文章编号: 1001-0920(2018)07-1303-09　　DOI: 10.13195/j.kzyjc.2017.0364

基于广义Choquet积分的Pythagorean不确定语言TODIM方法及其应用

梁 霞, 刘政敏†, 刘培德

(山东财经大学 管理科学与工程学院，济南 250014)

摘 要: 针对评价信息为Pythagorean不确定语言变量且指标具有关联性的多指标决策问题,考虑到决策者的参照依赖和损失规避等有限理性行为,提出一种基于广义Choquet积分的Pythagorean不确定语言TODIM方法. 首先,给出Pythagorean不确定语言变量的定义及其相关理论;其次,考虑决策者的参照依赖行为,计算各方案相对于其他方案关于各指标的收益或损失值;再次,考虑决策者的损失规避行为,集成指标关联情形下方案的收益或损失值,得到每个方案相对于其他各个方案的个体感知优势度;最后,计算各方案的总体感知优势度,并依据总体感知优势度进行方案排序. 一个雾霾污染治理的算例验证了所提出方法的实用性和有效性.

关键词: 多指标决策；行为；指标关联；PUL-TODIM 决策方法；感知优势度

中图分类号: C934　　**文献标志码:** A

Pythagorean uncertain linguistic TODIM method based on generalized Choquet integral and its application

LIANG Xia, LIU Zheng-min†, LIU Pei-de

(School of Management Science and Engineering, Shandong University of Finance and Economics, Ji'nan 250014, China)

Abstract: With respect to the multiple criteria decision making problem with Pythagorean uncertain fuzzy linguistic information and correlated criteria, in which the decision maker's reference dependence and loss aversion behaviors are considered, a Pythagorean uncertain fuzzy linguistic TODIM(PUL-TODIM) method is proposed based on generalized Choquet integral. To begin with, the definition of Pythagorean uncertain fuzzy linguistic and its related theory are established. Considering the reference dependence behavior of decision maker, the gain and loss values of each alternative relative to the other alternative concerning each attribute are calculated. Then, considering the loss aversion behavior of decision maker, the perceived dominance degree for each alternative over the other one is obtained by integrating the corresponding gain and loss values. Further, the total perceived dominance degree for each alternative can be computed to rank alternatives. Finally, an example of haze governance is given to illustrate the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Keywords: multiple criteria decision making；behavior；correlated criteria；PUL-TODIM decision making method；perceived dominance degree

0 引 言

多指标决策是指在考虑多个评价准则或指标的情形下,对有限方案进行排序或择优的过程[1]. 多指标决策是决策科学领域中的重要分支,并广泛地应用于经济、管理和工程等众多领域[2-3]. 已有成果主要是从两个角度进行研究,其一是以期望效用理论为基础,认为决策者是“完全理性”的. 然而,已有的实证研究表明,在许多复杂的实际决策问题中,决策者并不是完全理性,而是“有限理性”的. 诺贝尔经济学奖获得者Simon[4]提出了“有限理性”理论,指出人

收稿日期: 2017-03-28；**修回日期:** 2017-06-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71771140, 71471172)；教育部人文社会科学研究青年基金项目(17YJC630077)；山东省社会科学规划研究项目(16DGLJ06)；山东省自然科学基金面上项目(ZR2017MG007)；山东省高等学校科技计划项目(J16LN25, J17KA189)；泰山学者工程专项经费项目(ts201511045).

责任编委: 李登峰.

作者简介: 梁霞(1986−), 女, 讲师, 博士, 从事决策理论与应用的研究；刘政敏(1979−), 男, 副教授, 博士, 从事决策理论与应用等研究.

†通讯作者. E-mail: liuzhengmin525@163.com

们的决策行为只是有限理性的,在决策过程中因为不同的心理行为以及应对风险的态度等,追求的也并不总是期望效用最大. 为此, Kahneman等[5]在Simon"有限理性"理论的基础上提出了前景理论(Prospect theorey). 近年来,基于前景理论的决策方法已成为一项研究热点. 1992年, Gomes等[6]提出了一种基于前景理论的交互式决策方法(TODIM). 相比前景理论, TODIM方法不需要事先确定参考点,而是将其他备选方案作为评估参考点,通过计算备选方案相对其他备选方案的感知优势度进行方案排序.

目前, TODIM方法已经被广泛应用到管理、经济等各领域的决策问题[7-16]. 由于实际问题的复杂性,关于指标的评价信息往往是以模糊信息的形式存在,为了处理更为复杂的考虑决策者行为的模糊决策问题,许多学者从不同角度对TODIM方法进行了扩展和完善. Fan等[8]提出了一种解决指标值为实数、区间数和三角模糊数的混合TODIM方法; Liu等[9-10]分别针对指标值为二维不确定语言和直觉不确定语言变量的多指标决策问题,提出了基于不确定语言的TODIM方法; Passos等[11]结合TODIM和FSE两种方法的特点,提出了用于解决溢油应急响应问题的TODIM-FSE决策支持方法; Zhang等[12]提出了一种扩展的TODIM方法以解决指标值为犹豫模糊集的多指标决策问题,该方法通过建立新的测度函数和距离测度来计算方案的个体感知优势度,并进一步得出方案的总体感知优势度; Wei等[13]提出了犹豫模糊语言集的得分函数,进而提出犹豫模糊语言TODIM方法; Ren等[14]研究了Pythagorean模糊多准则决策问题,并提出了基于Pythagorean模糊信息的TODIM决策方法;王坚强等[15]分别将传统的TODIM方法扩展到多值中智集的模糊环境,以解决相应的多指标决策问题; Qin等[16]提出了一种基于模糊逻辑和α-截集的二型模糊集距离测度,进而提出一种扩展TODIM方法,以处理评估信息为二型模糊集的多指标决策问题,并通过绿色供应链选择实例验证了所提出方法的有效性.

关于考虑决策者行为的TODIM方法已取得了较为丰富的研究成果,但是仍有以下问题值得进一步研究. 一方面,已有方法无法处理隶属度和非隶属度之和大于1的模糊信息,例如Yager在文献[17]中指出,现实问题中专家给出的隶属度和非隶属度之和可能会大于1,即 $\mu+\nu>1$,而隶属度和非隶属度的平方和小于等于1,即 $\mu^2+\nu^2\leqslant 1$. 另一方面,在现实的多指标决策问题中,指标之间往往不是相互独立的,而是存在一定的关联性(冗余关系或互补关系等). 例如,在评价航空客服质量时,针对"信守服务承诺"、"给予旅客信任"、"专业回答旅客问题"3个指标,当航空公司信守承诺并给予旅客专业的回答时,自然能够增加旅客对航空公司的信任度. 此外,在风险投资时,决策者习惯性采用核心竞争力与预期收益等指标对方案进行评估,核心竞争力强的方案,往往预期收益也高,因此这两个指标之间存在重叠和替代的关联关系. 为此,本文结合Pythagorean模糊数和不确定语言变量,提出Pythagorean不确定语言变量的概念,给出一种基于投影方法的Pythagorean不确定语言变量差异测度方法,并针对指标间存在关联关系的Pythagorean不确定语言多指标决策问题,提出一种基于广义Choquet积分的Pythagorean不确定语言TODIM方法. 通过将所提出方法应用于雾霾污染治理问题,验证了该方法的可行性和有效性.

1 基本概念

1.1 Pythagorean不确定语言变量

Yager[17]在传统直觉模糊集的基础上,进一步扩大了隶属度表示空间,提出了Pythagorean模糊集,其最大特点在于允许隶属度和非隶属度之和大于1. 本文借鉴直觉语言数[18]的概念,结合Pythagorean模糊数和不确定语言变量,提出Pythagorean不确定语言变量的概念. 作为不确定语言变量[19]、直觉语言数[18]和Pythagorean模糊语言数[20]的扩展形式, Pythagorean不确定语言变量综合了Pythagorean模糊数和不确定语言变量的优点,不仅便于决策者利用不确定语言变量进行定性描述,而且具有更大的隶属度表示空间.

定义1 设$S=\{s_i|i=0,1,\cdots,t\}$是有序离散型语言术语, $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是有限论域集, X上的Pythagorean不确定语言集(PULS)形式如下:

$$P=\{\langle x_i|([s_{\theta(x_i)},s_{\tau(x_i)}],(\mu_P(x_i),\nu_P(x_i)))\rangle\}.$$

其中: $s_{\theta(x_i)},s_{\tau(x_i)}\in S$; $\mu_P(x_i)$和$\nu_P(x_i)$表示x_i隶属于和非隶属于不确定语言$[s_{\theta(x_i)},s_{\tau(x_i)}]$的程度,且满足$\mu_P^2(x_i)+\nu_P^2(x_i)\leqslant 1$. $\forall x_i\in X$, $\pi_P(x_i)=\sqrt{1-\mu_P^2(x_i)-\nu_P^2(x_i)}$表示$x_i$隶属于不确定语言$[s_{\theta(x_i)},s_{\tau(x_i)}]$的犹豫度,也称为Pythagorean不确定语言集模糊指数. 为了方便起见,记$\alpha=\langle[s_{\theta(\alpha)},s_{\tau(\alpha)}],(\mu_\alpha,\nu_\alpha)\rangle$,称为Pythagorean不确定语言变量.

为了使语言变量的计算能够适用于不同语义环境,下面引入语言刻度函数的概念[21].

定义2 设任意语言术语集$S=\{s_i|i=0,1,\cdots,t\}$, t为偶数. 对于任意实数$\theta_i(i=0,1,\cdots,n)$,语言刻度函数可以定义为从s_i到θ_i之间的映射

$$f: s_i \to \theta_i,\ i=0,1,\cdots,t, \tag{1}$$

其中$0 \leqslant \theta_0 \leqslant \theta_1 \leqslant \cdots \leqslant \theta_t$. 显然,函数$f$是关于下标$i$的严格单调递增函数. $\theta(i=0,1,\cdots,t)$表示了决策者使用语言术语$s_i \in S(i=0,1,\cdots,t)$时的偏好. 因此,函数$f$反映了语言术语的语义值. 此外,Wang等[21]进一步归纳总结了3种语言刻度函数.

1) 简单语言下标函数.

$$f_1(s_i)=\frac{i}{t},\ i=0,1,\cdots,t. \tag{2}$$

其中$\theta_i \in [0,1]$. 显然,上述公式给出了语言术语的语义值是基于语言下标的平均值,形式简单且易于理解. 但是,这种计算方法缺少相应的理论依据,已经无法满足目前日益复杂的决策应用的需要.

2) 复合评估刻度函数.

$$f_2(s_i)=\begin{cases}\dfrac{a^{t/2}-a^{t/2-i}}{2a^t-2},\ i=0,1,\cdots,\dfrac{t}{2};\\ \dfrac{a^t+a^{i-t}-2}{2a^t-2},\ i=\dfrac{t}{2}+1,\dfrac{t}{2}+2,\cdots,t.\end{cases} \tag{3}$$

式(3)中,参数α的取值可以采用实验法和主观法确定. 实验法是通过问卷调查,确定第1级和第0级的权重之比,即为参数α. 已有的实验调查数据显示,通常α的取值区间为$[1.36,1.4]$. 从式(3)可以看出,随着语言术语下标从中间向两端扩展,相邻语言术语的绝对偏差会增加.

3) 改进的语言刻度函数.

$$f_3(s_i)=\begin{cases}\dfrac{m^a-(m-i)^a}{2m^a},\ i=0,1,\cdots,m;\\ \dfrac{m^\beta+(i-m)^\beta}{2m^\beta},\ i=m+1,m+2,\cdots,t.\end{cases} \tag{4}$$

其中: $m=t/2, a,\beta \in [0,1]$. 如果$a=\beta=1$,则$\theta_i = i/2t$. 通过式(4)可以看出,随着语言术语向两端扩展,相邻语言术语之间的绝对偏差会降低. 为了避免信息丢失和便于计算,上述语言刻度函数可以进一步扩展为$f^*: \overline{S} \to R^+ (R^+=\{r|r \geqslant 0, r \in R\})$,且$f^*(s_i)$是严格单调递增的连续函数. 此外,$f^*$的逆函数存在且记为$f^{-1}$.

1.2 Pythagorean不确定语言的差异测度

基于Pythagorean不确定语言变量和语言刻度函数的概念,下面给出基于投影的Pythagorean不确定语言变量的差异测度.

定义3 设$\alpha = \langle[s_{\theta(\alpha)},s_{\tau(\alpha)}],(\mu_\alpha,\nu_\alpha)\rangle$为Pythagorean不确定语言变量,则称

$$|\alpha|=\sqrt{((f^*(s_{\theta(\alpha)}))^2+(f^*(s_{\tau(\alpha)}))^2)(\mu_\alpha^4+\upsilon_\alpha^4+\pi_\alpha^4)} \tag{5}$$

为Pythagorean不确定语言变量α的模,其中$\pi_\alpha = \sqrt{1-\mu_\alpha^2-\upsilon_\alpha^2}$表示犹豫度.

定义4 设$\alpha = \langle[s_{\theta(\alpha)},s_{\tau(\alpha)}],(\mu_\alpha,\nu_\alpha)\rangle$和$\beta = \langle[s_{\theta(\beta)},s_{\tau(\beta)}],(\mu_\beta,\nu_\beta)\rangle$为两个Pythagorean不确定语言变量,则称

$$\alpha\cdot\beta = (f^*(s_{\theta(\alpha)})f^*(s_{\theta(\beta)})+f^*(s_{\tau(\alpha)})f^*(s_{\tau(\beta)}))\times (\mu_\alpha^2\mu_\beta^2+\upsilon_\alpha^2\upsilon_\beta^2+\pi_\alpha^2\pi_\beta^2)$$

为α与β之间的标量积.

定义5 设$\alpha = \langle[s_{\theta(\alpha)},s_{\tau(\alpha)}],(\mu_\alpha,\nu_\alpha)\rangle$和$\beta = \langle[s_{\theta(\beta)},s_{\tau(\beta)}],(\mu_\beta,\nu_\beta)\rangle$为任意两个Pythagorean不确定语言变量,则称

$$\mathrm{Cos}(\alpha,\beta)=\frac{\alpha\cdot\beta}{|\alpha||\beta|}= \frac{f^*(s_{\theta(\alpha)})f^*(s_{\theta(\beta)})+f^*(s_{\tau(\alpha)})f^*(s_{\tau(\beta)})}{\sqrt{((f^*(s_{\theta(\alpha)}))^2+(f^*(s_{\tau(\alpha)}))^2)\times(\mu_\alpha^4+\upsilon_\alpha^4+\pi_\alpha^4)}}\cdot \frac{(\mu_\alpha^2\mu_\beta^2+\upsilon_\alpha^2\upsilon_\beta^2+\pi_\alpha^2\pi_\beta^2)}{\sqrt{((f^*(s_{\theta(\beta)}))^2+(f^*(s_{\tau(\beta)}))^2)\times(\mu_\beta^4+\upsilon_\beta^4+\pi_\beta^4)}} \tag{6}$$

为Pythagorean不确定语言变量α与β之间的夹角余弦.

定理1 Pythagorean不确定语言变量$\alpha = \langle[s_{\theta(\alpha)},s_{\tau(\alpha)}],(\mu_\alpha,\nu_\alpha)\rangle$和$\beta = \langle[s_{\theta(\beta)},s_{\tau(\beta)}],(\mu_\beta,\nu_\beta)\rangle$的夹角余弦具有以下3个性质:

1) $0 \leqslant \mathrm{Cos}(\alpha,\beta) \leqslant 1$;

2) 如果$A=B$,则$\mathrm{Cos}(A,B)=1$;

3) $\mathrm{Cos}(A,B)=\mathrm{Cos}(B,A)$.

通常,投影是测量“贴近度”或者“相似度”的一种很好的方法,基于文献[22-23]的研究,下面给出扩展的基于Pythagorean不确定语言变量的投影定义.

定义6 设$\alpha = \langle[s_{\theta(\alpha)},s_{\tau(\alpha)}],(\mu_\alpha,\nu\alpha)\rangle$和$\beta = \langle[s_{\theta(\beta)},s_{\tau(\beta)}],(\mu_\beta,\nu_\beta)\rangle$为任意两个Pythagorean不确定语言变量,则α在β上的传统投影定义如下:

$$\mathrm{Pro}_\beta\alpha=\frac{\alpha\cdot\beta}{|\beta|}= \frac{f^*(s_{\theta(\alpha)})f^*(s_{\theta(\beta)})+f^*(s_{\tau(\alpha)})f^*(s_{\tau(\beta)})}{\sqrt{(f^*(s_{\theta(\beta)}))^2+(f^*(\tau_{\theta(\beta)}))^2}}\times \frac{\mu_\alpha^2\mu_\beta^2+\upsilon_\alpha^2\upsilon_\beta^2+\pi_\alpha^2\pi_\beta^2}{\sqrt{\mu_\beta^4+\upsilon_\beta^4+\pi_\beta^4}}. \tag{7}$$

然而,传统投影可能会存在$\mathrm{Pro}_\beta\beta < \mathrm{Pro}_\beta\alpha$,这显然是不合理的. 因此,参照上述文献,进一步提出标准化的Pythagorean不确定语言变量投影.

定义7 设$\alpha = \langle[s_{\theta(\alpha)},s_{\tau(\alpha)}],(\mu_\alpha,\nu\alpha)\rangle$和$\beta = \langle[s_{\theta(\beta)},s_{\tau(\beta)}],(\mu_\beta,\nu_\beta)\rangle$为任意两个Pythagorean不确定语言变量,则α在β上的标准投影定义如下:

$$\mathrm{EPro}_\beta\alpha=\frac{\mathrm{Pro}_\beta\alpha/|\beta|}{\mathrm{Pro}_\beta\alpha/|\beta|+|1-\mathrm{Pro}_\beta\alpha/|\beta||}=\frac{\mathrm{Pro}_\beta\alpha}{\mathrm{Pro}_\beta\alpha+||\beta|-\mathrm{Pro}_\beta\alpha|}. \tag{8}$$

定义8 设$\alpha=\langle[s_{\theta(\alpha)},s_{\tau(\alpha)}],(\mu_\alpha,\nu\alpha)\rangle$和$\beta=\langle[s_{\theta(\beta)},s_{\tau(\beta)}],(\mu_\beta,\nu_\beta)\rangle$为任意两个Pythagorean不确定语言变量,则基于投影的α与β之间的差异测度可以定义为

$$d(\alpha,\beta)=\mathrm{EPro}_I(\alpha)-\mathrm{EPro}_I(\beta),$$

其中I为Pythagorean不确定语言变量,且$I\geqslant\alpha,I\geqslant\beta$.

定理2 设$\alpha=\langle[s_{\theta(\alpha)},s_{\tau(\alpha)}],(\mu_\alpha,\nu\alpha)\rangle$和$\beta=\langle[s_{\theta(\beta)},s_{\tau(\beta)}],(\mu_\beta,\nu_\beta)\rangle$为任意两个Pythagorean不确定语言变量,基于定义7和定义8,可以得到基于投影方法的α与β之间的差异测度

$$d_{\mathrm{pro}}(\alpha,\beta)=\frac{\mathrm{Pro}_I\alpha-\mathrm{Pro}_I\beta}{|I|}, \tag{9}$$

其中I为Pythagorean不确定语言,且$I\geqslant\alpha,I\geqslant\beta$.

1.3 模糊测度

在实际问题中,指标之间可能不是完全相互独立的,而是存在相关联性和非可加性. 传统的可加测度虽然考虑了指标自身的重要性程度,但是没有考虑到指标之间组合的重要性. 为了解决这一问题,Sugeno[24]提出了一个非负非可加集合函数——λ-模糊测度,其定义如下.

定义9[24] 设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$为一个非空集合,$P(X)$是X的幂集,函数$\mu:P(X)\to[0,1]$,若满足条件: 1) $\mu(\varnothing)=0$, $\mu(X)=1$; 2) $\forall A,B\in P(X)$,若$A\subset B$,则$\mu(A)<\mu(B)$; 3) $\mu(A\bigcup B)=\mu(A)+\mu(B)+\lambda\mu(A)\mu(B)$,其中$-1<\lambda<\infty$. 则称$\mu$是$X$上的$\lambda$-模糊测度.

特别地, 1) 若$\lambda=0$, $\mu(A\bigcup B)=\mu(A)+\mu(B)$,则集合$A$与$B$相互独立,此时称$\mu$为$X$上的可加测度; 2) 若$-1<\lambda<0$, $\mu(A\bigcup B)<\mu(A)+\mu(B)$,则$A$与$B$存在冗余关系,此时称$\mu$为$X$上的次可加测度; 3) 若$\lambda>0$, $\mu(A\bigcup B)>\mu(A)+\mu(B)$,则$A$与$B$存在互补关系,此时称$\mu$为$X$上的超可加测度.

在多指标决策问题中,μ-模糊测度能够更精细地描述指标间的关联关系,即相互独立、冗余关系或互补关系[25]. 其中,指标集可以看作是定义1中的集合X,指标子集A的重要程度$\mu(A)$可以看作是集合$A\subseteq X$的模糊测度. 如果μ是集合$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$上的λ-模糊测度,则$\mu(x_j)$是x_j的模糊测度,$P(X)$是X的幂集. 文献[26-27]提出了计算子集$A\subseteq X$模糊测度的方法,即$\forall A\in P(X)$, A的模糊测度由下式计算:

$$\mu(A)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}\Big(\displaystyle\prod_{x_j\in A}[1+\lambda\mu(x_j)]-1\Big),\ \lambda\neq 0;\\ \displaystyle\sum_{x_j\in A}\mu(x_j),\ \lambda=0.\end{cases} \tag{10}$$

特别地,当$A=X$时,$\mu(A)=\mu(X)=1$. 因此,考虑到集合$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$中的元素相互关联时,有下式成立:

$$\lambda+1=\prod_{j=1}^m[1+\lambda\mu(x_j)],\ -1<\lambda<\infty\text{且}\lambda\neq 0. \tag{11}$$

为了集结指标之间相互关联的多指标评价信息,可采用Sugeno提出的模糊测度的Choquet积分,其定义如下.

定义10[28] 若f为定义在$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$上的非负函数,μ为X上的模糊测度,则f关于模糊测度μ的离散Choquet积分为

$$\mathrm{CI}_\mu(f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m))=\sum_{j=1}^m f(x_{\sigma(j)})[\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)})]. \tag{12}$$

其中: $\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(m)$是$1,2,\cdots,m$的一个置换,满足$0\leqslant f(x_{\sigma(1)})\leqslant f(x_{\sigma(2)})\leqslant\cdots\leqslant f(x_{\sigma(m)})$,且$A_{\sigma(j)}=\{x_{\sigma(j)},x_{\sigma(j+1)},\cdots,x_{\sigma(m)}\}$, $A_{\sigma(m+1)}=\varnothing$, $f(x_{\sigma(0)})=0$.

在决策过程中,由于评估指标间存在关联性,指标$x_i\in P(X)$在决策中的作用不能仅用初始指标权重表示,必须要综合考虑整个指标集$S\in P(X)$的作用. Shapley函数是博弈论中被广泛研究的分配指标之一. Grabishch在Shapely函数[29]的基础上,提出了关联决策问题的广义Shapley函数.

由于模糊测度μ是基于幂集的,增加了计算广义Shapley值的复杂性. 为了降低Shapley值计算的复杂性,可以利用λ模糊测度替换一般的模糊测度. 结合λ模糊测度的定义,可以得到基于λ模糊测度的广义Shapley值[30]

$$g_S(g,X)=\sum_{T\subseteq X\backslash S}\frac{(n-s-t)!t!}{(n-s+1)!}[\mu(S\bigcup T)-\mu(T)]. \tag{13}$$

其中: n,t和s分别是N,T和S的基数; μ是X上的模糊测度.

2 问题描述

本节对基于Pythagorean不确定语言评价信息的多指标决策问题给出具体的描述. 为方便叙述,记$N=\{1,2,\cdots,n\}$, $M=\{1,2,\cdots,m\}$. 在考虑指标关联的多指标决策问题中,设$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$为一个有限的方案集合,A_i表示第i个备选方

案; $C = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 为指标集合, C_j 表示第 j 个指标. 通常, 指标分为效益型指标和成本型指标, 关于效益型指标的指标值越大越好, 关于成本型指标的指标值越小越好. 记 M_B 和 M_C 分别表示效益型指标和成本型指标的下标集合, 满足 $M_B \bigcup M_C = M$ 和 $M_B \bigcap M_C = \varnothing$. 设 $\mu(C) = (\mu(C_1), \mu(C_2), \cdots, \mu(C_n))^{\mathrm{T}}$ 为指标集 $C = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 的权重向量, 其中 $\mu(C_j)$ 表示指标 C_j 的权重, $\forall j \in M$, 满足 $0 \leqslant \mu(C_j) \leqslant 1$. 在实际的多指标决策问题中, $\mu(C_j)$ 既可以由决策者根据自身经验和知识直接给出, 也可以通过聘请专家采用Delphi等方法计算得出. 本文考虑到指标之间具有3种关联关系, 即冗余关联、互补关联和无关联. 不失一般性, 以指标 C_j 和 C_p 为例, 若指标 C_j 与 C_p 之间呈现冗余关联关系, 则 $\mu(C_j \bigcup C_p) < \mu(C_j) + \mu(C_p)$; 若指标 C_j 与 C_p 之间呈现互补关联关系, 则 $\mu(C_j \bigcup C_p) > \mu(C_j) + \mu(C_p)$; 若 C_j 与 C_p 之间不存在关联关系, 则 $\mu(C_j \bigcup C_p) = \mu(C_j) + \mu(C_p)$.

决策者以Pythagorean不确定语言变量形式给出备选方案关于评估指标的指标值, 构成评估决策矩阵 $R = [r_{ij}]_{m \times n}$, 其中 $r_{ij} = \langle [s_{\theta(r_{ij})}, s_{\tau(r_{ij})}], (\mu_{r_{ij}}, \upsilon_{r_{ij}}) \rangle$ 表示决策者对方案 A_i 关于指标 C_j 的评价值. 现实生活中, 决策者常常依据指标 C_j 的特点来确定评价值 r_{ij}. 本文考虑决策者参照依赖和损失规避两种心理行为. 所谓参照依赖行为是指决策者在评价方案优劣时, 会将其他方案作为参照依据的行为; 所谓损失规避行为是指决策者在面对相同的收益或损失时, 对待损失比对待收益更加敏感的行为.

基于上述符号说明, 本文需要解决的问题是: 考虑到决策者带有参照依赖和损失规避的心理行为, 针对指标间存在关联的情形, 根据决策者提供的决策矩阵 R 和各指标的权重向量 $\mu(C)$, 提出某种决策分析方法, 对备选方案进行排序和择优.

3 PUL-TODIM决策方法

本节考虑决策者的参照依赖和损失规避行为, 针对决策指标间存在关联性的多指标决策问题, 提出一种能够适应语义环境变化的Pythagorean不确定语言TODIM方法(PUL-TODIM). 根据经典TODIM方法的研究思想, 考虑到决策者在实际行为中的心理行为特点(参照依赖和损失规避等), 针对指标间存在关联性的多指标决策问题, 结合广义Shapely值和语言刻度函数, 提出一种扩展的基于Pythagorean不确定语言信息的决策方法.

首先, 对决策矩阵 $R = [r_{ij}]_{m \times n}$ 进行标准化处理, 得到标准化决策矩阵 $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{m \times n}$, 考虑到效益型和成本型两种指标类型, 分别进行标准化处理: 对于效益型指标, $\tilde{r}_{ij} = r_{ij}$; 对于成本型指标, $\tilde{r}_{ij} = (r_{ij})^c = \langle [f^-(1 - f^*(s_{\tau(\tilde{\alpha}_{ij})})), f^-(1 - f^*(s_{\theta(\tilde{\alpha}_{ij})}))], (\upsilon_{\tilde{\alpha}_{ij}}, \mu_{\tilde{\alpha}_{ij}}) \rangle$.

其次, 计算各指标集的重要性程度. 具体地, 根据指标 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的权重 $\mu(C_1), \mu(C_2), \cdots, \mu(C_n)$, 由式(11)计算 λ-模糊测度中的参数 λ, 并根据式(13)计算各指标的重要程度Shapely值 $g(C_1), g(C_2), \cdots, g(C_n)$.

再次, 计算方案 A_i 相对于方案 A_j 在指标 C_k 下的优势度 $\phi_k(A_i, A_j)$, 有

$$\phi_k(A_i, A_j) = \begin{cases} \Big(w_{kr} d_{\text{pro}}(\tilde{r}_{jk}, \tilde{r}_{ik}) \Big/ \sum\limits_{k=1}^{m} w_{kr}\Big)^{\alpha}, \\ \qquad E(\tilde{r}_{ik}) > E(\tilde{r}_{jk}); \\ 0,\ E(\tilde{r}_{ik}) = E(\tilde{r}_{jk}); \\ -\dfrac{1}{\theta}\Big(\sum\limits_{k=1}^{m} w_{kr} d_{\text{pro}}(\tilde{r}_{ik}, \tilde{r}_{jk}) \Big/ w_{kr}\Big)^{\alpha}, \\ \qquad E(\tilde{r}_{ik}) < E(\tilde{r}_{jk}). \end{cases} \tag{14}$$

其中: $w_{kr} = g(C_k)/\max\{g(C_j) | j = 1, 2, \cdots, n\}$, $E(\tilde{r}_{ik})$ 和 $E(\tilde{r}_{jk})$ 分别代表Pythagorean不确定语言变量 $\tilde{r}_{ik}$ 和 $\tilde{r}_{jk}$ 的期望值. 显然, $\tilde{r}_{ik}$ 和 $\tilde{r}_{jk}$ 之间存在3种情况: 如果 $E(\tilde{r}_{ik}) > E(\tilde{r}_{jk})$, 则 $\phi_k(A_i, A_j)$ 表示方案 A_i 相对于方案 A_j 关于指标 C_k 的收益值; 如果 $E(\tilde{r}_{ik}) < E(\tilde{r}_{jk})$, 则 $\phi_k(A_i, A_j)$ 表示方案 A_i 相对于方案 A_j 关于指标 C_k 的损失值; 如果 $E(\tilde{r}_{ik}) = E(\tilde{r}_{jk})$, 则 $\phi_k(A_i, A_j)$ 表示方案 A_i 相对于方案 A_j 关于指标 C_k "不输不赢". 参数 $\theta > 0$ 表示损失"衰减系数", 可以根据决策者的偏好进行调整. 当 $\theta > 1$ 时, 表示决策者面对风险的损失被缩小, 即决策者是风险规避的, θ 越大损失规避程度越高; 当 $\theta < 1$ 时, 表示决策者面对风险的损失被扩大, 即决策者是风险偏爱的. 显然, 不同的 θ 值会得到不同的前景价值. $d_{\text{pro}}(\tilde{r}_{ik}, \tilde{r}_{jk})$ 表示Pythagorean不确定语言变量 $\tilde{r}_{ik}$ 和 $\tilde{r}_{jk}$ 之间基于投影的差异测度, 有

$$d_{\text{pro}}(\tilde{r}_{ik}, \tilde{r}_{jk}) = \frac{\text{Pro}_I \tilde{r}_{ik} - \text{Pro}_I \tilde{r}_{jk}}{|I|}. \tag{15}$$

其中

$$I_k = \langle [\max_i s_{\theta(\tilde{r}_{ik})}, \max_i s_{\tau(\tilde{r}_{ik})}] (\max_i u_{ik}, \max_i \upsilon_{ik}) \rangle = \langle [s_{\theta(\varepsilon)}, s_{\theta(\varepsilon)}], (\mu_\varepsilon, \upsilon_\varepsilon) \rangle$$

为理想指标值, 且

$$|I| = \sqrt{(f^*(s_{\theta(\varepsilon)}))^2 + (f^*(s_{\tau(\varepsilon)}))^2} \cdot \sqrt{\mu_\varepsilon^4 + \upsilon_\varepsilon^4 + \pi_\varepsilon^4},$$

$$\mathrm{Pro}_I\tilde{r}_{ik}=\frac{f^*(s_{\theta(\tilde{r}_{ik})})f^*(s_{\theta(\varepsilon)})+f^*(s_{\tau(\tilde{r}_{ik})})f^*(s_{\tau(\varepsilon)})}{\sqrt{(f^*(s_{\theta(\varepsilon)}))^2+(f^*(\tau_{\theta(\varepsilon)}))^2}}\times\frac{\mu^2_{\tilde{r}_{ik}}\mu^2_{\varepsilon}+\upsilon^2_{\tilde{r}_{ik}}\upsilon^2_{\varepsilon}+\pi^2_{\tilde{r}_{ik}}\pi^2_{\varepsilon}}{\sqrt{\mu^4_{\varepsilon}+\upsilon^4_{\varepsilon}+\pi^4_{\varepsilon}}}.$$

方案A_i相对于方案A_j在指标C_k下的优势度记为$\phi_k(A_i,A_j)$. 进一步地,计算方案A_i相对于方案A_j关于所有指标下的综合个体感知优势度

$$\delta(A_i,A_j)=\sum_{t=1}^{p}\phi_{(t)}(A_i,A_j)[\mu(C_{(t)})-\mu(C_{(t-1)})]+\sum_{t=p+1}^{n}\phi_{(t)}(A_i,A_j)[\mu(\tilde{C}_{(t)})-\mu(\tilde{C}_{(t+1)})]. \tag{16}$$

其中:方案A_i相对于方案A_j关于各指标的收益损失值进行升序排列为:$\phi_{(1)}(A_i,A_j)\leqslant\phi_{(2)}(A_i,A_j)\leqslant\cdots\leqslant\phi_{(p)}(A_i,A_j)\leqslant\phi_{(p+1)}(A_i,A_j)\leqslant\cdots\leqslant\phi_{(n)}(A_i,A_j)$, $\phi_{(j)}(A_i,A_j)$表示从小到大排在第j个位置上的收益或者损失值,其对应指标为$C_{(j)}$. $C_{(i)}=\{c_{(1)},c_{(2)},\cdots,c_{(i)}\}$, $C_{(0)}=\varnothing$, $\tilde{C}_{(i)}=\{c_{(i)},c_{(i+1)},\cdots,c_{(n)}\}$, $\tilde{C}_{(n+1)}=\varnothing$. 计算方案$A_i$相对于方案$A_j$关于所有指标的个体感知优势度. 根据个体感知优势度$\delta(A_i,A_j)$,计算方案A_i相对其他所有方案的总体优势度

$$\gamma(A_i)=\frac{\sum_{k=1}^{m}\delta(A_i,A_k)-\min_i\Big\{\sum_{k=1}^{m}\delta(A_i,A_k)\Big\}}{\max_i\Big\{\sum_{k=1}^{m}\delta(A_i,A_k)\Big\}-\min_i\Big\{\sum_{k=1}^{m}\delta(A_i,A_k)\Big\}}. \tag{17}$$

最后,根据总体优势度$\gamma(A_i)$的大小对方案A_i进行排序,γ_i越大,方案越优.

综上所述,基于广义Choquet积分的Pythagorean不确定语言TODIM方法扩展了传统的TODIM方法,具有以下优点.

1) 本节提出的PUL-TODIM方法可以处理Pythagorean不确定语言信息,而传统的TODIM方法只能处理精确数. 相比于精确数,Pythagorean不确定语言具有更强的描述不确定性的能力.

2) 当指标A与B相关独立,不存在关联性,即当$A,B\in P(X)$, $A\bigcap B=\varnothing$, $\mu(A\bigcup B)=\mu(A)+\mu(B)$时,本文提出的基于广义Choquet积分的Pythagorean不确定语言TODIM方法在$\alpha=0.5$的情况下退化为Pythagorean不确定语言TODIM方法. PUL-TODIM方法考虑了指标间存在的3种关联性,相比传统的TODIM方法更灵活,适应范围更广.

3) 已有的扩展TODIM方法,往往都是利用距离测度来描述评估对象之间的差异. 已有文献证明[23],相比于单纯的距离测度,投影方法是一种更好的测度方法,并被广泛应用到多指标决策中. 投影不仅考虑评估对象之间的距离,还考虑了评估对象的模和夹角. 本节提出的标准化Pythagorean不确定语言投影测度可以更全面地考虑两个评估对象之间的差异. 因此,PUL-TODIM方法相比其他的扩展TODIM方法更为有效和准确.

4 实例分析

4.1 实例计算

利用某城市雾霾污染治理方案选择问题的例子来说明本文提出PUL-TODIM方法的有效性. 针对近年来频繁发生的城市雾霾污染问题,当地政府部门根据实际天气、地势和外界条件等诸多因素,确定出4个治理雾霾污染的方案$A_1\sim A_4$,采用4个指标[31]对其进行评价和选择:治理成本C_1,表示治理雾霾消耗物力和财力等成本;治理效果C_2,表示实施方案的雾霾治理效果;社会效应C_3,表示治理雾霾造成的社会影响程度;资源利用率C_4,表示治理雾霾使用资源的有效利用率. 4个指标间存在一定的偏好补充关联.

决策者给出的指标权重向量为$\mu=(0.4,0.5,0.3,0.4)^{\mathrm{T}}$. 基于上述4个评估指标,考虑到评估指标的模糊性和不确定性,决策者利用Pythagorean不确定语言变量的形式给出4个备选方案在各个指标下的评估值,初始决策矩阵$R=[r_{ij}]_{m\times n}$如表1所示.

表1 专家评估初始矩阵R

	c_1	c_2
A_1	$\langle[s_3,s_4],(0.8,0.3)\rangle$	$\langle[s_4,s_5],(0.6,0.3)\rangle$
A_2	$\langle[s_4,s_5],(0.7,0.2)\rangle$	$\langle[s_2,s_3],(0.7,0.4)\rangle$
A_3	$\langle[s_3,s_5],(0.6,0.3)\rangle$	$\langle[s_3,s_4],(0.9,0.2)\rangle$
A_4	$\langle[s_2,s_4],(0.9,0.2)\rangle$	$\langle[s_1,s_3],(0.6,0.3)\rangle$

	c_3	c_4
A_1	$\langle[s_2,s_3],(0.7,0.4)\rangle$	$\langle[s_4,s_5],(0.5,0.3]\rangle$
A_2	$\langle[s_3,s_4],(0.8,0.3)\rangle$	$\langle[s_3,s_4],(0.8,0.3)\rangle$
A_3	$\langle[s_2,s_4],(0.6,0.2)\rangle$	$\langle(s_2,s_4),(0.7,0.4)\rangle$
A_4	$\langle[s_2,s_3],(0.9,0.1)\rangle$	$\langle[s_3,s_4],(0.8,0.4)\rangle$

Step 1: 对专家初始评估矩阵进行初始化处理. 由于4个评估指标都是效益型指标,标准化决策矩阵为$\tilde{R}=[\tilde{r}_{ij}]_{m\times n}=[r_{ij}]_{m\times n}$.

Step 2: 考虑到指标之间存在关联性,计算各指标集的重要性程度. 根据已知指标$C_1,C_2,\cdots,C_n$的权重$\mu=(0.4,0.4,0.5,0.3)^{\mathrm{T}}$,由式(11)可得

$$\frac{(1+0.4\lambda)(1+0.3\lambda)(1+0.45\lambda)(1+0.25\lambda)-1}{\lambda}=1,$$

从而可得$\lambda = -0.7775$. 根据式(10)计算$C = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$各指标子集的模糊测度,如表2所示.

表2　专家评估初始矩阵R

指标子集	测度	指标子集	测度
$\varnothing$	0.000	$\{C_1\}$	0.400
$\{C_4\}$	0.400	$\{C_1, C_2\}$	0.745
$\{C_2, C_3\}$	0.683	$\{C_2, C_4\}$	0.745
$\{C_1, C_2, C_4\}$	0.913	$\{C_1, C_3, C_4\}$	0.818
$\{C_2\}$	0.500	$\{C_3\}$	0.300
$\{C_1, C_3\}$	0.607	$\{C_1, C_4\}$	0.676
$\{C_3, C_4\}$	0.607	$\{C_1, C_2, C_3\}$	0.871
$\{C_2, C_3, C_4\}$	0.871	$\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$	1.000

根据式(13)和表3, 进一步计算得到各指标的Shapely权重值为

$$g_1 = 0.2485,\ g_2 = 0.3237,$$
$$g_3 = 0.1793,\ g_4 = 0.2485.$$

Step 3: 针对指标$C_j (j = 1, 2, 3, 4)$,利用式(14)计算方案$A_i (i = 1, 2, 3, 4)$相对于方案$A_j (j = 1, 2, 3, 4)$在指标C_k下的两两比较的收益-损失值,得到收益-损失矩阵$\phi_k = [\phi_k(A_i, A_j)]_{4\times4}$(参数$\theta = 1$)为

$$\phi_1 = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.7699 & -0.0983 & 0.0314 \\ 0.1913 & 0.0000 & 0.2455 & 0.2213 \\ -0.3954 & -0.8655 & 0.0000 & -0.3746 \\ -0.1265 & -0.7802 & 0.1063 & 0.0000 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$\phi_2 = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.2773 & -0.9600 & 0.3574 \\ -0.8567 & 0.0000 & -1.2867 & 0.2254 \\ 0.3107 & 0.4165 & 0.0000 & 0.4736 \\ -1.1041 & -0.6965 & -1.4631 & 0.0000 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$\phi_3 = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.0000 & -1.2490 & -0.3615 & -1.0404 \\ 0.2240 & 0.0000 & 0.2144 & 0.1239 \\ 0.0648 & -1.1956 & 0.0000 & -0.9756 \\ 0.1866 & -0.6911 & 0.1750 & 0.0000 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$\phi_4 = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.5357 & 0.1672 & -0.4581 \\ 0.1331 & 0.0000 & 0.2137 & 0.00690 \\ -0.6727 & 0.8599 & 0.0000 & -0.8139 \\ 0.1138 & -0.2776 & 0.2023 & 0.0000 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Step 4: 根据式(16)计算方案A_i相对于方案A_j两两比较的综合个体感知优势度$\delta = [\delta(A_i, A_j)]_{4\times4}$为

$$\delta = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.0000 & -0.5855 & -0.3451 & -0.2664 \\ 0.2743 & 0.0000 & -0.4577 & 0.1914 \\ -0.2110 & -0.2722 & 0.0000 & -0.3848 \\ -0.4921 & -0.6753 & -0.5920 & 0.0000 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Step 5: 根据式(17)计算各方案相对其他方案的总体优势度为

$$\gamma(A_1) = 0.4608,\ \gamma(A_2) = 1,$$
$$\gamma(A_3) = 0.7302,\ \gamma(A_4) = 0.$$

Step 6: 根据总体优势度$\gamma(A_i)$的大小对方案排序,$\gamma(A_i)$越大,方案越优,得到方案排序结果为

$$A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4.$$

因此,雾霾污染治理方案A_2为最优.

4.2　敏感性分析

在优势度计算公式(14)中,参数θ表示损失的衰减系数,取值范围为$(0, +\infty)$. $\theta = 1$和$\theta = 2.5$是较为常见的取值. Kahneman等[5]建议θ的取值范围为[1.0, 2.5]. 为了说明损失衰退系数对决策结果的影响,改变参数的取值,计算得到的排序结果如表3所示.

表3　不同θ取值下的排序结果

θ	方案总体优势度				排序结果
	A_1	A_2	A_3	A_4	
0.5	0.4187	1	0.6550	0	$A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$
1	0.4608	1	0.7302	0	$A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$
2.5	0.5415	1	0.8742	0	$A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$
5	0.6157	1	0.9947	0	$A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$
8	0.6133	0.9370	1	0	$A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$
10	0.6073	0.9116	1	0	$A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$

从表3的排序结果可以看出,当损失衰退系数θ发生改变时,最终的排序结果会发生变化. 当θ取值为$\{0.5,\ 1,\ 2.5,\ 5\}$时,方案的排序结果为$A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$;当$\theta$取值为8和10时,方案的排序结果为$A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$,即最优方案从$A_2$变为了$A_3$. 因此,如上节所说,参数$\theta$表示了决策者对损失的偏好,或者说是对损失的规避程度,其取值依赖于决策者决策时的心理行为特征.

此外,上述的计算过程是基于公式(2)中语言下标的语言刻度函数f_1进行的. 虽然该语言刻度函数计算简单且易于理解,但是无法反映在日益复杂的决策环境下决策者的心理变化. 下面分别采用语言刻度函数f_2和f_3,得到的决策结果如表4所示.

从表4可以看出: 当语言刻度函数发生变化时,在$\theta = \{0.5, 1, 2.5, 8, 10\}$时,方案排序结果没有发生变化;在$\theta = 5$时,方案的排序结果发生较为明显的变化. 在利用复合语言刻度时,方案的排序结果为$A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$, A_2为最优方案;而在利用基于前景理论价值函数的语言刻度时,方案的排序结果为$A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$,最优方案为$A_3$. 显然,在采用这两种不同的语言刻度函数时,利用上节提出的PUL-TODIM方法得到的决策结果可能会发生变化. 因此,决策者在实际决策过程中可以根据他们的偏好和实际语义情况选择适当的语言刻度函数.

表 4 不同语言刻度函数下的排序结果

刻度函数		方案优势度				排序
		γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	
f_2	$\theta = 0.5$	0.1348	1.0000	0.5043	0.0000	$A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$
	$\theta = 1$	0.1218	1.0000	0.5825	0.0000	$A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$
	$\theta = 2.5$	0.3140	1.0000	0.8108	0.0000	$A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$
	$\theta = 5$	0.1301	1.0000	0.9402	0.0000	$A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$
	$\theta = 8$	0.1244	0.9352	1.0000	0.0000	$A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$
	$\theta = 10$	0.1192	0.8868	1.0000	0.0000	$A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$
f_3	$\theta = 0.5$	0.2701	1.0000	0.6348	0.0000	$A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$
	$\theta = 1$	0.3169	1.0000	0.7261	0.0000	$A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$
	$\theta = 2.5$	0.4071	1.0000	0.9023	0.0000	$A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$
	$\theta = 5$	0.4598	0.9561	1.0000	0.0000	$A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$
	$\theta = 8$	0.2125	0.8766	1.0000	0.0000	$A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$
	$\theta = 10$	0.4655	0.8491	1.0000	0.0000	$A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$

4.3 对比分析

为了说明PUL-TODIM方法的有效性,下面将对PUL-TODIM方法和基于Pythagorean不确定语言的TOPSIS方法(PUL-TOPSIS)进行对比分析. 利用PUL-TOPSIS方法对上节示例进行计算,得到各备选方案的相对贴近度和排序结果,如表5所示.

表 5 备选方案的相对贴近度和排序

	d^+	d^-	贴进度	排序
A_1	0.2151	0.2488	0.4367	4
A_2	0.2538	0.2101	0.5471	3
A_3	0.2645	0.1993	0.5703	2
A_4	0.3790	0.0849	0.8170	1

从表5可以看出,4个备选方案的排序为$A_4 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1$, A_4最优. 显然,基于PUL-TOPSIS方法得到的排序结果完全不同于上节提出的基于PUL-TODIM方法得到的排序结果. 使用PUL-TODIM方法($\theta = 1$)解决上面的决策问题得到的最佳方案为A_2,而使用PUL-TOPSIS方法得到的最佳方案为A_4. 主要原因在于,PUL-TODIM方法基于前景理论考虑了决策者的心理行为特征,更加符合决策者的实际经历,因此能够产生更有说服力的结果; PUL-TOPSIS方法则基于严格的完全理性假设,即假定决策者是完全理性的而不考虑决策者的心理行为特点. 此外,在PUL-TOPSIS方法中主要采用传统的距离测度来计算各备选方案与正、负理想解之间的逼近程度,而在PUL-TODIM方法中提出了一种新的标准投影偏差测度方法来确定Pythagorean不确定语言变量的差异. 相比单纯的距离测度,新的标准投影偏差测度方法不仅能够考虑评估对象之间的距离,还考虑了评估对象的模和夹角. 因此,相比PUL-TOPSIS方法,PUL-TODIM方法更为合理和有效.

5 结 论

针对指标关联情形下具有Pythagorean不确定语言评价信息的多指标决策问题,在考虑决策者参照依赖和损失规避心理行为的情形下,对指标具有关联关系的多指标决策问题进行研究,并提出了一种新的PUL-TODIM决策方法. 该方法结合TODIM方法、Choquet积分和Shapely函数,得到方案的感知优势度,从而对方案进行排序和择优. 与已有考虑决策者行为的决策方法相比,所提方法可以有效地处理指标之间的关联信息,弥补了已有研究方法中单纯考虑指标独立的不足,因而具有较强的可操作性和实用性. 此外,在考虑决策者行为方面,本研究弥补了已有研究中未考虑Pythagorean不确定语言信息的不足. 在下一步的研究中,可以在考虑决策者心理行为的基础上,解决指标具有关联情形且评价信息为复杂混合信息的多指标决策问题.

参考文献(References)

[1] Hwang C L, Yoon K. Multiple attribute decision making: methods and applications[M]. New York: Springer-Verlag, 1981: 1-10.

[2] 刘政敏, 刘培德, 金芳. 基于直觉语言数集成算子的多属性群决策方法研究[J]. 管理评论, 2014, 26(11): 39-47.
(Liu Z M, Liu P D, Jin F. Research on the multiple attribute group decision-making method based on some intuitionistic linguistic aggregation operators[J]. Management Review, 2014, 26(11): 39-47.)

[3] 刘政敏, 刘培德. 直觉正态模糊优先集结算子及其在群决策中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 2016, 36(2): 494-504.
(Liu Z M, Liu P D. Intuitionistic normal fuzzy prioritized aggregation operators and their application to group decision making[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2016, 36(2): 494-504.)

[4] Simon H A. Administrative behavior[M]. Glencoe: Free

Press, 1976: 55-86.
[5] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk[J]. Econometrica, 1979, 47(2): 263-291.
[6] Gomes L F A M, Lima M M P P. TODIM: Basic and application to multicriteria ranking of projects with environmental impacts[J]. Foundations of Computing and Decision Sciences, 1992, 16(4): 113-127.
[7] Li Y W, Shan Y Q, Liu P D. An extended TODIM method for group decision making with the interval intuitionistic fuzzy sets[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015(3): 1-9.
[8] Fan Z P, Zhang X, Chen F D. Extended TODIM method for hybrid multiple attribute decision making problems[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 42(2): 40-48.
[9] Liu P D, Teng F. An extended TODIM method for multiple attribute group decision making based on intuitionistic uncertain linguistic variables[J]. J of Intelligent and Fuzzy Systems, 2015, 29(2): 701-711.
[10] Liu P D, Teng F. An extended TODIM method for multiple attribute group decision-making based on 2-dimension uncertain linguistic variable[J]. Complexity, 2014, 29(2): 20-30.
[11] Passos A C, Teixeira M G, Garcia K C, et al. Using the TODIM-FSE method as a decision-making support methodology for oil spill response[J]. Computers & Operations Research, 2014, 42(2): 40-48.
[12] Zhang X L, Xu Z S. The TODIM analysis approach based on novel measured functions under hesitant fuzzy environment[J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 61(2): 48-58.
[13] Wei C P, Ren Z L, Rodríguez R M. A hesitant fuzzy linguistic TODIM method based on a score function[J]. Int J of Computational Intelligence Systems, 2015, 8(4): 701-712.
[14] Ren P, Xu Z S, Gou X. Pythagorean fuzzy TODIM approach to multi-criteria decision making[J]. Applied Soft Computing, 2016, 42: 246-259.
[15] 王坚强, 李新娥. 基于多值中智集的TODIM方法[J]. 控制与决策, 2015, 30(6): 1139-1142.
(Wang J Q, Li X E. TODIM method with multi-valued neutrosophic sets[J]. Control and Decision, 2015, 30(6): 1139-1142.)
[16] Qin J D, Liu X W, Pedrycz W. An extended TODIM multi-criteria group decision making method for green supplier selection in interval type-2 fuzzy environment[J]. European J of Operational Research, 2016, 258(2): 626-638.
[17] Yager R R. Pythagorean membership grades in multicriteria decision making[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2014, 22(4): 958-965.
[18] 王坚强, 李寒波. 基于直觉语言集结算子的多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1571-1574.
(Wang J Q, Li H B. Multi-criteria decision-making method based on aggregation operators for intuitionistic linguistic fuzzy numbers[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1571-1574.)
[19] Xu Z. Uncertain linguistic aggregation operators based approach to multiple attribute group decision making under uncertain linguistic environment[J]. Information Sciences, 2004, 168: 171-184.
[20] 彭新东, 杨勇. 基于Pythagorean模糊语言集多属性群决策方法[J]. 计算机工程与应用, 2016, 52(23): 50-54.
(Peng X D, Yang Y, et al. Multiple attribute group decision making methods based on Pythagorean fuzzy lin-guistic set[J]. Computer Engineering and Applications, 2016, 52(23): 50-54.)
[21] Wang J Q, Wu J T, Wang J, et al. Interval-valued hesitant fuzzy linguistic sets and their applications in multi-criteria decision-making problems[J]. Information Sciences, 2014, 288(1): 55-72.
[22] Yue Z L, Jia Y Y. A direct projection-based group decision-making methodology with crisp values and interval data[J]. Soft Computing, 2017, 21(9): 2395-2405.
[23] Ji P, Zhang H Y, Wang J Q. A projection-based TODIM method under multi-valued neutrosophic environments and its application in personnel selection[J]. Neural Computing Applications, 2016, DOI:10.1007/s00521-016-2436-z.
[24] Sugeno M. Theory of fuzzy integrals and its applications[D]. Tokyo: Department of Systems Science, Tokyo Institute of Technology, 1974: 218-226.
[25] 申健民, 党耀国, 周伟杰, 等. 基于指数函数的灰色动态多属性关联决策模型[J]. 控制与决策, 2016, 31(8): 1441-1445.
(Shen J M, Dang Y G, Zhou W J, et al. Grey dynamic multiple attribute correlation decision-making model based on exponential function[J]. Control and Decision, 2016, 31(8): 1441-1445.)
[26] Tan C Q. A multi-criteria interval-valued intuitionistic fuzzy group decision making with Choquet integral-based TOPSIS[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(4): 3023-3033.
[27] Kuo M S, Liang G S. A novel hybrid decision-making model for selecting locations in a fuzzy environment[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2011, 54(1): 88-104.
[28] Grabisch M, Murofushi T, Sugeno M. Fuzzy measure and integrals[M]. New York: Physica-Verlag, 2000: 55-91.
[29] Shapley L S. A value for n-person game[M]. Contributions to the theory of games, Princeton: Princeton University Press, 1953: 31-40.
[30] Tan C Q, Jiang Z Z, Chen X H. An extended TODIM method for hesitant fuzzy interactive multicriteria decision making based on generalized Choquet integral[J]. J of Intelligent & Fuzzy Systems, 2015, 29(1): 293-305.
[31] 刘海英, 张秀秀. 政府雾霾治理绩效评价指标体系的构建研究[J]. 环境保护, 2015, 43(3): 58-61.
(Liu H Y, Zhang X X. Research on the construction of the government haze governance performance evaluation index system[J]. Environmental Protection, 2015, 43(3): 58-61.)

(责任编辑：齐 霁)