

基于最大反馈线性化的TORA系统非奇异镇定控制

张宇¹, 郭源博¹, 李芦钰^{2†}, 张晓华¹

(1. 大连理工大学 电气工程学院, 辽宁 大连 116024; 2. 大连理工大学 土木工程学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 针对TORA系统的镇定控制问题, 提出一种基于最大反馈线性化的非奇异控制器设计方案. 应用拉格朗日方程建立TORA系统的数学模型, 采用微分代数方法计算TORA系统中具有最大相对阶的虚拟输出函数, 以此为基础通过反馈线性化将TORA的数学模型转化为具有稳定内动态的三阶线性系统, 采用极点配置方案为TORA系统设计镇定控制器. 为了解决控制律中存在的奇异值问题, 采用梯度动力学方法对控制器进行调整. 最后通过仿真分析验证基于最大反馈线性化的控制方案的有效性.

关键词: TORA; 最大反馈线性化; 极点配置; 梯度动力学方法; 非奇异控制

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Nonsingular controller for TORA system based on maximal feedback linearization

ZHANG Yu¹, GUO Yuan-bo¹, LI Lu-yu^{2†}, ZHANG Xiao-hua¹

(1. School of Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 2. School of Civil Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A nonsingular control scheme is proposed for the stabilization of the translational oscillator with rotating actuator (TORA) system based on maximal feedback linearization. The mathematical model of the nonlinear TORA system is derived through using the Lagrange equations. The dummy output with the largest relative degree is obtained with the differential algebra approach. Based on this dummy output, the differential dynamics of TORA system can be transformed into a third-order linear system with stable internal dynamics, and a controller is developed via the pole assignment technique for this linear system. To conquer the singularity problem, the gradient dynamics method is adopted to regulate the control law. Numerical simulations are conducted to demonstrate the effectiveness of the proposed scheme and the correctness of the theoretical analysis.

Keywords: TORA; maximal feedback linearization; pole assignment; gradient dynamics method; nonsingular control

0 引言

欠驱动系统是指控制输入个数少于系统状态变量个数的系统, 这类系统的广泛应用使其非线性控制问题成为研究热点^[1-4]. 具有旋转激励的平移振荡器 (TORA) 作为研究欠驱动系统的基准系统之一, 因其具有明显的强非线性、欠驱动特性, 常被用来分析设计非线性控制器, 测试控制器的性能.

关于TORA的控制器设计问题, 很多学者已经进行了深入的研究. 期刊《Int J of Robust and Nonlinear Control》对TORA系统的非线性控制问题进行过专门的研究报道^[5-6]. 对于TORA系统, 常见的控制设计

方法有两类: 一是通过部分反馈线性化和解耦处理将系统转化为严格反馈的级联规范型, 然后应用经典的反步法得到系统的稳定控制律^[7-9]; 另一种方法是利用TORA系统的无源特性设计控制器^[10-13]. 此外, 其他的一些控制算法, 包括输出反馈控制^[14-15]、滑模变结构控制^[16-17]、自适应控制^[18-19]、智能控制^[20], 以及其他的一些控制算法^[21]都被应用于TORA系统控制器的设计.

作为一种非奇异反馈变换方法, 最大反馈线性化的基本思路为寻找具有最大相对阶的输出, 使得系统的内动态阶次最小^[22]. 文献[23-24]将该方法应用到

收稿日期: 2017-04-30; 修回日期: 2017-07-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目(51377013, 51378093).

责任编委: 张维海.

作者简介: 张宇 (1990—), 男, 博士生, 从事欠驱动系统控制、结构振动控制的研究; 张晓华 (1961—), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能机器人与运动控制、欠驱动系统建模与非线性控制等研究.

†通讯作者. E-mail: liluyu@dlut.edu.cn

欠驱动系统的分类问题中,文献[25]针对一类轮式机器人分析了可实现最大反馈线性化的子系统,以此为基准完成了该轮式机器人在斜坡上的运动控制。

现有的TORA系统控制方案均为针对TORA系统自身的强非线性而设计的非线性控制器,存在着设计过程复杂、控制器参数选取困难等问题。为此,本文给出基于最大反馈线性化的TORA系统控制器设计方案,通过最大反馈线性化将TORA非线性模型转换为具有稳定内动态的线性系统,可极大方便控制器的设计;通过极点配置保证闭环控制系统的控制效果可任意调节;另外,为解决控制律中存在的奇异值问题,采用梯度动力学方法对控制律进行调整,避免控制律零除问题对期望控制效果造成的影响。

1 数学模型

如图1所示,TORA系统由一个未驱动的水平振荡器(小车)与受转矩驱动的旋转惯性质量(小球)组成。其中小车通过弹簧连接在固定端上,在水平面内作一维直线运动,位移用 q_1 表示,小球在作动器(电机等)转矩 τ 的作用下在水平面内作旋转运动,转动角度为 q_2 。小车质量为 M ,弹簧刚度系数为 K ,小球质量为 m ,其转动半径为 r ,小球关于质心转动惯量为 J 。

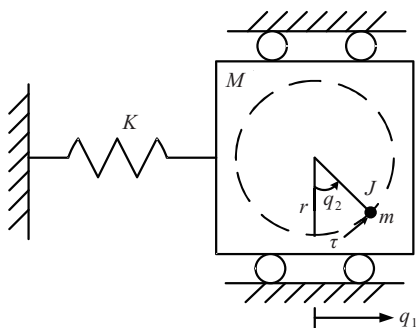


图1 TORA系统

应用分析力学中的拉格朗日方程来建立其数学模型。拉格朗日方程从广义能量出发,以与广义坐标变量数目相等的广义坐标方程来表达系统的动态。对于TORA系统,其相应的拉格朗日方程可表达为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = \tau. \end{cases} \quad (1)$$

首先计算系统的动能和势能,系统的总动能由小车的动能和小球的动能两部分组成:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} M \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{q}_1^2 + m r \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2 + \frac{1}{2} (m r^2 + J) \dot{q}_2^2.$$

系统总的势能为

$$V = \frac{1}{2} K q_1^2.$$

由此得到系统的拉格朗日算子

$$L = T - V = \frac{1}{2} M \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{q}_1^2 + m r \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2 + \frac{1}{2} (m r^2 + J) \dot{q}_2^2 - \frac{1}{2} K q_1^2. \quad (2)$$

将拉格朗日算子(2)代入(1),可得TORA系统的动力学模型

$$\begin{cases} (M + m) \ddot{q}_1 + m r \cos q_2 \ddot{q}_2 - m r \sin q_2 \dot{q}_2^2 + K q_1 = 0, \\ m r \cos q_2 \ddot{q}_1 + (m r^2 + J) \ddot{q}_2 = \tau. \end{cases} \quad (3)$$

可将其改写为矩阵形式

$$D(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) = \mathbf{B} u. \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T,$$

$$D(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M + m & m r \cos q_2 \\ m r \cos q_2 & m r^2 + J \end{bmatrix},$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & -m r \dot{q}_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} K q_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u = \tau.$$

为方便后面的系统分析和控制器设计,将系统进一步改写为如下状态空间形式:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = f_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + b_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tau, \\ \ddot{q}_2 = f_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + b_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tau. \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$b_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{m r \cos q_2}{(m r \cos q_2)^2 - (m r^2 + J)(M + m)},$$

$$f_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{(m r^2 + J)(K q_1 - m r \sin q_2 \dot{q}_2^2)}{(m r \cos q_2)^2 - (m r^2 + J)(M + m)},$$

$$b_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{M + m}{(m r^2 + J)(M + m) - (m r \cos q_2)^2},$$

$$f_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{m r \cos q_2 (-m r \sin q_2 \dot{q}_2^2 + K q_1)}{(M + m)(m r^2 + J) - (m r \cos q_2)^2}.$$

2 最大反馈线性化

2.1 问题提出

驱动的缺失使得像TORA这样的欠驱动机械系统不能实现完全反馈线性化^[1]。传统的处理办法是对整个机械系统中驱动子系统部分进行部分反馈线性

化^[8],对于两自由度的欠驱动机械系统而言,在进行了部分反馈线性化之后,除了得到线性化的输入输出,还包含一个阶次为2的系统内动态,存在这样的内动态仍然会给系统的分析和综合造成困难.

实际上,在对系统进行反馈线性化时,选取不同的输出函数会导致不同的内动态,为实现系统的镇定,可将输出选择为状态变量的任意函数,以便使其具有最大的相对阶,这样可以保证系统有最小的内动态,从而最大程度上降低系统分析和综合的难度.寻找具有最大相对阶的系统输出并完成系统的线性化就是本节要讨论的最大反馈线性化问题.

2.2 虚拟输出函数求解

计算具有最大相对阶的输出函数需要用到微分代数的相关知识^[26],下面进行相应介绍.

对于系统

$$\Sigma = \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, \\ y = h(x). \end{cases} \quad (6)$$

考虑如下实数变量的无限集:

$$\mathcal{C} =$$

$$\{x_i, i = 1, 2, \dots, n; u_j^{(k)}, j = 1, 2, \dots, m, k \geq 0\}.$$

其中: $x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p; f(x), g(x), h(x)$ 均为亚纯函数. \mathcal{K} 为依赖于 \mathcal{C} 的有限子集的亚纯函数所组成的集合, \mathcal{K} 的元素可以表示为 $F(\{x_i, u_j^{(k)}\})$ 的形式,在 \mathcal{K} 上可定义微分算子 δ :

$$\delta F(\{x_i, u_j^{(k)}\}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_{j=1,2,\dots,m} \frac{\partial F}{\partial u_j^{(k)}} \delta u_j^{(k)}.$$

用 \mathcal{E} 表示由元素 $d\mathcal{C}$ 在 \mathcal{K} 上张成的向量空间,即

$$\mathcal{E} = \text{span}_{\mathcal{K}} d\mathcal{C}.$$

\mathcal{E} 中的元素可以表示为如下形式:

$$\omega = \sum_{i=1}^n F_i dx_i + \sum_{j=1,2,\dots,m; k \geq 0} F_{jk} du_j^{(k)}.$$

将这种形式的 ω 元素称之为“1-形式”,如果该1-形式 $\omega \in \mathcal{E}$ 满足 $\omega = dF, F \in \mathcal{K}$, 则称该1-形式是可积的,或精确的. 1-形式的相对阶定义为满足 $\omega^{(r)} \notin \text{span}_{\mathcal{K}}\{dx\}$ 的最小正整数 r , 该1-形式的时间微分为

$$\dot{\omega} = \sum_{i=1}^n (\dot{F}_i dx_i + F_i d\dot{x}_i) + \sum_{j=1,2,\dots,m; k \geq 0} (\dot{F}_{jk} du_j^{(k)} + F_{jk} d\dot{u}_j^{(k+1)}).$$

对 \mathcal{E} 进行一定的筛选,定义 \mathcal{E} 的一系列子空间

$\{\mathcal{H}_k\}$, 其中 $k > 0$, 表示的是由相对阶不小于 k 的1-形式构成的集合,即

$$\mathcal{H}_0 = \text{span}_{\mathcal{K}}\{dx, du\},$$

$$\mathcal{H}_k = \{\omega \in \mathcal{H}_{k-1} | \dot{\omega} \in \mathcal{H}_{k-1}\}, k \geq 1. \quad (7)$$

故有 $\mathcal{H}_1 = \text{span}_{\mathcal{K}}\{dx\}$, 根据这样的定义很容易发现子空间 \mathcal{H}_k 随着 k 的增大逐渐变小. 如果 $\mathcal{H}_{\infty} = 0$, 则系统是强易接近的,对于要讨论的欠驱动机械系统均满足 $\mathcal{H}_{\infty} = 0$.

对于最大反馈线性化问题,寻找具有最大相对阶的输出函数是至关重要的一步,需保证所找到的输出函数是所有输出函数中相对阶最大的,即找出 \mathcal{H}_k , 满足如下关系:

$$\mathcal{H}_0 \supset \mathcal{H}_1 \supset \dots \supset \mathcal{H}_k \supset \mathcal{H}_{k+1} = \mathcal{H}_{k+2} = \dots = \mathcal{H}_{\infty}. \quad (8)$$

k 即为所能找到输出的最大相对阶数,且该输出即为 \mathcal{H}_k 的一个元素.

下面以两自由度TORA欠驱动系统作为研究对象,给出寻找需要的输出函数的具体方法.

1) 计算 \mathcal{H}_2 .

因为对于系统(6)而言,由 $g(x)$ 张成的分布是对合的,所以 $\mathcal{H}_2 = \text{span}_{\mathcal{K}}\{g^{\perp}\}$ 是完全可积的,故有 $\bar{\mathcal{H}}_2 = \mathcal{H}_2(\bar{\mathcal{H}}_k = \text{span}\{\sigma \in \mathcal{H}_k : d\sigma \equiv 0 \text{ mod } \mathcal{H}_k\}$, 即 \mathcal{H}_k 中的最大闭子空间). 对于TORA系统,有

$$\mathcal{H}_2 = \text{span}_{\mathcal{K}}\{g^{\perp}\} = \text{span}_{\mathcal{K}}\{dq_1, dq_2, d(BD(q)\dot{q})\}. \quad (9)$$

因为 q_1 和 q_2 相对阶是2,所以 $dq_1, dq_2 \in \mathcal{H}_2$, 而第3个基底则由 $d(B^T D(q)\dot{q})$ 构成,其中 $B^T = [0, 1]$ 为控制输入作用位置向量.

2) 计算 \mathcal{H}_3 .

对于TORA系统而言, \mathcal{H}_2 子空间也可表达为

$$\mathcal{H}_2 = \text{span}_{\mathcal{K}}\left\{dq_1, dq_2, d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)\right\}.$$

任一属于 \mathcal{H}_3 的1-形式必然也属于 \mathcal{H}_2 , 故可表达为

$$\omega = \kappa_1 dq_1 + \kappa_2 dq_2 + \kappa_3 d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right).$$

结合拉格朗日方程计算其微分,可得

$$\dot{\omega} = \dot{\kappa}_1 dq_1 + \dot{\kappa}_2 dq_2 + \kappa_1 d\dot{q}_1 + \kappa_2 d\dot{q}_2 + \kappa_3 d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) \in \mathcal{H}_2.$$

对于TORA系统,有

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 \frac{\partial d_{11}}{\partial q_1} + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \frac{\partial d_{12}}{\partial q_1} + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 \frac{\partial d_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial V}{\partial q_1} = -Kq_1.$$

当选取 $\kappa_1 = \kappa_2 = 0, \kappa_3 = 1$ 时,可得

$$\omega = d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = d\left(d_{11}\left(\dot{q}_1 + \frac{d_{12}}{d_{11}}\dot{q}_2\right)\right) =$$

$$d(d_{11}\dot{\gamma}) \in \mathcal{H}_3, \quad (10)$$

其中 $\gamma = q_1 + \int \left(\frac{d_{12}}{d_{11}}\right) dq_2$.

当选取 $\kappa_1 = 1, \kappa_2 = d_{12}/d_{11}, \kappa_3 = 0$ 时, 可得

$$\omega = dq_1 + \frac{d_{12}}{d_{11}} dq_2 = d\gamma \in \mathcal{H}_3, \quad (11)$$

这样可计算出最终的 \mathcal{H}_3 为

$$\mathcal{H}_3 = \text{span}_{\mathcal{K}}\{d\gamma, d(d_{11}\dot{\gamma})\}. \quad (12)$$

3) 计算 \mathcal{H}_4 .

为 TORA 系统寻找相对阶为 4 的 1-形式, 如果存在这样的 1-形式, 其应满足

$$\begin{aligned} \nu &= \mu_1 d\gamma + \mu_2 d(d_{11}\dot{\gamma}) = \\ &\mu_1 d\gamma + \mu_2 d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) \in \mathcal{H}_3, \end{aligned}$$

且其微分应满足

$$\begin{aligned} \dot{\nu} &= \\ &\dot{\mu}_1 d\gamma + \dot{\mu}_2 d(d_{11}\dot{\gamma}) + \mu_1 d\dot{\gamma} + \mu_2 d\left(\frac{\partial L}{\partial q_1}\right) \in \mathcal{H}_3. \end{aligned}$$

选取 $\mu_1 = d_{11}$, 上式可整理为

$$\dot{\nu} = (1 + \dot{\mu}_2)d(d_{11}\dot{\gamma}) + \mu_2 d\left(\frac{\partial L}{\partial q_1}\right).$$

对于 TORA 系统而言, $d(\partial L/\partial q_1) = -d(Kq_1)$, 很明显 $\dot{\nu} \notin \mathcal{H}_3$, 因而对于 TORA 系统而言, 不能找到相对阶为 4 的 1-形式, 故 $\mathcal{H}_4 = 0$.

通过上面的计算可知, 为 TORA 系统反馈线性化设计的输出函数最大相对阶为 3, 此时系统存在一阶的内动态. 此最大反馈线性化的输出函数为

$$y = d_{11}\dot{\gamma} + \rho\gamma, \rho > 0. \quad (13)$$

3 镇定控制

3.1 极点配置

通过对输出函数 y 求 3 次导数可将 TORA 系统的数学模型表达为

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -K\left(\frac{\rho}{d_{11}}\dot{q}_1 + \ddot{q}_1\right) = \\ &-K\left(\frac{\rho}{d_{11}}\dot{q}_1 + f_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + b_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\tau\right), \quad (14) \end{aligned}$$

并具有内动态(13).

当 y 为零时, 系统零动态为

$$d_{11}\dot{\gamma} + \rho\gamma = 0.$$

γ 按指数收敛, 可知系统内动态稳定. 为式(13)、(14)描述的 TORA 系统设计控制器, 首先进行如下输入坐标变换完成反馈线性化:

$$\tau = -\frac{d_{11}u + K\rho\dot{q}_1 + Kd_{11}f_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{Kd_{11}b_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}. \quad (15)$$

可将 TORA 系统数学模型转换为具有稳定内动态的线性系统

$$\begin{cases} \ddot{y} = u, \\ y = d_{11}\dot{\gamma} + \rho\gamma, \end{cases} \quad (16)$$

其中 u 为虚拟控制输入.

为了使 TORA 系统稳定, 采用极点配置方法设计虚拟控制输入 u , 即

$$\ddot{y} = u = -k_0y - k_1\dot{y} - k_2\ddot{y}. \quad (17)$$

其中: k_0, k_1, k_2 为大于 0 的实数, 以保证闭环系统的极点具有负的实部, 使得 y 按指数收敛. 将 u 代入式(15)即可得到 TORA 系统实际的控制转矩.

3.2 稳定性分析

通过极点配置方法可使反馈线性化后的线性闭环系统具有负实部的极点, 从而保证虚拟输出的渐近稳定. 但是, 对于 TORA 系统而言, 往往关注的是 q_1 和 q_2 两个物理量的稳定性, 尤其是小车位移 q_1 的稳定性, 因此有必要对采用控制律(15)时 TORA 控制系统的稳定性进行分析. 关于 TORA 控制系统的稳定性有如下定理.

定理 1 考虑具有稳定平衡点的 TORA 欠驱动机械系统, 当选取虚拟输出 $y = d_{11}\dot{\gamma} + \rho\gamma$, 采用控制律(15)时, 如果满足 $\dot{q}_1 \in L_\infty$, 即 q_1 的时间导数是有界的, 则 TORA 系统的小车位移 q_1 及小球转角 q_2 都是渐近稳定的.

证明 为证明过程中表述方便, 将 γ 记为

$$\gamma = q_1 + \int \left(\frac{d_{12}}{d_{11}}\right) dq_2 = x + \beta z. \quad (18)$$

其中: $x = q_1, \beta = mr/(M+m), z = \sin q_2$.

1) 首先证明: $x \in L_\infty, \dot{x} \in L_\infty, z \in L_\infty, \dot{z} \in L_\infty$.

根据闭环系统(17)可计算出具有最大相对阶的输出 y 的表达式

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t}.$$

其中: $\lambda_i (i=1, 2, 3)$ 为闭环特征方程的根, 且满足 $\text{Re}(\lambda_i) < 0$; c_i 为积分常数.

通过求解非齐次微分方程(13)可得

$$\begin{aligned} \gamma &= c_4 e^{-\frac{\rho}{d_{11}}t} + e^{-\frac{\rho}{d_{11}}t} \int \frac{y}{d_{11}} e^{\frac{\rho}{d_{11}}t} dt = \\ &c_4 e^{-\frac{\rho}{d_{11}}t} + \\ &\frac{e^{-\frac{\rho}{d_{11}}t}}{d_{11}} \int (c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t}) e^{\frac{\rho}{d_{11}}t} dt = \\ &c_4 e^{-\frac{\rho}{d_{11}}t} + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{d_{11}} \left(\frac{c_1 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 + \rho/d_{11}} + \frac{c_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 + \rho/d_{11}} + \frac{c_3 e^{\lambda_3 t}}{\lambda_3 + \rho/d_{11}} \right), \tag{19}$$

故有

$$\sup_{t \geq 0} |\gamma| = \|\gamma\|_\infty < \infty, \quad \sup_{t \geq 0} |\dot{\gamma}| = \|\dot{\gamma}\|_\infty < \infty.$$

很明显,有

$$\sup_{t \geq 0} |z| = \sup_{t \geq 0} |\sin q_2| = \|z\|_\infty < \infty.$$

根据已知条件,有 $\dot{x} \in L_\infty$,再根据式(18)可得

$$\sup_{t \geq 0} |x| = \|x\|_\infty < \infty, \quad \sup_{t \geq 0} |\dot{z}| = \|\dot{z}\|_\infty < \infty,$$

从而得到

$$x \in L_\infty, \dot{x} \in L_\infty, z \in L_\infty, \dot{z} \in L_\infty.$$

2) 然后证明: $x \in L_2, z \in L_2$.

因为

$$\int_0^\infty z^2 dt = \int_0^\infty (\sin q_2)^2 dt = \int_0^\infty \frac{1 - \cos 2q_2}{2} dt < \infty,$$

故 $z \in L_2$ 很容易得到. 下面证明 $x \in L_2$.

通过调整 x, z 的系数,构建如下两个 γ 表达式:

$$\begin{cases} \gamma_1 = x + \beta z, \\ \gamma_2 = \alpha x + \beta z, \end{cases}$$

其中 α, β 为常值. 设定

$$0 < \int_0^\infty \gamma_2^2 dt < \int_0^\infty \gamma_1^2 dt < \infty,$$

两者作差可得

$$\begin{aligned} 0 < \int_0^\infty (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) dt &= \int_0^\infty ((1 - \alpha^2)x^2 + 2(1 - \alpha)x\beta z) dt = \\ \int_0^\infty ((1 - \alpha^2)x^2 + 2(1 - \alpha)x(\gamma_1 - x)) dt &= \int_0^\infty -(1 - \alpha)^2 x^2 dt + \int_0^\infty 2(1 - \alpha)x\gamma_1 dt < \infty. \end{aligned}$$

对式(19)进行积分,容易得到

$$\int_0^\infty \gamma_1 dt = \|\gamma_1\| < \infty,$$

故

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (1 - \alpha)^2 x^2 dt &< \int_0^\infty 2(1 - \alpha)x\gamma_1 dt < \\ 2 \int_0^\infty |(1 - \alpha)x\gamma_1| dt &\leq \\ 2|1 - \alpha| \int_0^\infty \|x\|_\infty |\gamma_1| dt &= \\ 2|1 - \alpha| \|x\|_\infty \|\gamma_1\|_1 &< \infty, \end{aligned}$$

从而可得

$$\int_0^\infty x^2 dt < \infty, \text{ 即 } x \in L_2.$$

综上可得 $x \in L_2, \dot{x} \in L_\infty, z \in L_2, \dot{z} \in L_\infty$.

再根据 Barbalat 引理^[27] 即可得到系统的稳定性结论,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z = 0.$$

当 z 稳定时,意味着转角 q_2 也将稳定在平衡位置处 ($q_2 = \pm n\pi, n = 0, 1, \dots$). \square

3.3 梯度动力学方法

应用最大反馈线性化和极点配置为TORA设计的控制转矩如式(15)所示,其中包含了 $f_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 和 $b_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$,将其代入控制转矩最终形式为

$$\begin{aligned} \tau = \frac{(mr^2 + J)}{mrK \cos q_2} &\left((M + m)u + (M + m)K \frac{\rho}{d_{11}} \dot{q}_1 + \right. \\ &mrK \dot{q}_2^2 \sin q_2 - K^2 q_1 \left. \right) - \\ &mr \left(\frac{\rho}{d_{11}} \dot{q}_1 + \frac{u}{K} \right) \cos q_2. \end{aligned} \tag{20}$$

可发现在控制转矩第1项分母中存在 $\cos q_2$,故当 $q_2 = \pm \frac{2n+1}{2}\pi (n = 0, 1, \dots)$ 时,控制律存在零除,即奇异值问题,使得控制器难以通过奇异值点实现预期的控制目标.

这里采用梯度动力学方法^[28] 来克服控制律中的奇异值问题,具体步骤如下.

Step 1: 通过将控制律(20)两侧同时乘以 $\cos q_2$,然后做差,定义一个新的函数

$$\begin{aligned} g(t) := \tau \cos q_2 - \frac{(mr^2 + J)}{mrK} &((M + m)u + \\ (M + m)K \dot{q}_1 \rho / d_{11} + mrK \dot{q}_2^2 \sin q_2 - & \\ K^2 q_1) + mr(\dot{q}_1 \rho / d_{11} + u / K) \cos^2 q_2. \end{aligned} \tag{21}$$

当 $g(t) = 0$ 时,控制律(20)成立,梯度动力学方法的思路就是通过设计动态使 $g(t)$ 逐渐为零,同时避免零除的问题.

Step 2: 设计类能量函数

$$\varepsilon(t) = g^2(t)/2.$$

需要注意的是,当且只当 $g(t) = 0$ 时, $\varepsilon(t)$ 取得最小值. 将 $\varepsilon(t)$ 视为关于控制转矩 τ 的函数,通过设计如下动态,使 τ 沿 $\varepsilon(t)$ 关于 τ 的负梯度方向调整,保证 $\varepsilon(t)$ 最终可以达到最小值点:

$$\dot{\tau} = -\eta \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial \tau}. \tag{22}$$

其中: η 为大于0的实数,可以调节 $\varepsilon(t)$ 向最小值点收敛的快慢. 为提高收敛速度,在控制力输出装置允许的范围内, η 可设计得尽可能大.

由式(22)可知,经过梯度动力学方法调整后的控

制转矩可由微分动态的形式表示出来,即

$$\dot{\tau} = -\eta \frac{\partial g(t)}{\partial \tau} g(t) = -\eta \cos q_2 g(t). \quad (23)$$

4 数值分析

下面通过仿真实验分析本文设计方案的控制效果. TORA系统参数如表1所示. 控制器参数选取如下: $\rho = 138.8, k_0 = 24.2, k_1 = 38.28, k_2 = 3.18, \eta = 50$. 仿真实验结果如图2~图4所示.

表1 TORA系统参数

项目	数值	单位
M	10.235	kg
m	1.02	kg
r	0.2	m
J	0.001	kg·m ²
K	294.87	N/m

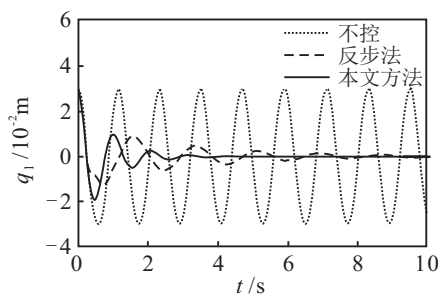


图2 控制前后小车位移对比

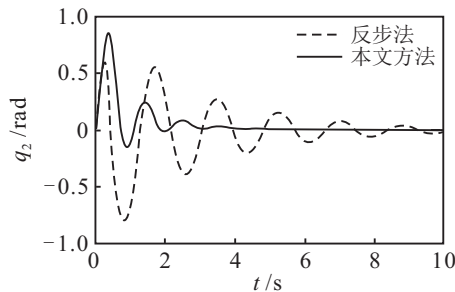


图3 施控时小球转角

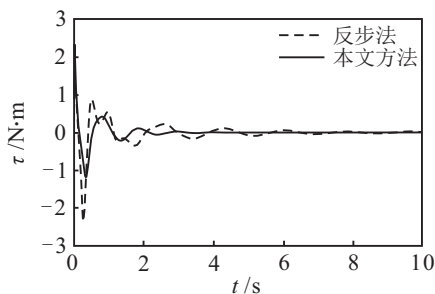


图4 控制转矩

在仿真中,小车初始位移 $q_1(0) = 0.03$ m, 小车初始转角 $q_2(0) = 0$ rad. 由图2和图3可以看出,本文所提出的基于最大反馈线性化的镇定控制器可使系统状态 q_1, q_2 均达到稳定状态. 将该方案的控制效果与经典的反步法^[7]进行比较. 为了定量分析,此处引入调节时间 t_s 的概念,将其定义为结构位移由初始衰减

为初始位移10%所需的时间,用来描述控制系统到达稳定状态的快慢.

基于经典反步法设计的TORA控制系统的调节时间 $t_s = 4.41$ s, 本文提出的控制方案可使TORA系统调节时间加快到 $t_s = 1.73$ s. 图2直观地展现了两种算法在快速性上的差异. 此外,由图4可以看出,基于最大反馈线性化的稳定控制方案在保证控制效果的同时,相较于反步法,所需的控制转矩也较小,即系统控制代价更小,对于控制系统出力装置的要求也更低.

综上所述,本文所提出的TORA系统镇定控制方案,通过最大反馈线性化将原系统转化为带有稳定内动态的线性系统,从而可采用线性控制算法为系统设计控制器,极大地方便了控制系统的设计和控制器参数的调节. 另外,与传统反步法相比,本文方法在控制快速性、控制系统效率方面具有优势.

5 结论

本文提出了一种基于最大反馈线性化的TORA系统非奇异镇定控制方案. 通过最大反馈线性化将TORA系统转化为带有稳定内动态的三阶线性系统,并采用极点配置算法设计了控制器,通过理论分析证明了控制系统的稳定性,利用梯度动力学方法解决了控制律的零除问题,通过仿真实验验证了所提控制算法的有效性. 作为控制方案的关键部分,最大反馈线性化消除了系统的强非线性,使得传统TORA系统控制器设计中存在的难点得到了化解. 系统模型的线性化为线性控制算法的应用奠定了基础,使得控制器设计过程变得简单,控制器参数调整也更加容易. 另外,融合了梯度动力学方法的非奇异控制律保证了TORA控制系统的全局稳定性.

参考文献(References)

- [1] Olfati-Saber R. Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles[D]. Boston: Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology, 2000.
- [2] 高丙团,陈宏钧,张晓华. 一类欠驱动机械系统的非线性控制[J]. 控制与决策, 2006, 21(1): 104-106.
(Gao B T, Chen H J, Zhang X H. Nonlinear control for a class of underactuated mechanical systems[J]. Control and Decision, 2006, 21(1): 104-106.)
- [3] 程红太, 张晓华. 基于虚约束的Acrobot动态伺服控制统一设计方法[J]. 控制与决策, 2012, 27(6): 923-928.
(Cheng H T, Zhang X H. Virtual constraints based general design method for dynamical servo control problem for Acrobot[J]. Control and Decision, 2012, 27(6): 923-928.)

- [4] Sun N, Fang Y, Zhang X. Energy coupling output feedback control of 4-DOF underactuated cranes with saturated inputs[J]. *Automatica*, 2013, 49(5): 1318-1325.
- [5] Robert T B, Dennis S B, Vincent T C. A benchmark problem for nonlinear control design[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 1998, 8(4): 307-310.
- [6] Panagiotis T, Martin C, Mario A R. An L_2 disturbance attenuation solution to the nonlinear benchmark problem[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 1998, 8(4): 311-330.
- [7] 高丙团, 贾智勇, 陈宏钧, 等. TORA 的动力学建模与 Back-stepping 控制[J]. *控制与决策*, 2007, 22(11): 1284-1288.
(Gao B T, Jia Z Y, Chen H J, et al. Dynamical modeling and backstepping control of TORA[J]. *Control and Decision*, 2007, 22(11): 1284-1288.)
- [8] Spong M W. Partial feedback linearization of underactuated mechanical systems[C]. *IEEE Int Conf on Intelligent Robots and Systems*. Munich: IEEE, 1994: 314-321.
- [9] Xu L, Hu Q. Output-feedback stabilisation control for a class of under-actuated mechanical systems[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2013, 7(7): 985-996.
- [10] Tadmor G. Dissipative design, lossless dynamics, and the nonlinear TORA benchmark example[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 2001, 9(2): 391-398.
- [11] 高丙团. TORA 的动力学建模及基于能量的控制设计[J]. *自动化学报*, 2008, 34(9): 1221-1224.
(Gao B T. Dynamical modeling and energy-based control design for TORA[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(9): 1221-1224.)
- [12] Gao B, Bao Y, Xie J, et al. Passivity-based control of two-dimensional translational oscillator with rotational actuator[J]. *Trans of the Institute of Measurement and Control*, 2014, 36(1): 111-118.
- [13] 武宪青, 欧县华, 何熊熊. 增强耦合的TORA系统镇定控制方法设计[J]. *控制与决策*, 2015, 30(6): 1039-1043.
(Wu X J, Ou X H, He X X. Enhanced coupling stabilization controller design for TORA systems[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(6): 1039-1043.)
- [14] Jiang Z P, Kanellakopoulos I. Global outputfeedback tracking for a benchmark nonlinear system[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(5): 1023-1027.
- [15] Karagiannis D, Jiang Z P, Ortega R, et al. Output-feedback stabilization of a class of uncertain non-minimum-phase nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2005, 41(9): 1609-1615.
- [16] Xu R, Özgüner Ü. Sliding mode control of a class of underactuated systems[J]. *Automatica*, 2008, 44(1): 233-241.
- [17] Mobayen S. A novel global sliding mode control based on exponential reaching law for a class of underactuated systems with external disturbances[J]. *J of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2016, 11(2): 1-9.
- [18] Lee C H, Chang S K. Experimental implementation of nonlinear TORA system and adaptive backstepping controller design[J]. *Neural Computing and Applications*, 2012, 21(4): 785-800.
- [19] Tar J K, Várkonyi T A, Kovács L, et al. Robust fixed point transformation based design for model reference adaptive control of a modified TORA system[C]. *IEEE/RSJ Int Conf on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. Chicago: IEEE, 2014: 123-128.
- [20] Gao B, Ye F. Fuzzy Lyapunov synthesis control of an underactuated 2DTORA system[J]. *J of Intelligent and Fuzzy Systems*, 2015, 28(2): 581-589.
- [21] Quan Q, Cai K Y. Repetitive control for TORA benchmark: An additive state decomposition based approach[J]. *Int J of Automation and Computing*, 2015, 12(3): 289-296.
- [22] Marino R. On the largest feedback linearizable subsystem[J]. *Systems and Control Letters*, 1986, 6(5): 345-351.
- [23] Maalouf D, Moog C H, Aoustin Y, et al. Maximum feedback linearization with internal stability of 2-DOF underactuated mechanical systems[C]. *Int Federation of Automatic Control World Congress*. Milano: IFAC, 2011: 8132-8137.
- [24] Zikmund J, Moog C H. The structure of 2-bodies mechanical systems[C]. *IEEE Conf on Decision and Control*. San Diego: IEEE, 2006: 6454-6459.
- [25] Nasrallah D S, Angeles J, Michalska H. The largest feedback-linearizable subsystem of a class of wheeled robots moving on an inclined plane[C]. *Proc of 16th Cism-Iftomm Symposium on Robot Design, Dynamics and Control*. Warsaw: IEEE, 2006: 205-212.
- [26] Conte G, Moog C H, Perdon A M. Algebraic methods for nonlinear control systems[M]. Berlin: Springer Science and Business Media, 2007.
- [27] Khalil H K. Nonlinear systems[M]. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2002: 126-133.
- [28] Zhang Y, Yi C, Guo D, et al. Comparison on Zhang neural dynamics and gradient-based neural dynamics for online solution of nonlinear time-varying equation[J]. *Neural Computing and Applications*, 2011, 20(1): 1-7.

(责任编辑: 闫妍)