

多源异构灰数据背景下的贝叶斯迭代优化控制图模型

蒋子涵^{1†}, 方志耕^{1,2}, 张 秦¹, 李维东¹, 杨晓钰¹

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 211106; 2. 南京航空航天大学 灰色系统研究所, 南京 211106)

摘 要: 在统计过程控制中, 为了利用专家信息减少不确定性, 并在控制图模型中将不同属性的专家先验信息结合起来综合利用, 提出一种新的广义标准灰数概念, 将不同属性的专家信息结合在同一个空间上, 用统一架构进行表征, 并提出新的运算法则来计算这些多源异构的专家灰信息. 结合经典贝叶斯理论, 在灰数据背景下对统计质量控制图模型进行参数估计, 并利用累积样本信息对参数进行迭代优化, 使灰色区域不断收敛, 降低不确定性. 实例分析结果表明, 这种灰贝叶斯迭代优化模型可以在小样本贫信息的情况下减少监测数据的异常波动, 更准确地利用专家信息进行预警, 并在样本累积过程中逐步偏重于实际数据, 得到符合新样本信息的参数.

关键词: 统计过程控制; 多源异构信息; 广义区间灰数; 贝叶斯迭代优化; 质量控制图

中图分类号: TB114.2

文献标志码: A

Bayesian iterative optimized control charts model based on multi-source heterogeneous grey information

JIANG Zi-han^{1†}, FANG Zhi-geng^{1,2}, ZHANG Qin¹, LI Wei-dong¹, YANG Xiao-yu¹

(1. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China; 2. Institute for Grey Systems, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China)

Abstract: In the statistical process control, in order to make use of expert information to reduce uncertainty, and to make comprehensive use of the prior information of different attributes in the control charts model, a new concept of general standard grey number is proposed to combine all these expert information and transform them into one space. Besides, a mathematical framework is established to characterize the information, and new rules of operation are proposed to calculate the multi-source heterogeneous grey information. Then, based on the classic Bayesian theory, parameters of the statistical quality control chart are estimated under the background of grey information, and cumulative sample data is used to optimize the parameters in an iterative approach, while expert grey information degenerating with data accumulation. The result shows that this model is able to reduce abnormal fluctuation and false alert, and gradually relies more on actual data.

Keywords: statistical process control; multi-source heterogeneous information; general interval grey number; Bayesian iterative optimization; control charts

0 引 言

在现代质量控制理论研究中, 重点问题不再是单纯的产品质量控制, 而是过程质量的控制. 20 世纪 20 年代, 美国贝尔实验室的 Shewhart 首先提出了统计过程控制 (SPC) 这一概念, 用统计学的眼光来看待质量管控问题. 1924 年, Shewhart 提出 SPC 中的核心工具, 即质量控制图 (Control charts). 他认为, 尽管每种过程都体现出不同的变异性, 但只要符合其系统本身的特

性, 过程就是“受控的”; 反之, 那些体现了不符合自身系统特性的过程则被认为是“不受控的”.

近十几年来, 科技和工业的迅速发展使得新产品不断涌现, 并且复杂程度也随之提高. 在这种产品需求多样化的背景下, 出现了各种先进生产模式, 也正因为如此, 多批次小样本生产成为当前的主流. 然而, 产品数量少、数据信息不足、数据信息的稳定性差等问题给现代统计质量控制提出了新的挑战^[1]. 为了克

收稿日期: 2017-04-06; 修回日期: 2017-07-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (71671091); 中央高校基本科研业务费专项资金项目 (NP2015208); 国家社科基金重点项目 (12AZD102).

责任编委: 赵春晖.

作者简介: 蒋子涵 (1993—), 男, 硕士生, 从事可靠性工程和灰色系统的研究; 方志耕 (1962—), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统、复杂装备研制管理等研究.

†通讯作者. E-mail: jiangzihan@nuaa.edu.cn

服小样本带来的信息不足,有学者提出利用成组技术来获得充足信息^[2-5],或利用马尔科夫链构造出过程的状态转移矩阵,并通过成本函数的优化寻找最优控制图参数组合^[6-7].

另一种思路是充分利用新鲜的样本信息,在质量特性数据随生产不断累积的过程中更新系统状态. Harrison等在1989年提出的贝叶斯预测理论中提供了实现这一思想的工具,此后,贝叶斯学派的理论得到了越来越多的运用. 1996年, Tagaras^[8]最早研究了贝叶斯控制图;而后, Nenes等^[9]通过对效用及损失函数的深入研究,提出了一种双侧贝叶斯控制图; Wu等^[10]针对传统控制图需要大样本的缺陷,提出了一种共轭贝叶斯方法,用于修正多批次少量情况下的控制图界限; Naderkhani等^[11]基于半马尔可夫决策过程,提出了一种确定贝叶斯控制图中各项参数的方法,使抽样区间的选择更加多样.

尽管贝叶斯方法可以利用新的样本信息来更新系统过程,但它毕竟是在小样本贫信息的情形下进行设计,这就存在以下问题: 1) 多源异构的专家先验信息可以减少系统的不确定性,但现有的控制图模型尚无相关研究; 2) 在小样本条件下因偶然因素而发生异常波动是十分普遍的情况,而目前很少有灰数据背景下的相关研究; 3) 传统的贝叶斯方法在修正过程中未设置截止条件,信息的不确定性没有明显的收敛过程,难以满足实际需要.

近年来,刘思峰等学者针对灰数的运算展开了一系列新的研究^[12-15],在不确定信息的表征和计算方面取得了进展. 在上述背景下,本文在多源异构专家灰信息背景下构建控制图,利用综合信息改善控制条件,提高控制能力,使工序更快成熟;此外,本文运用新的广义标准灰数概念,利用量纲一致性方法处理不同属性的专家先验信息,使它们能够进行计算,弥补小样本的信息不足;建立一种贝叶斯迭代优化机制,通过信息的不断补充,降低控制图的不确定性,使灰色控制区域不断收敛,最终趋于稳定. 此外,提出一种新的综合了多源不确定信息的广义区间灰数,在多源异构灰数据背景下建立贝叶斯迭代优化控制图模型,并进行实例计算分析,对结果给出解释,论证本文模型的优势.

1 多源不确定信息与广义区间灰数

本文中出现的符号 \otimes 及其相关下标形式(如 $\hat{\otimes}$, \otimes_{σ^2} 等)是灰色系统领域内通用的表示“灰数”的符号,与“克罗内克乘积”并无关系,特此说明.

定义1(灰数)^[16] 令 $g^{\pm} \in \mathbf{R}$ 为一组闭区间与开区间并集集合中的一个未知实数,即

$$g^{\pm} \in \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i]. \quad (1)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, n$, n 为整数且 $0 < n < \infty$; $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $b_{i-1} \leq a_i \leq b_i \leq a_{i+1}$. 则 g^{\pm} 被称为灰数, $g^- = \inf_{a_i \in g^{\pm}} a_i$ 为 g^{\pm} 的下限, $g^+ = \sup_{b_i \in g^{\pm}} b_i$ 为 g^{\pm} 的上限.

定义2(广义区间灰数) 在某一属性指标集合 A 中,各个特征指标 x 属性值 $\otimes_A(x)$ 的类型包括概率数、模糊数、区间值模糊数(连续区间)以及灰数等,且它们的值域均为 $D[0, 1]^{\pm}$. 这些特征指标属性值可用广义区间灰数统一表示为

$$\otimes_A(x) \in \{\delta_A(x) \cup \mu_A(x) \cup M_A(x) \cup S_A(x) \cup g_A^{\pm}(x)\} \in \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i] \in D[0, 1]^{\pm}. \quad (2)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, n$ 为特征指标的序号; A 为各特征指标的属性值集合; $\delta_A(x)$ 为概率数; $\mu_A(x)$ 为模糊数; $M_A(x)$ 为区间值模糊; $g_A^{\pm}(x)$ 为一般灰数; a_i, b_i 分别为序号为 i 的特征指标属性灰数值的下限和上限; $D[0, 1]^{\pm}$ 为区间 $[0, 1]$ 上全部广义区间灰数集合.

定义3(广义标准区间灰数) 任意给定一个广义区间灰数 $\otimes_i = [a_i, b_i]$, $a_i \leq b_i$, $i = 1, 2, \dots$, 都可以将其表示为 $\otimes_i = a_i + c_i \gamma_i$. 其中: a_i 称为 \otimes_i 的白部; $c_i \gamma_i$ 称为 \otimes_i 的灰部,在灰部 $c_i \gamma_i$ 中, c_i 称作灰系数, γ_i 称作单位灰数,且 $\gamma_i \in [0, 1]$.

定理1(所有不确定数均可表征为广义标准区间灰数) 对于任意不确定数 $\tau_i \in \{\delta(x), \mu(x), M(x), g^{\pm}(x)\} \in D[0, 1]$, $i = 1, 2, \dots$ 都可用广义标准区间灰数 $\otimes_i = a_i + c_i \gamma_i$ 表示,其中 x 表示特征指标.

证明 1) 当 τ_i 为概率数时,令任意概率数 $\tau_i = a_i$,进行变换得到

$$\begin{aligned} \tau_i = a_i &= [a_i, a_i] = \\ &[a_i, a_i] + a_i - a_i = a_i + (a_i - a_i)[0, 1] = \\ &a_i + (a_i - a_i)\gamma_i = a_i + c_i \gamma_i = \otimes_i. \end{aligned}$$

其中: $c_i = (b_i - a_i)$, $\gamma_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots$. 由于 $c_i = 0$,概率数是广义区间灰数的退化形态,广义区间灰数是概率数的一般形态.

2) 当 τ_i 为模糊数时,可得在值域 D 为 $[0, 1]$ 时,模糊数等价于概率数. 根据以上证明可得 $\mu(x) = \delta(x) = a_i + c_i \gamma_i = \otimes_i$,同理,模糊数是广义区间灰数的退化形态,广义区间灰数是模糊数的一般形态.

3) 当 τ_i 为区间值模糊数时,令任意区间值模糊数 $\tau_i = [\mu_i^L, \mu_i^U]$, $\mu_i^L \leq \mu_i^U$,进行变换得到

$$\begin{aligned} \tau_i &= [\mu_i^L, \mu_i^U] = [a_i, b_i] = \\ &[a_i, b_i] + a_i - a_i = a_i + (b_i - a_i)[0, 1] = \\ &a_i + (b_i - a_i)\gamma_i = a_i + c_i \gamma_i = \otimes_i. \end{aligned}$$

其中: $c_i = (b_i - a_i), \gamma_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots$

4) 当 τ_i 为一般灰数时, 令任意区间灰数 $\otimes_i \in [a_i, b_i], a_i \leq b_i$, 并对其进行变换, 可得

$$\otimes_i = [a_i, b_i] = [a_i, b_i] + a_i - a_i =$$

$$a_i + (b_i - a_i)[0, 1] = a_i + (b_i - a_i)\gamma_i = a_i + c_i\gamma_i.$$

其中: $c_i = (b_i - a_i), \gamma_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots$

根据证明得到所有不确定数均可用广义标准区间灰数进行表征. □

2 贝叶斯迭代优化控制图模型构建

2.1 多源异构信息下的广义区间灰数确定方法

定义4(动态灰色贝叶斯修正) 将实际生产过程中的第 i 批样本记为 $X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}\}, i = 1, 2, \dots$, 其中 x_{ij} 表示第 i 批样本中第 j 件产品的某种质量特性值. 在本文所讨论的情况中, 由于样本量少, 容易出现异常波动. 为此, 引入广义区间灰数 $\otimes_A(x) \in [a, b]$ 对异常波动进行修正, 得到优化后的均值和方差, 并分别记为 $\mu_{x|\otimes}, \sigma_{x|\otimes}$. 当样本数量随生产过程不断增加时, 就能够利用这些累积的后验信息对参数进行连续迭代优化. 这就是动态灰色贝叶斯修正的定义.

不同专家在给出关于均值和方差的经验信息时, 总是会从不同的角度给出不同属性的信息, 包括概率数、模糊数、区间值模糊数以及一般灰数. 其中, 前3种信息体现的是几种可能情况的“测度”, 而一般灰数则直接针对估计值本身. 为此, 需要通过广义区间灰数 $\otimes_A(x)$ 把它们转化为同一种意义, 并结合起来.

本文只讨论方差的广义区间灰数表征. 在制造过程中, 产品某种质量特性的方差可分为两种情况: 在公差范围以内、在公差范围以外. 基于设计标准, 当质量特性在公差范围以内时, 有

$$T \geq E(R) = \bar{R} = d_2\sigma, \quad (3)$$

从而

$$\sigma^2 \leq \left(\frac{T}{d_2}\right)^2. \quad (4)$$

又因为方差 σ^2 另一个极端情况是 $\sigma^2 = 0$, 因此得到质量特性在公差范围以内的数值表征为

$$s_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{T}{d_2}\right)^2, \quad (5)$$

其中 d_2 为查表可得的常数.

当质量特性在公差范围以外时, 有

$$3\sigma \geq A_2\bar{R}, \quad (6)$$

则可将 $s_2 = \frac{1}{3}A_2 \times E(R|R > T)$ 作为质量特性在公差范围以外的数值表征. 其中: A_2 为查表可得的常

数, $E(R|R > T)$ 为条件期望值. 结合式(3)可得

$$s_2 = \frac{1}{3}(A_2T)^2. \quad (7)$$

据此得到质量特性方差的属性信息如表1所示.

表1 质量特性方差的属性信息

专家编号	方差特征		信息属性
	公差范围以内 s_1	公差范围以外 s_2	
1	$a_1^{(1)}$	$c_1^{(1)}$	概率数
2	$a_2^{(1)}$	$c_2^{(1)}$	模糊数
3	$[a_3^{(1)}, b_3^{(1)}]$	$[c_3^{(1)}, d_3^{(1)}]$	区间值模糊数

用一般灰数直接表征的方差可表示为 $g^\pm \in [0, \left(\frac{T}{d_2}\right)^2]$, 简记为 $g^\pm \in [a_4^{(1)}, b_4^{(1)}]$. 根据定义3和定理1,

可用广义区间灰数对各类信息属性进行表征, 即表1中的区间值模糊数 $[a_3^{(1)}, b_3^{(1)}]$ 可表示为 $a_3^{(1)} + (b_3^{(1)} - a_3^{(1)})\gamma_{31}^{(1)}, [c_3^{(1)}, d_3^{(1)}]$ 可表示为 $c_3^{(1)} + (d_3^{(1)} - c_3^{(1)})\gamma_{32}^{(1)}$.

同理, g^\pm 可表示为 $g^\pm = a_4^{(1)} + (b_4^{(1)} - a_4^{(1)}) \times \gamma_{41}^{(1)}$. 于是, 方差的广义标准区间灰数可以表示为

$$\otimes_{\sigma^2} = \frac{1}{n} \left(\sum_i [a_i^{(1)} + (b_i^{(1)} - a_i^{(1)})\gamma_{i1}^{(1)}]s_1 + \sum_i [c_i^{(1)} + (d_i^{(1)} - c_i^{(1)})\gamma_{i2}^{(1)}]s_2 + \sum_k g_k^\pm \right), \quad (8)$$

其中 n 为参与评价的专家人数.

为了简洁和书写方便, 下文中一律用 \otimes 对方差的广义标准区间灰数 \otimes_{σ^2} 进行简记.

2.2 广义区间灰数下的小样本方差贝叶斯参数估计

在小样本信息条件下进行贝叶斯参数估计时, 重点在于先验分布的合理选择以及专家灰信息的运用. 对本文的研究目的而言, 产品的质量特性服从正态分布, 而该分布里的参数 μ 和 σ^2 也可看作随机变量, 它们所服从的分布就是先验分布.

如上文所述, 本文研究的每一批样本可记为 $X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}\}, i = 1, 2, \dots$. 假设已经有 m 批历史样本, 且它们的质量特性值服从正态分布, 即 $x_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2, \dots, m$.

现在有新建工艺下生产的第 $m + 1$ 批样本, 且同样有 $x_{m+1,j} \sim N(\mu_{m+1}, \sigma_{m+1}^2)$. 要对其中的参数 μ_{m+1} 和 σ_{m+1}^2 进行估计, 不妨把先验分布设为一个可以进行转换的广义分布, 并结合专家灰信息与小样本信息来对其进行参数更新. 首先对未知方差 σ_{m+1}^2 进行贝叶斯参数估计, 步骤如下.

Step 1 为作方差 σ_{m+1}^2 的估计, 需先假设 μ_{m+1} 为固定值. 假设先验总体方差 σ_i^2 服从逆 Gamma 分布, 即 $\sigma_i^2 \sim \text{IGa}(\alpha, \beta)$, 那么对 σ_{m+1}^2 而言, 其先验分布形式也为

$$\pi(\sigma_{m+1}^2) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\sigma_{m+1}^2}\right)^{\alpha+1} \exp\left(-\frac{\beta}{\sigma_{m+1}^2}\right). \tag{9}$$

其中: α 为形状参数, β 为尺度参数. 根据逆 Gamma 分布的特性, σ_{m+1}^2 的期望值和方差分别为

$$E[\sigma_{m+1}^2|X] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 = \frac{\beta}{\alpha - 1}, \tag{10}$$

$$\text{Var}[\sigma_{m+1}^2|X] = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m \{\sigma_i^2 - E[\sigma_i^2]\} = \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}, \tag{11}$$

其中 X 为先验样本信息. 于是可得 α 和 β 的估计值

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\{E[\sigma_{m+1}^2|X]\}^2}{\text{Var}[\sigma_{m+1}^2|X]} + 2, \\ \beta = \frac{\{E[\sigma_{m+1}^2|X]\}^3}{\text{Var}[\sigma_{m+1}^2|X]} + 2E[\sigma_{m+1}^2|X]. \end{cases} \tag{12}$$

Step 2 由于是新建工艺, 由专家根据经验和设计标准, 按照 2.1 节中的方法, 将方差定为一个广义区间灰数 $\otimes \in [a, b]$.

Step 3 假设新样本的质量特性在结合专家灰信息时仍旧服从正态分布, 即 $(X_{m+1}|\otimes) \tilde{N}(\mu_{m+1}, \sigma_{m+1}^2)$, 且满足 $\hat{s}^2 = f(s^2, \otimes) = (1 - \lambda(k))s^2 + \lambda(k)\otimes$.

Step 4 由先验信息可知 σ_{m+1}^2 服从逆 Gamma 分布, 即 $\sigma_{m+1}^2 \sim \text{IGa}(\alpha, \beta)$, 并利用新建工艺下产品数据作为后验信息. 连续变量的贝叶斯公式为

$$\pi(\sigma_{m+1}^2|(X_{m+1}|\otimes)) = \frac{h(\sigma_{m+1}^2, (X_{m+1}|\otimes))}{m(X_{m+1}|\otimes)} = \frac{p[(X_{m+1}|\otimes)|\sigma_{m+1}^2]\pi(\sigma_{m+1}^2)}{\int_{\Theta} p[(X_{m+1}|\otimes)|\sigma_{m+1}^2]\pi(\sigma_{m+1}^2)d\sigma_{m+1}^2}. \tag{13}$$

其中: $h(\sigma_{m+1}^2, (X_{m+1}|\otimes))$ 为总体方差 σ_{m+1}^2 与样本方差 $(X_{m+1}|\otimes)$ 的联合分布, 而 $(X_{m+1}|\otimes)$ 为其边缘概率密度. 式(13)中的 $p[(X_{m+1}|\otimes)|\sigma_{m+1}^2]$ 可以用小样本的似然函数表示, 令

$$H = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{m+1}^2} \sum_{i=1}^n [(x_i|\otimes) - \mu_{m+1}]^2\right\},$$

$$J = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\sigma_{m+1}^2}\right)^{\alpha+1} \exp\left(-\frac{\beta}{\sigma_{m+1}^2}\right),$$

于是有

$$\frac{p[(X_{m+1}|\otimes)|\sigma_{m+1}^2]\pi(\sigma_{m+1}^2)}{\int_{\Theta} p[(X_{m+1}|\otimes)|\sigma_{m+1}^2]\pi(\sigma_{m+1}^2)d\sigma_{m+1}^2} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{m+1}}\right)^n HJ}{\int_{\Theta} \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{m+1}}\right)^n HJ\right\} d\sigma_{m+1}^2} =$$

$$\frac{H \exp\left(-\frac{\beta}{\sigma_{m+1}^2}\right) \left(\frac{1}{\sigma_{m+1}}\right)^n \left(\frac{1}{\sigma_{m+1}^2}\right)^{\alpha+1} \varphi(\alpha)}{f(\mu_{m+1})}. \tag{14}$$

为便于计算推导, 令

$$\varphi(\alpha) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)},$$

$$f(\mu_{m+1}) =$$

$$\int_{\Theta} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{m+1}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{m+1}^2} \sum_{i=1}^n [(x_i|\otimes) - \mu_{m+1}]^2\right\} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\sigma_{m+1}^2}\right)^{\alpha+1} \exp\left(-\frac{\beta}{\sigma_{m+1}^2}\right) d\sigma_{m+1}^2.$$

因为已经估计出 α 和 β 的值, 所以 $\varphi(\alpha)$ 是一个常数; 又因为假设 μ_{m+1} 为固定值, 所以 $f(\mu_{m+1})$ 是一个含有 μ_{m+1} 的固定值, 亦可先看作常数. 那么令 $c_1 = \varphi(\alpha)$, $c_2 = f(\mu_{m+1})$, 便解出

$$\pi(\sigma_{m+1}^2|(X_{m+1}|\otimes)) = \frac{c_1}{c_2} \left(\frac{1}{\sigma_{m+1}^2}\right)^{(\alpha+\frac{n}{2})+1} \times \exp\left\{-\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(x_i|\otimes) - \mu_{m+1}]^2 + \beta\right) / \sigma_{m+1}^2\right\}. \tag{15}$$

由此可知, σ_{m+1}^2 在第 $m+1$ 批小样本条件下的后验分布依然服从逆 Gamma 分布, 记为

$$(\sigma_{m+1}^2|(X_{m+1}|\otimes)) \sim \text{IGa}(\alpha', \beta'),$$

其中

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha + \frac{n}{2}, \\ \beta' = \beta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(x_i|\otimes) - \mu_{m+1}]^2. \end{cases} \tag{16}$$

Step 5 给出 σ_{m+1}^2 的参数估计值. 在先验信息条件下建立一个损失函数, 并以此为基础构建风险函数^[17], 对 σ_{m+1}^2 进行贝叶斯估计. 在 Step 4 中已经解出 σ_{m+1}^2 的后验分布形式, 在此基础上, 计算其期望值, 就得到总体方差 σ_{m+1}^2 的贝叶斯估计值

$$\hat{\sigma}_B^2 = E(\sigma_{m+1}^2|(X_{m+1}|\otimes)) = \frac{\beta'}{\alpha' - 1} = \frac{\beta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(x_i|\otimes) - \mu_{m+1}]^2}{\alpha + n/2 - 1}. \tag{17}$$

这里式(17)中的 $\sum_{i=1}^n [(x_i|\otimes) - \mu_{m+1}]^2$ 是一个类似于样本方差的计算式. 实际上两者只相差一个除数 n . 根据本文提出的修正公式, 有

$$\sum_{i=1}^n [(x_i|\otimes) - \mu_{m+1}]^2 = n f(s^2, \otimes). \tag{18}$$

式(18)中的 s^2 是第 $m+1$ 批样本的样本方差. 于是式(17)改写成

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{\beta + \frac{n}{2}f(s^2, \otimes)}{\alpha + \frac{n}{2} - 1}. \quad (19)$$

2.3 广义区间灰数下的小样本期望贝叶斯参数估计

为了得到 $\hat{\sigma}_B^2$ 的确切值, 对式(18)~(20)中的随机变量 μ_{m+1} 进行贝叶斯估计. 设 μ_{m+1} 服从正态分布, 记为 $\mu_{m+1} \sim N(\omega, \tau^2)$. 根据先验样本信息 $X_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 易得

$$\omega = E(\mu_{m+1}|X_i) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mu_i, \quad (20)$$

$$\tau^2 = \text{Var}(\mu_{m+1}|X_i) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (\mu_i - \omega)^2. \quad (21)$$

在引入后验信息条件下, 由共轭先验分布的性质可知, 总体期望值依然服从高斯分布, 即有 $(\mu_{m+1}|(X_{m+1}|\otimes)) \sim N(\omega', \tau'^2)$. 按照与上节类似的方法得到估计值

$$\omega' = \frac{\frac{n}{\sigma_{m+1}^2} \bar{x}_{m+1} + \frac{1}{\tau^2} \omega}{\frac{n}{\sigma_{m+1}^2} + \frac{1}{\tau^2}}, \quad (22)$$

$$\tau'^2 = \frac{\sigma_{m+1}^2 \tau^2}{\sigma_{m+1}^2 + n\tau^2}. \quad (23)$$

其中式(22)正是 μ_{m+1} 的贝叶斯估计值. 同样, 其中出现了取值未知的 σ_{m+1}^2 . 为此, 联立式(19)与(22), 最终可解出

$$\hat{\mu}_B = \frac{\tau^{-2}\omega + \frac{n}{\sigma^2} \bar{x}_{m+1}}{\tau^{-2} + \frac{n}{\sigma^2}}, \quad (24)$$

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{\beta + \frac{n}{2}f(s^2, \otimes) + \frac{n\tau^2}{\tau^2 + n} \frac{(\bar{x}_{m+1} - \omega)^2}{2}}{\alpha + \frac{n}{2} - 1}. \quad (25)$$

2.4 灰色动态统计过程控制模型

利用式(24)和(25)得到的贝叶斯估计结果可以构建动态灰色SPC模型, 控制图中各控制限的数学表达式为

$$\begin{cases} \text{UCL} = \begin{cases} \hat{\mu}_B + 3/\sqrt{n} \times \hat{\sigma}_{B|(s^2|\otimes_{\max})}^2, \\ \hat{\mu}_B + 3/\sqrt{n} \times \hat{\sigma}_{B|(s^2|\otimes)}^2, \\ \hat{\mu}_B + 3/\sqrt{n} \times \hat{\sigma}_{B|(s^2|\otimes_{\min})}^2; \end{cases} \\ \text{CL} = \hat{\mu}_B; \\ \text{LCL} = \begin{cases} \hat{\mu}_B - 3/\sqrt{n} \times \hat{\sigma}_{B|(s^2|\otimes_{\min})}^2, \\ \hat{\mu}_B - 3/\sqrt{n} \times \hat{\sigma}_{B|(s^2|\otimes)}^2, \\ \hat{\mu}_B - 3/\sqrt{n} \times \hat{\sigma}_{B|(s^2|\otimes_{\max})}^2. \end{cases} \end{cases} \quad (26)$$

控制图中各区域的名称如图1所示, 例如, $\hat{\mu}_B +$

$3 \times \hat{\sigma}_{B|(s^2|\otimes)}^2$ 至 $\hat{\mu}_B + 3 \times \hat{\sigma}_{B|(s^2|\otimes_{\max})}^2$ 之间的区域称为灰色待判定区. 就传统意义上而言, 落在该区域的点会被判定为不受控, 但由于小样本的异常波动, 不能断定过程不受控. 换言之, 灰色待判定区起到一个延迟判断的作用. 又如, $\hat{\mu}_B + 3 \times \hat{\sigma}_{B|(s^2|\otimes_{\min})}^2$ 至 $\hat{\mu}_B + 3 \times \hat{\sigma}_{B|(s^2|\otimes)}^2$ 之间称为灰色稳定区, 落在该区域及受控区中的点可认定是受控的.

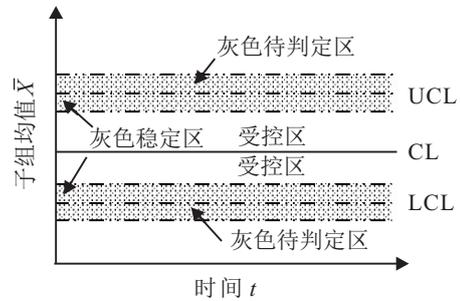


图1 单次贝叶斯优化控制

由于本文模型是一个迭代优化的过程, 经过较长时间生产后, 样本累积信息逐渐增多, 专家灰信息区域不断变小, 最终会完全被实际信息所替代, 因此能够使新工艺的统计控制过程从初期平稳过渡到生产稳定区. 迭代优化过程如图2所示.

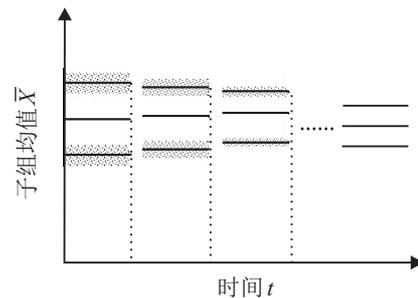


图2 连续贝叶斯迭代优化控制

2.5 专家灰信息退化及修正截止条件

定义5(贝叶斯修正截止条件) 设 ψ 为相邻两次方差贝叶斯估计值的变化比率, 定义为

$$\psi_i = \left| \frac{\hat{\sigma}_{i-1}^2 - \hat{\sigma}_i^2}{\hat{\sigma}_{i-1}^2} \right| \times 100\%.$$

若给定一个数 $\varepsilon > 0$, 满足 $\psi_i \leq \varepsilon$, 则称 $\psi_i \leq \varepsilon$ 为贝叶斯修正截止条件, ε 为贝叶斯修正条件截止值. 一般取 $\varepsilon = 0.01$, 这表明相邻两次修正得到的结果相差不超过1%时, 生产过程已经稳定, 可以停止灰贝叶斯修正.

定理2(专家灰信息作用退化) 设小样本方差优化值 \hat{s}^2 与实际样本方差 s^2 和专家灰信息 \otimes 存在函数关系: $\hat{s}^2 = f(s^2, \otimes) = (1 - \lambda(k))s^2 + \lambda(k)\otimes$, k 随样本组数增加而增大, 则当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(k) = 0$, 因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{s}^2 = s^2$.

定理2中的 $\lambda(k)$ 为一个概率, 可以认为专家各次

判断是独立的,并把判断正确的概率设为 p ,那么连续 k 次正确的概率 $\lambda(k) = p^k$,该值随 k 的增大而减小.因此定理2易证,本文略去证明过程.它表明,当样本量不断增大时,专家预判所起的作用越来越小,直至被实际样本信息完全替代.

3 实例分析

以某机械加工企业为例,该企业为某型号电动机生产电机轴,轴径的公差范围是 $\Phi 6.435_{-0.02}^{+0.02}/\text{mm}$.选取过去工艺条件下的样本,以轴径数据作为先验信息.为了令先验信息满足本文的建模需求,对其进行Lilliefors检验^[18],以验证是否服从正态分布.筛选后的数据如表2所示.根据该历史大样本信息可估计出超参数 α 和 β 的值.根据式(12)可以得到 $\alpha = 5.23, \beta = 4 \times 10^{-4}$.

表2 电动机轴径样本数据及均值方差

样本组号	测定值/mm				样本均值 \bar{x}	样本方差 s^2
	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	6.447	6.432	6.444	6.435	6.440	3.825e-05
2	6.419	6.437	6.431	6.425	6.428	4.500e-05
3	6.419	6.411	6.416	6.411	6.414	1.169e-05
4	6.429	6.429	6.442	6.452	6.438	9.350e-05
5	6.428	6.412	6.445	6.436	6.430	1.472e-04
6	6.440	6.435	6.411	6.438	6.431	1.365e-04
7	6.415	6.43	6.417	6.438	6.425	8.950e-05
8	6.435	6.444	6.432	6.411	6.431	1.462e-04
9	6.427	6.437	6.426	6.420	6.428	3.725e-05
10	6.423	6.445	6.426	6.437	6.433	7.719e-05
11	6.428	6.444	6.440	6.431	6.436	4.219e-05
12	6.431	6.432	6.424	6.425	6.428	1.250e-05
13	6.419	6.422	6.437	6.447	6.431	1.292e-04
14	6.417	6.432	6.437	6.438	6.431	7.050e-05
15	6.425	6.440	6.424	6.45	6.435	1.177e-04
16	6.415	6.431	6.423	6.418	6.422	3.670e-05
17	6.415	6.438	6.440	6.441	6.434	1.150e-04
18	6.435	6.420	6.429	6.448	6.433	1.035e-04
19	6.431	6.420	6.435	6.424	6.428	3.425e-05
20	6.419	6.427	6.438	6.440	6.431	7.250e-05

由于工艺改进,又生产出新产品,得到7组样本,如表3所示.

表3 新建工艺下电动机轴径测定值

样本组号	轴径测定值/mm			
1	6.430	6.447	6.448	6.451
2	6.444	6.451	6.458	6.452
3	6.445	6.440	6.432	6.445
4	6.435	6.436	6.440	6.437
5	6.437	6.427	6.443	6.448
6	6.430	6.431	6.435	6.438
7	6.433	6.437	6.426	6.434

利用这些数据,可进行参数的灰色贝叶斯修正过程.根据式(5)和(7)可计算出质量特性在公差范围以

内和以外的数值表征分别为

$$s_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{T}{d_2} \right)^2 = 1.92 \times 10^{-4},$$

$$s_2 = \frac{1}{3} (A_2 T)^2 = 2.88 \times 10^{-4}.$$

其中:公差 $T = 0.04 \text{ mm}$,子组大小 $n = 4$.

现由不同专家根据经验,对方差落在公差范围以内和以外的可能性进行预判,并填充表1的信息得到表4.考虑到新建工艺初期的不稳定性及小样本的异常波动,专家倾向于 s_2 代表的情况.

表4 质量特性方差的专家预判值

专家编号	方差特征		信息属性
	公差范围以内 s_1	公差范围以外 s_2	
1	0.35	0.65	概率数
2	0.45	0.55	模糊数
3	[0.4, 0.5]	[0.5, 0.6]	区间值模糊数

另外,一般灰数可表征为 $g^\pm \in [0, (T/d_2)^2]$,即 $g^\pm \in [0, 3.8 \times 10^{-4}]$.由式(8)可得 $\otimes = 1.8 \times 10^{-4} + 1.07 \times 10^{-4} \gamma$,其中 $\gamma \in [0, 1]$ 为单位灰数,则基于专家灰信息的方差可表示为

$$\otimes \in [1.8 \times 10^{-4}, 2.87 \times 10^{-4}].$$

取 $f(s^2, \otimes) = (1 - \lambda(k))s^2 + \lambda(k)\otimes$,其中 $\lambda(k)$ 的初始值取为 $\lambda(1) = 0.5$.由式(24)和(25)可求得总体均值与方差的贝叶斯修正值.

根据定义5,设贝叶斯迭代的截止条件取0.01,即当 $\psi_i = \left| \frac{\hat{\sigma}_{i-1}^2 - \hat{\sigma}_i^2}{\hat{\sigma}_{i-1}^2} \right| < 0.01$ 时,停止贝叶斯修正,认为该结果就是可以最终用于建立控制图的参数.迭代过程如表5所示.

表5 广义区间灰数贝叶斯参数迭代过程

迭代次数	均值 μ 优化值	方差灰数 σ^2 优化值			截止值 ψ_i
		下界	核	上界	
1	6.4343	1.05e-04	1.14e-04	1.22e-04	—
2	6.4382	9.29e-05	9.94e-05	1.06e-04	0.1251
3	6.4386	8.39e-05	8.78e-05	9.17e-05	0.1169
4	6.4384	7.67e-05	7.89e-05	8.11e-05	0.1016
5	6.4384	7.50e-05	7.62e-05	7.74e-05	0.0336
6	6.4378	7.41e-05	7.47e-05	7.53e-05	0.0199
7	6.4373	7.38e-05	7.41e-05	7.44e-05	0.0083

从表5的结果可以看出,当生产出第7批新样本后,灰色贝叶斯迭代过程就达到了截止条件,此时,均值 $\hat{\mu} = 6.4373$,方差的核 $\hat{\sigma}_{B|(s^2|\otimes)}^2 = 7.41 \times 10^{-5}$.该迭代过程体现在控制图上,如图3所示.由图3可见,控制图的上、下界限形成了灰色容错区域,其宽度随着迭代的进行而减小.第2个样本点落在了图1所示的灰色待判定区内,不发出警报.经排查可知,该点异常是因为样本量过少,属于非系统因素.

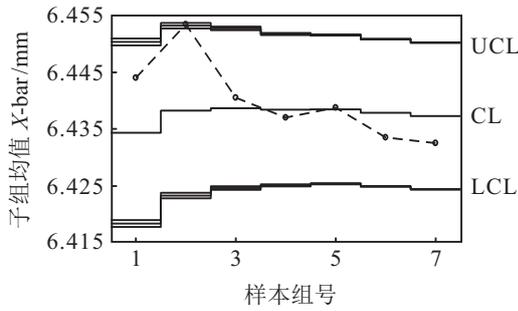


图3 灰色贝叶斯迭代控制

利用传统的贝叶斯方法^[19]可得到各次贝叶斯修正的结果,如表6所示。

表6 传统贝叶斯参数迭代过程

迭代次数	均值 μ 估计值	方差 σ^2 估计值	迭代截止值 ψ_i
1	6.4343	8.700e-05	—
2	6.4382	7.825e-05	0.1006
3	6.4386	7.509e-05	0.0404
4	6.4384	7.373e-05	0.0181
5	6.4384	7.306e-05	0.0091
6	6.4378	7.275e-05	0.0043
7	6.4373	7.248e-05	0.0037

据此画出的控制图如图4所示。与本文的灰色贝叶斯模型相比,传统方法没有综合专家灰信息,只受后验样本影响,得出的控制限宽度略窄,导致第2个样本点出界,造成误发警报。不过,随着后验样本的积累,专家信息作用递减,两者的控制限逐渐趋于一致。

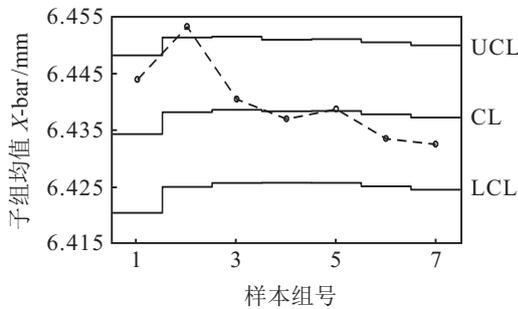


图4 传统贝叶斯控制图模型

使用传统控制图模型^[20],根据上下控制限的计算公式 $UCL = \bar{X} + A_2\bar{R}$ 和 $LCL = \bar{X} - A_2\bar{R}$,得到图5所示的控制图。其中 $CL = 6.4302$, $UCL = 6.4457$, $LCL = 6.4147$ 。该模型没有利用后验信息,因此已不能反映新建工艺下产品的质量特性。

根据式(24)和(25)可得本文模型的一些其他特性。当没有新样本提供后验信息时,只能根据先验信息估计新建工艺下产品的总体均值和方差,此时

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \omega, \\ \hat{\sigma}_B^2 = \frac{\beta}{\alpha - 1}. \end{cases} \quad (27)$$

当后验样本容量较小时,参数估计的主体部分是由先验信息来承担的,这弥补了后验信息的不足。随

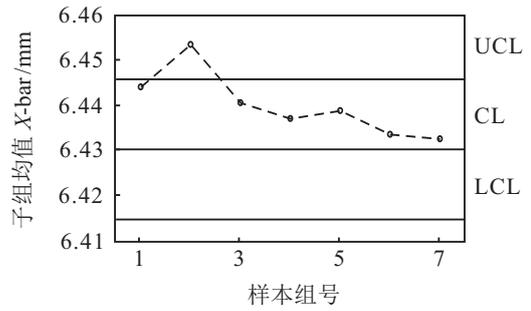


图5 传统控制图模型

着新样本容量不断增加,先验和后验信息在总体估计中各自占据的比例也会自动调整,转为逐渐依靠后验信息进行参数估计。

特别地,当新建工艺条件下的生产过程平稳进行后,后验样本容量将足够大,贝叶斯估计值会变为

$$\hat{\mu}_B = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau^2\omega + n\bar{x}_{m+1}}{n + \tau^2} = \bar{x}_{m+1}, \quad (28)$$

$$\hat{\sigma}_B^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta + \frac{n}{2}f(s^2, \otimes) + \frac{n\tau^2}{\tau^2 + n} \frac{(\bar{x}_{m+1} - \omega)^2}{2}}{\alpha + \frac{n}{2} - 1} = f(s^2, \otimes)^{(k)}. \quad (29)$$

从式(28)和(29)可以看出,总体期望和方差的估计结果已经与最大似然估计结果一样,不再依赖于先验信息。尤其是式(29)中的 $f(s^2, \otimes)^{(k)}$,它表示经过 k 轮修正后,初始设置的专家灰信息已失去作用,而只剩下样本方差的信息。这就充分说明在本文所提出的方法中,专家灰信息所起的过渡作用:当初阶段样本量较少时,它可以制造一个灰色的容错区域,避免异常波动引起的误报;当样本容量逐渐增加时,专家灰信息退化,所有信息都由实际的客观数据得到。

本文模型的控制界限存在一个逐渐收敛到稳态的过程,称为试生产阶段或过渡阶段。对于那些落在灰色待判定区的点,应该首先排查系统中的偶然性故障。与其他方法相比,本文提出的模型能够在初期减少偶然因素干扰,降低误报率,并在生产稳定后完全依赖实际取样数据进行统计控制。

4 结论

在小样本生产成为主流的今天,需要新的质量控制方法来减少偶然因素引起的误发警报。本文利用多源异构的专家灰信息,并结合贝叶斯理论建立了贝叶斯迭代优化控制图,目的是在小样本贫信息的条件下降低质量控制成本,实现稳定生产。

与现有研究相比,本文方法的优势是:1)利用不同属性的专家灰信息,提供了一种解决方案来处理多品种小批量或新建工序条件下样本信息少的问题;2)将定性与定量手段相结合,能够减少小样本情况下监

测数据的异常波动及误报的发生;3)迭代优化的机制能够协调专家信息与实际样本数据之间的关系,随着信息补充使不确定性逐渐降低,最终趋于收敛,做到更精准预警。

参考文献(References)

- [1] 仲建兰, 马义中. 面向小批量生产过程的两阶段串联可修系统SPC与维修策略整合优化[J]. 计算机集成制造系统, 2014, 20(8):1959-1968.
(Zhong J L, Ma Y Z. Integrated optimization for SPC and maintenance strategy of two-stage series repairable systems oriented to short-run production[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2014, 20(8): 1959-1968.)
- [2] 姜兴宇, 王世杰, 赵凯, 等. 面向网络化制造的智能工序质量控制系统[J]. 机械工程学报, 2010, 46(4): 186-194.
(Jiang X Y, Wang S J, Zhao K, et al. Intelligent process quality control system for networked manufacturing[J]. J of Mechanical Engineering, 2010, 46(4): 186-194.)
- [3] 单龙艳, 吉卫喜, 余杰, 等. 高性能零件制造过程质量控制方法研究[J]. 现代制造工程, 2013, 35(12): 60-64.
(Shan L Y, Ji W X, Yu J, et al. Process quality control methods for the manufacture of high-performance parts[J]. Modern Manufacturing Engineering, 2013, 35(12): 60-64.)
- [4] 章欣己. 基于贝叶斯估计多品种小批量生产的统计过程控制研究[D]. 上海:上海交通大学机械与动力工程学院, 2013: 22-23.
(Zhang X Y. Statistical process control for job shop manufacturing with bayesian approach[D]. Shanghai: School of Mechanical Engineering, Shanghai Jiaotong University, 2013: 22-23.)
- [5] 张根保, 冉琰. 基于模糊物元的小批量生产典型工序能力分析[J]. 机械工程学报, 2015, 51(23): 116-122.
(Zhang G B, Ran Y. Typical process capability analysis of small-batch production based on fuzzy matter-element[J]. J of Mechanical Engineering, 2015, 51(23): 116-122.)
- [6] Xiang Y. Joint optimization of X^- control chart and preventive maintenance policies: A discrete-time Markov chain approach[J]. European J of Operational Research, 2013, 229(2): 382-390.
- [7] 张鹏伟, 苏秦, 王甜甜. 小批量生产过程VSI控制图经济设计[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(5): 1185-1191.
(Zhang P W, Su Q, Wang T T. Economic design of VSI control chart for short-run production[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2013, 33(5): 1185-1191.)
- [8] Tagaras G. Dynamic control charts for finite production runs[J]. European J of Operational Research, 1996, 91(1): 38-55.
- [9] Nenes G, Tagaras G. The economically designed two-sided Bayesian, X -bar math container loading mathjax, control chart[J]. European J of Operational Research, 2007, 183(1): 263-277.
- [10] Wu X, Miao R, Zhang X, et al. A conjugate Bayesian approach to control chart for multi-batch and low volume production[J]. Int J of Production Research, 2015, 53(7): 2179-2185.
- [11] Naderkhani F, Makis V. Economic design of multivariate Bayesian control chart with two sampling intervals[J]. Int J of Production Economics, 2016, 174(4): 29-42.
- [12] 方志耕, 刘思峰, 陆芳, 等. 区间灰数表征与算法改进及其GM(1,1)模型应用研究[J]. 中国工程科学, 2005, 7(2): 57-61.
(Fang Z G, Liu S F, Lu F, et al. Study on improvement of token and arithmetic of interval grey numbers and its GM(1,1) model[J]. Engineering Sciences, 2005, 7(2): 57-61.)
- [13] 刘思峰, 方志耕, 谢乃明. 基于核和灰度的区间灰数运算法则[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(2): 313-316.
(Liu S F, Fang Z G, Xie N M. Algorithm rules of interval grey numbers based on the “Kernel” and the degree of greyness of grey numbers[J]. Systems Engineering and Electronics, 2010, 32(2): 313-316.)
- [14] 刘解放, 刘思峰, 方志耕. 基于核与灰半径的连续区间灰数预测模型[J]. 系统工程, 2013, 31(2): 61-64.
(Liu J F, Liu S F, Fang Z G. Prediction model of continuous interval grey number based on the kernel and gray radius[J]. Systems Engineering, 2013, 31(2): 61-64.)
- [15] 郭晓君, 刘思峰, 方志耕. 基于合成灰数灰度的区间灰数自忆性预测模型[J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(6): 1124-1129.
(Guo X J, Liu S F, Fang Z G. Self-memory prediction model of interval grey number based on grey degree of compound grey number[J]. Systems Engineering and Electronics, 2014, 36(6): 1124-1129.)
- [16] Yang Y, John R. Grey sets and greyness[J]. Information Sciences, 2012, 185(1): 249-264.
- [17] 徐美萍, 熊令纯. Levy分布参数估计的损失函数和风险函数的Bayes推断[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(20): 221-226.
(Xu M P, Xiong L C. Bayes inference for the loss and risk function in Levy distribution parameter estimation[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2009, 39(20): 221-226.)
- [18] 周建, 李子奈. Granger因果关系检验的适用性[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2004, 44(3): 358-361.
(Zhou J, Li Z N. Applicability of the Granger causality test[J]. J of Tsinghua University: Science and Technology, 2004, 44(3): 358-361.)
- [19] Miao R, Zhang X Y, Jiang Z B, et al. The Bayesian estimation of process capability indices for multi-batch and low volume manufacturing[J]. Chinese High Technology Letters, 2011, 21(7): 770-774.
- [20] Wang Z J, Zou C L, Li Z H. Theory and method of statistical quality control chart[M]. Beijing: Science Press, 2013: 54-59.