\ \frac{K}{2} \log \left(1 + \frac{2(\beta - 1)P_S}{N_d} \right) & \end{aligned} \quad (38)$$

当 $K \rightarrow \infty$ 时, 由式(38)和引理5可得证. \square

4 仿真算例

通过仿真展示非正交高斯中继信道环境下, 系统(1)均方可镇定条件与发射功率、外部噪声、中继信道个数等信道参数之间关系. 假设系统参数信道个数 $L = 10$, 噪声存在关系 $N = N_d = N_r^i$, 将其代入定理3(此时记式(33)右端为 $f(N, \beta, P_S)$), 结果如图5和图6所示.

图5给出了功率相关系数 $\beta = 0.5$ 时, 发射功

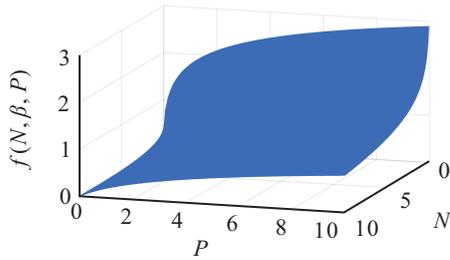


图5 功率、噪声对系统可镇定性影响

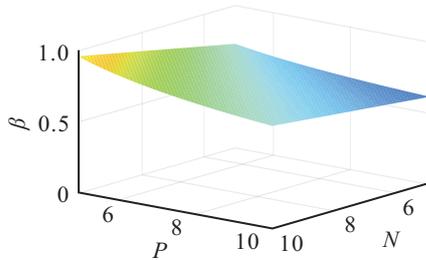


图6 边界值 $f(N, \beta, P)$ 取最大值时参数 β 的取值曲线

率 P_s 、噪声强度 N 对系统可镇定性的影响。边界值 $f(N, \beta, P_s)$ 越大意味着可镇定条件越容易满足。图6给出了不同发射功率、外部噪声条件下, $f(N, \beta, P_s)$ 取最大值时 β 的取值曲线。上述仿真表明,在不同的输入信号和噪声条件下,可以通过调整功率相关参数保持系统具有较好的控制性能。

5 结论

本文研究了含有高斯中继信道的马尔可夫跳变线性系统的可镇定性问题。首先在单个中继传输信号情形下给出了上述系统的可镇定性和信道容量之间的联系;进一步推广到包含 L 个中继的串联信道以及包含 L 个中继非正交高斯中继信道系统情形,给出了系统的可镇定性与信道参量之间的必要条件关系。后续将结合控制与编码策略分析研究马尔可夫跳变线性系统稳定性的信道充分条件。

参考文献(References)

- [1] Nair G, Fagnani F, Zampieri S, et al. Feedback control under data rate constraints: An overview[J]. Proc IEEE, 2007, 95(1): 108-137.
- [2] Tatikonda S, Mitter S. Control over noisy channels[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(7): 1196-1201.
- [3] Nair G N, Evans R J. Stabilizability of stochastic linear systems with finite feedback data rates[J]. SIAM J on Control and Optimization, 2004, 43(2): 413-436.
- [4] You K, Xie L. Minimum data rate for mean square stabilization of discrete LTI systems over lossy channels[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(10): 2373-2378.
- [5] 邓玮璋, 费敏锐, 杜大军, 等. 基于信噪比受限通道的网络控制系统镇定[J]. 控制与决策, 2012, 27(1):

58-64.

(Deng W H, Fei M R, Du D J, et al. Stabilization of networked control systems over signal-to-noise ratio constrained channels[J]. Control and Decision, 2012, 27(1): 58-64.)

- [6] Eduardo I Silva, Milan S Derpich, Jan Østergaard, et al. A characterization of the minimal average data rate that guarantees a given closed-loop performance level[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2016, 61(8): 2171-2186.
- [7] 章辉, 孙优贤. 线性时不变控制系统中的互信息率和解析约束[J]. 控制与决策, 2003, 18(5): 597-599. (Zhang H, Sun Y X. Mutual information rate and analytic constraint in linear time invariant control systems[J]. Control and Decision, 2003, 18(5): 597-599.)
- [8] Tatikonda S, Sahai A, Mitter S. Stochastic linear control over a communication channel[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1549-1561.
- [9] Bross S, Wigger M. On the relay channel with receiver transmitter feedback[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2009, 55(1): 275-291.
- [10] Zaidi A A, Oechtering T J, YuKsel S, et al. Stabilization of linear systems over gaussian networks[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2013, 59(9): 2369-2384.
- [11] Song Fang, Hideaki Ishii, Jie Chen. Tradeoffs in networked feedback systems: From information-theoretic measures to bode-type integrals[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2017, 62(3): 1046-1061.
- [12] Liu J, Gupta V. On stabilization of decentralized systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2017, 62(3): 1356-1367.
- [13] Zaidi S A A, Oechtering T, Skoglund M. Sufficient conditions for closed-loop control over multiple-access and broadcast channels[C]. Proc Conf Decision and Control. Atlanta, 2010: 4771-4776.
- [14] Kumar U, Liu J, Gupta V, et al. Laneman. Stabilizability across a gaussian product channel: Necessary and sufficient conditions[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2014, 59(9): 2530-2535.
- [15] Nair G N, Dey S, Evans R J. Infimum data rates for stabilising Markov jump linear systems[C]. Proc 42nd IEEE Conf on Decision and Control. Maui, 2003: 1176-1181.
- [16] Paolo Minero, Massimo Franceschetti. Anytime capacity of a class of Markov channels[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2017, 62(3): 1411-1416.
- [17] Yang Song, Jie Yang, Min Zheng, et al. Disturbance attenuation for Markov jump linear system over an additive white Gaussian noise channel[J]. Int J of Control, 2017, 89(12): 2482-2491.
- [18] Thomas M Cover, Joy A Thomas. Element of information theory[M]. 2nd ed. Beijing: China Machine Press, 2007: 1600-1601.

(责任编辑: 郑晓蕾)