

基于蝙蝠算法的观测矩阵优化算法

崔志华, 张春妹[†], 时振涛, 牛 云

(太原科技大学 计算机科学与技术学院, 太原 030024)

摘 要: 观测矩阵是压缩感知理论的重要研究内容, 然而已有的观测矩阵没有与重构效果相关联, 存在不稳定和重构精度低等缺陷. 为了提高信号重构的效果, 提出以高斯观测矩阵为基础, 以重构误差为目标函数, 采用标准蝙蝠算法对观测矩阵进行优化. 为了验证所提算法的效果, 以信号和图像为例, 与其余 5 个算法进行比较, 仿真结果表明, 所提算法具有较大的稳定性和较高的重构精度.

关键词: 压缩感知; 信号重构; 观测矩阵; 蝙蝠算法; 重构误差

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Measurement matrix optimization algorithm with bat algorithm

CUI Zhi-hua, ZHANG Chun-mei[†], SHI Zhen-tao, NIU Yun

(School of Computer Science and Technology, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, China)

Abstract: The measurement matrix plays an important role in compressed sensing theory. However, the measurement matrix is only dominated by the compressed signal, so it is influenced by the signal reconstruction significantly. Therefore, an optimization algorithm for the measurement matrix with the bat algorithm is introduced. In this algorithm, the measurement matrix is initialized by using the Gaussian matrix, and then updated with the bat algorithm, while the signal reconstruction error is taken as the objective function. To verify the performance, the proposed algorithm is compared with five other algorithms. Simulation results show that the proposed algorithm has better stability and reconstruction accuracy.

Keywords: compressed sensing; signal recovery; measurement matrix; bat algorithm; reconstruction error

0 引 言

大数据时代的到来意味着越来越多的数据需要传输及存储, 然而传统的信号处理过程是先采样, 再压缩, 丢掉某些不重要的信息, 这就造成了很大的资源浪费. 为了解决上述问题, Donoho 等^[1]提出了压缩感知理论 (compressed sensing, CS).

压缩感知的原理为: 若信号是可压缩的或在某个变换域是稀疏的, 则可以用一个测量矩阵将该信号投影到某个低维空间, 并通过求解一个非线性优化问题重构出原始信号. 压缩感知的研究范畴包括稀疏变换、观测矩阵和重构算法的设计, 本文主要考虑观测矩阵的设计.

2006 年, Donoho 等^[2-3]提出了观测矩阵的设计应该满足有限等距性 (restricted isometry property, RIP),

即观测矩阵中任意 $2K$ 列不相关, 并将高斯矩阵作为普适的观测矩阵; Candès 等^[4]提出了 RIP 的等价命题, 即要求观测矩阵与变换基不相关; 在满足 RIP 条件下, Yin^[5]设计了与信号特点相关的 Toeplitz 矩阵; Duarte 等^[6]和彭玉楼等^[7]分别提出了利用不同的奇异值分解策略对观测矩阵进行优化.

上述研究成果仅从信号可压缩性来设计观测矩阵, 然而观测矩阵不仅与信号可压缩性有关, 而且与重构算法的效率密切相关, 因此本文对从重构算法的效率出发设计观测矩阵作了初步尝试, 设计一种基于蝙蝠算法^[8-9]的观测矩阵优化算法. 针对信号及图像进行了对比实验, 实验结果表明, 基于蝙蝠算法的观测矩阵优化算法具有较大的稳定性和较高的重构精度.

收稿日期: 2017-04-07; 修回日期: 2017-08-06.

基金项目: 山西省自然科学基金项目 (201601D011045).

责任编委: 陈家伟.

作者简介: 崔志华 (1976—), 男, 教授, 博士, 从事智能计算和复杂系统等研究; 张春妹 (1993—), 女, 硕士生, 从事智能计算、压缩感知的研究.

[†]通讯作者. E-mail: zhzhchunmei@163.com

1 相关研究

1.1 压缩感知理论

设 $\boldsymbol{x} \in R^{N \times 1}$ 是长度为 N 的稀疏信号或可稀疏化的信号,若存在变换基 $\boldsymbol{\Psi} \in R^{N \times N}$,使得可压缩信号 \boldsymbol{x} 可以在变换基 $\boldsymbol{\Psi}$ 下表示为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\alpha}, \quad (1)$$

则称 \boldsymbol{x} 为可稀疏化信号, $\boldsymbol{\alpha}$ 为该信号在变换基 $\boldsymbol{\Psi}$ 上的稀疏表示.

利用一个与变换基不相关的观测矩阵 $\boldsymbol{\Phi} \in R^{M \times N} (M \ll N)$, 可以实现对信号 \boldsymbol{x} 的压缩投影,即将原长度为 N 的信号 \boldsymbol{x} 压缩成长度为 M 的信号 \boldsymbol{y} ,从而降低存储空间,有

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \quad (2)$$

其中: $\boldsymbol{y} \in R^{M \times 1}$ 为观测信号, $\boldsymbol{\Phi}$ 为观测矩阵, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}$ 为传感矩阵.

需要求解式(2)的逆过程,以从 \boldsymbol{y} 中重构出原始信号 \boldsymbol{x} . 然而,由于 $M \ll N$, 式(2)有无穷多个解,即该问题是欠定的. 为此,考虑如下的重构模型^[1]:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\alpha}} \|\boldsymbol{\alpha}\|_0, \\ \text{s.t. } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \end{aligned} \quad (3)$$

为了解决上式问题,出现了大量高效的重构算法,如基于贪婪思想的正交匹配追踪算法(OMP)^[10]、基于非凸转化问题的SP算法和基于阈值迭代的方法等.

1.2 观测矩阵对重构影响分析

为了显示不同观测矩阵对算法的影响,本文作了如下实验:

实验采用的观测矩阵包括:高斯随机观测矩阵、SVD特征值优化矩阵^[7]和伯努利矩阵^[11]. 选择长度 $N = 256$, 稀疏度 $K = 10$ 的稀疏信号,随机产生30个观测矩阵,使用正交匹配追踪算法对信号进行重构实验,实验结果可参阅图1. 其中:横坐标代表30个不同的观测矩阵,纵坐标代表当前观测矩阵的重构误差.

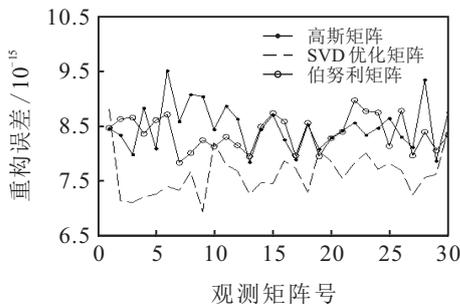


图1 不同观测矩阵的重构效果

从图1可以看出,不管采用哪种类型的观测矩阵,在其进行观测后,重构的结果都会出现不稳定的现

象. 相比之下,经过SVD分解优化的矩阵,其重构精度要优于高斯随机观测矩阵和伯努利矩阵,这表明观测矩阵的优劣直接影响到重构算法的效率. 实际应用中,在批量恢复所需数据时,往往只作一次重构,故重构效果越稳定越好. 因此,需要针对重构效果来设计一种观测矩阵的优化算法.

为了实现这一目标,本文引入一种新近提出的智能优化算法——蝙蝠算法. 该算法将高斯观测矩阵作为参数进行优化,利用正交匹配追踪算法对信号和图像进行重构,并将重构误差作为目标函数.

2 基于蝙蝠算法的观测矩阵优化

2.1 蝙蝠算法

蝙蝠算法中,每只蝙蝠个体 i 同时具有位置 x_i 及速度 v_i 两个参数,并在搜索区域 $[x_{\min}, x_{\max}]^D$ (D 表示问题的维数)内以随机飞行的方式搜寻食物.

标准蝙蝠算法的流程如下.

Step 1: 初始化蝙蝠种群,假设有 n 只蝙蝠;初始化飞行频率 f^0 、声波响度 A^0 和脉冲发射频率 r^0 ,随机产生各蝙蝠的位置

$$x_i = x_{\min} + \varphi_i \times (x_{\max} - x_{\min}). \quad (4)$$

其中: φ_i 为满足均匀分布的随机数, $i = 1, 2, \dots, n$.

Step 2: 计算适应值,并保存最优蝙蝠个体位置.

Step 3: 产生随机数 r_1 ,更新下一代的速度 v_i^{t+1} 和位置 x_i^{t+1} ,有

$$f_i = f_{\min} + r_1 \times (f_{\max} - f_{\min}), \quad (5)$$

$$v_i^{t+1} = v_i^t + (x_i^t - x_{\text{best}}) \cdot f_i, \quad (6)$$

$$x_i^{t+1} = x_i^t + v_i^{t+1}. \quad (7)$$

Step 4: 对每只蝙蝠,产生随机数 r_2 . 当 $r_2 > r_i^t$ 时,在最优蝙蝠个体附近按照下式产生新位置 \tilde{x} :

$$\tilde{x} = x_{\text{best}} + \varepsilon \overline{A^t}. \quad (8)$$

其中: ε 是在 $[-1, 1]$ 内的随机数, $\overline{A^t}$ 是所有蝙蝠在 t 时刻的平均响度.

Step 5: 计算各位置的适应值.

Step 6: 对每只蝙蝠,产生一个随机数 r_3 . 当 $r_3 < A_i^t$,且新位置的适应值优于旧位置时,接受新解,更新声波响度及脉冲发射频率

$$r_i^{t+1} = r_i^0 (1 - e^{-\gamma t}), \quad (9)$$

$$A_i^{t+1} = \alpha A_i^t. \quad (10)$$

Step 7: 更新全局最优解.

Step 8: 判断算法是否满足终止条件. 若满足输出结果,则退出,否则返回 Step 3.

2.2 本文编码策略

蝙蝠的初始位置采用规模为 $M \times N$ 的高斯随机观测矩阵, 其每个分量满足正态分布, 按照正态分布的“ 3σ 原则”, 其取值区间在 $(-\infty, -3\sigma]$ 和 $[3\sigma, +\infty)$ 的概率仅占 0.1%, 故本文忽略此种低概率事件, 将搜索区域设置为 $[-3\sigma, 3\sigma]^{M \times N}$. 因为随机高斯矩阵服从标准正态分布, 即 $\sigma = 1, \mu = 0$, 所以本算法的搜索区域设为 $[-3, 3]^{M \times N}$.

本文算法的基本流程如下.

Step 1: 产生原始信号 \mathbf{x} , 选择稀疏变换基 Ψ 对信号 \mathbf{x} 进行稀疏, 表示为 $\mathbf{x} = \Psi\alpha$;

Step 2: 初始化种群个体, 将每只蝙蝠的位置设为随机高斯观测矩阵, 初始化飞行频率 f^0 、声波响度 A^0 和脉冲发射频率 r^0 ;

Step 3: 对于长度为 N 的原始信号 \mathbf{x} , 使用观测矩阵和变换基, 利用式(2)压缩成长度为 $M (M \ll N)$ 的观测信号 \mathbf{y} ;

Step 4: 利用正交匹配追踪算法, 由观测信号 \mathbf{y} 、稀疏变换基 Ψ 和观测矩阵 Φ , 重构出原始信号 $\hat{\mathbf{x}}$, 计算重构误差, 并保存最优蝙蝠个体位置;

Step 5: 由式(5)~(7)更新下一代的速度 v_i^{t+1} 和位置 x_i^{t+1} ;

Step 6: 对每只蝙蝠, 产生随机数 r_2 , 当 $r_2 > r_i^t$ 时, 由式(8)在最优蝙蝠个体附近产生新的观测矩阵;

Step 7: 利用正交匹配追踪算法, 由观测信号 \mathbf{y} 、稀疏变换基 Ψ 和观测矩阵 Φ , 重构出原始信号 $\hat{\mathbf{x}}$, 计算重构误差, 并保存最优蝙蝠个体位置作为新观测矩阵;

Step 8: 对每只蝙蝠, 产生一个随机数 r_3 , 当 $r_3 < A_i^t$, 且新观测矩阵的重构误差优于旧观测矩阵时, 接受新观测矩阵, 并由式(9)和(10)更新声波响度及脉冲发射频率;

Step 9: 更新全局最优观测矩阵;

Step 10: 判断算法是否满足迭代终止条件, 若满足, 则输出最优观测矩阵, 否则执行 Step 5.

3 仿真实验

为了验证本文所提算法的有效性, 采用如下几个实验作为比较:

- 1) 观测矩阵采用随机高斯矩阵(简称为 Gaussian);
- 2) 观测矩阵采用伯努利矩阵(简称为 Bernoulli);
- 3) 采用 SVD 分解的高斯观测矩阵(简称为 SVD);
- 4) 采用蝙蝠算法优化观测矩阵(简称为 BA);
- 5) 采用微粒群算法优化观测矩阵(简称为 PSO);

6) 采用差分进化算法优化观测矩阵(简称为 DE);

实验环境为 Windows 7 操作系统, 编程语言为 Matlab 7.0, 重构算法采用正交匹配追踪算法. 为了方便分析, 本文针对信号及图像重构分别进行实验.

3.1 信号重构对比实验

实验采用一维可稀疏化的信号

$$F(\mathbf{x}) = 0.3 \cos(2\pi F_1 \cdot T_s \cdot t_s) + 0.6 \cos(2\pi F_2 \cdot T_s \cdot t_s) + 0.1 \cos(2\pi F_3 \cdot T_s \cdot t_s) + 0.9 \cos(2\pi F_4 \cdot T_s \cdot t_s).$$

其中: 采样频率 $F_s = 800$, 采样间隔 $t_s = 1/F_s$, 采样序列为 $T_s = 1 : N$, 信号频率分别为 $F_1 = 50 \text{ Hz}$, $F_2 = 100 \text{ Hz}$, $F_3 = 200 \text{ Hz}$, $F_4 = 400 \text{ Hz}$. 信号长度为 $N = 256$, $M = 64$.

为了分析稀疏性对重构结果的影响, 本实验中的稀疏度 K 分别取 10、15 和 20. 实验采用 30 个随机高斯观测矩阵, 因此种群规模为 30, 迭代次数为 300, 采用傅里叶变换基将原始信号稀疏化, 再使用 OMP 算法进行重构.

重构信号的质量采用重构误差 Error 来衡量, 有

$$\text{Error} = \frac{\|\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i\|_2}{\|\mathbf{x}_i\|_2} \quad (11)$$

其中: \mathbf{x}_i 为信号第 i 维的值, $\hat{\mathbf{x}}_i$ 为重构信号第 i 维的值, N 为信号长度. Error 的值越小, 说明重构误差越小, 效果越好.

为了说明本文方法对重构结果的改善情况, 采用性能提高率(performance improvement Ratio, PI)为

$$\text{PI}_j = \frac{\text{mean}_j - \text{mean}_{\text{BA}}}{\text{mean}_j} \quad (12)$$

其中 $\text{mean}_j (j = \text{Gaussian}, \text{Bernoulli}, \text{SVD}, \text{BA}, \text{PSO}, \text{DE})$ 表示各算法的平均性能.

表 1 表示一维信号 $F(\mathbf{X})$ 的重构结果, 将 6 种算法得到的解的均值和性能提高率进行列表统计, 均值越小说明重构精度越高, 性能提高率越高. 通过对表 1 中的数据分析可以发现, 对于不同的稀疏度, BA 的优化效果最优, BA 与 Gaussian、Bernoulli 及 SVD 的差别较大, 至少能提高 13% 的性能.

表 1 一维信号不同优化法的平均性能

K	数据	Gaussian	Bernoulli	SVD	BA	PSO	DE
10	均值	3.78e-15	3.72e-15	3.54e-15	3.08e-15	3.11e-15	3.12e-15
	提高率/%	18.52	17.20	13.00	-	0.96	1.30
15	均值	4.12e-15	4.03e-15	3.83e-15	3.06e-15	3.11e-15	3.10e-15
	提高率/%	25.73	24.07	20.10	-	1.61	1.29
20	均值	4.32e-15	4.26e-15	4.08e-15	3.00e-15	3.14e-15	3.01e-15
	提高率/%	30.56	29.58	26.47	-	4.46	0.33

3.2 图像重构对比实验

本实验检测不同的观测矩阵对图像重构的影响. 实验图像为Lena图像, 大小为 256×256 , 压缩度分别为0.2、0.3、0.4、0.5、0.6, 稀疏度为 $K = M/4$. 种群大小为30, 最大迭代次数为300. 实验中采用小波变换基将图像稀疏化, 并使用OMP算法对图像进行重构.

重构图像的质量测量采用一般的方法: 峰值信噪比(PSNR), 表达式为

$$\text{PSNR} = 10 \cdot \log_{10} \frac{\max^2}{\frac{1}{N \times N} \sum_{i=1}^{N \times N} (x_i - \hat{x}_i)^T (x_i - \hat{x}_i)}. \quad (13)$$

因为每个像素点用8位表示(0~255), 所以灰度图像的最大值即为255, 即 $\max = 255$. 同等条件下, PSNR的值越大, 说明重构质量越高.

从图2可以看出, BA的性能大幅优于Gaussian、Bernoulli和SVD算法, 但与PSO及DE相比, 则仅略好一些.

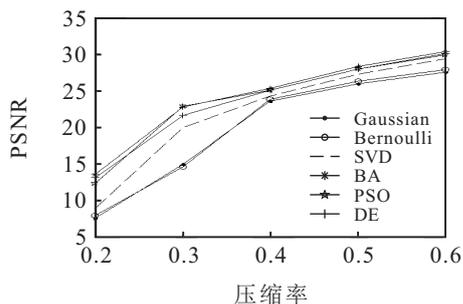


图2 不同压缩率下的重构效果

4 结论

由于观测矩阵对重构算法的性能影响较大, 本文将观测矩阵的选择与重构误差相联结, 设计了基于蝙蝠算法的观测矩阵优化方法, 并以信号和图像为例进行对比. 实验结果表明, 采用蝙蝠算法的观测矩阵设计能够有效减少重构误差, 提高效率, 但不同的进化算法间的差异较少. 后续工作将研究高效的进化算法, 以便进一步减小重构误差.

参考文献(References)

- [1] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [2] Donoho D L, Tanner J. Neighborliness of randomly projected simplices in high dimensions[J]. Proc of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2005, 102(27): 9452-9457.
- [3] Candès E J, Romberg J K, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. Communications on Pure & Applied Mathematics, 2006, 59(8): 1207-1223.
- [4] Candès E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- [5] Yin W, Morgan S, Yang J, et al. Practical compressive sensing with Toeplitz and circulant matrices[C]. Proc of Visual Communications and Image Processing. Huangshan, 2010: 1-10.
- [6] Duarte-Carvajalino J M, Sapiro G. Learning to sense sparse signals: Simultaneous sensing matrix and sparsifying dictionary optimization[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2009, 18(7): 1395-1408.
- [7] 彭玉楼, 何怡刚, 林斌. 基于奇异值分解的压缩感知噪声信号重构算法[J]. 仪器仪表学报, 2012, 33(12): 2655-2660.
(Peng Y L, He Y G, Lin B. Noise signal recovery algorithm based on singular value decomposition in compressed sensing[J]. Chinese J of Scientific Instrument, 2012, 33(12): 2655-2660.)
- [8] Yang X S. A new metaheuristic bat-inspired Algorithm[J]. Computer Knowledge & Technology, 2010, 284: 65-74.
- [9] Yang X S, He X. Bat algorithm: Literature review and applications[J]. Int J of Bio-Inspired Computation, 2013, 5(3): 141-149.
- [10] Cai T T, Wang L. Orthogonal matching pursuit for sparse signal recovery with noise[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2011, 57(7): 4680-4688.
- [11] Candès E J, Tao T. Decoding by linear programming[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2005, 51(12): 4203-4215.

(责任编辑: 齐 粟)