文章编号: 1001-0920(2018)08-1471-10 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2017.0532

基于同构Frank t-模与s-模的勾股模糊Frank集结算子及其应用

杨 艺[1,2], 李延来[1†], 丁 恒[1], 钱桂生[1,2], 吕红霞[1]

(1. 西南交通大学 交通运输与物流学院，成都 610031；2. 香港城市大学 系统工程与工程管理系，香港 999077)

摘 要: 运用单位区间上的自同构构造一种适用于勾股模糊环境下的同构Frank t-模与其对偶s-模, 进而定义勾股模糊集的广义运算法则, 并探究新法则的相关性质. 应用新的运算法则提出勾股模糊Frank加权平均(PFFWA)算子与勾股模糊Frank加权几何(PFFWG)算子, 证明算子的相关性质. 利用PFFWA与PFFWG算子提出一种解决勾股模糊多属性决策问题的新方法. 通过解决航空公司服务质量评估问题, 对比分析新方法与现存的决策方法, 进而表明新方法的可行性和灵活性, 并验证了新方法具有反馈决策者态度特征的能力.

关键词: 勾股模糊数；Frank t-模与s-模；PFFWA算子；PFFWG算子

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

The pythagorean fuzzy Frank aggregation operators based on isomorphism Frank t-norm and s-norm and their application

YANG Yi[1,2], *LI Yan-lai*[1†], *DING Heng*[1], *QIAN Gui-sheng*[1,2], *LYU Hong-xia*[1]

(1. School of Transportation and Logistics，Southwest Jiaotong University，Chengdu 610031，China；2. Department of Systems Engineering and Engineering Management，City University of Hong Kong，Hong Kong 999077，China)

Abstract: Based on the automorphism on the unit interval, an isomorphism Frank t-norm and its dual s-norm are created, which are applicable to Pythagorean fuzzy environment, and the generalized operational laws with respect to pythagorean fuzzy set(PFS) are defined and some properties of these laws are also investigated. Then, the Pythagorean fuzzy Frank weighted averaging(PFFWA) operator and Pythagorean fuzzy Frank weighted geometric(PFFWG) operator are proposed by using the new operational laws. Some desirable properties of these operators are proved. A new approach to solve the Pythagorean fuzzy multiple attribute decision making problem is developed by using the PFFWA and PFFWG operators. By solving the problem of airline service quality assessment, the proposed method is compared with existing methods. The analysis results demonstrate the feasibility and flexibility of the proposed method, and verify its ability to feedback the attitude of the decision maker.

Keywords: pythagorean fuzzy number；Frank t-norm and s-norm；PFFWA operator；PFFWG operator

0 引 言

经典的模糊集(Fuzzy set, FS)[1]用隶属度刻画元素归属于集合的模糊程度. 作为模糊集的拓展, 直觉模糊集(Intuitionistic fuzzy set, IFS)[2]同时考虑了隶属度μ和非隶属度v两方面信息, 且满足条件$\mu + v \leqslant 1$. IFS能更加直观地描述决策者对事物的不确定性, 且在多属性决策(MADM)问题中得到了广泛的应用[3-8]. 文献[9-10]在分析MADM的实际案例时考虑如下情形: 属性评价值的隶属度与非隶属度之和大于1, 隶属度与非隶属度的平方和小于1. 然而, 由IFS的约束条件可知, IFS并不适用于上述情形. 为此, Yager等[9-10]提出了勾股模糊集(Pythagorean fuzzy set, PFS), PFS的隶属度与非隶属度的约束条件为$\mu^2 + v^2 \leqslant 1$, 其适用于上述情形. Yager[10]进一步揭露了任意的IFS皆为PFS. 从几何的角度上看, 直觉模糊集拓展到勾股模糊集的过程即为三角形约束区域扩大到四分之圆约束区域. 因此, 在实际决策问题中, 勾股模糊集为评价者提供了更灵活的评价尺度和工具, 使其不再局限于提供隶属度和非隶属度之和小于1的评价值, 进而增强了处理多属性决策问题

收稿日期: 2017-05-01；**修回日期:** 2017-08-23.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71373222, 71371156)；西南交通大学拔尖人才培育项目(A0520502051601-6).

作者简介: 杨艺(1990−), 男, 博士生, 从事模糊决策的研究；李延来(1971−), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能控制与应用等研究.

†通讯作者. E-mail: yanlaili@home.swjtu.edu.cn

的能力. 现存的文献研究表明了勾股模糊集备受关注,且能够有效地解决多属性决策问题[11-22]. Zhang等[11] 构建了拓展的勾股模糊TOPSIS决策方法,并将其应用于勾股模糊信息环境下的决策问题中. Peng等[12] 基于勾股模糊集的运算法则提出了勾股模糊集结算子,并将其应用于股票投资的决策问题中. 针对专家权重未知的勾股模糊群决策问题, Zhang[13] 利用所提出的相似测度获取专家权重,进而解决选择最优光伏电池的实际问题. 刘卫锋等[15-16] 提出广义勾股模糊加权集结算子与交叉勾股集结算子,将所提出集结算子应用于国内航空公司服务质量评估的多属性决策问题中. 李德清等[17] 通过分析勾股模糊集的结构特点提出勾股模糊集的距离测度,借助TOPSIS方法建立了基于所提出距离测度的决策方法,并利用该方法处理投资选择问题. Ma等[18] 提出了对称勾股模糊加权集结算子,并将其应用于航空公司服务质量评估问题中. Ren等[19] 提出了拓展的勾股模糊TODIM决策方法,并将其应用于亚洲基础设施投资银行选择投资对象的实际决策问题中. 彭新东等[20] 将语义集拓展到勾股模糊语义集,并将其应用于软件开发项目评价的决策问题中. Peng等[21] 构建出拓展的勾股模糊MABAC方法,并将其应用于项目投资选择问题中.

模糊集的运算规则(Operationallaws)在模糊集理论的发展过程中扮演着重要角色,对于勾股模糊集而言,其基本运算规则的研究相对甚少[11,18,22],尤其是广义的运算规则. 值得注意的是, Frank t-模和s-模[23]作为定义运算规则的重要工具,因其能在特定条件下退化成Lukasiewicz t-模和s-模以及Algebraic t-模和s-模,而被应用于定义各类模糊集的运算规则,如直觉模糊集[24]、区间直觉模糊集[25]、犹豫模糊集[26]、区间直觉语义集[27]、三角区间二型模糊集[28]. 基于Frank t-模和s-模定义的运算规则较为广义,决策者可以根据参数的不同取值获取不同的运算规则,因此能够更灵活地处理决策问题. 然而,经过实例分析,若直接利用Frank t-模和s-模定义勾股模糊集的运算规则,则会导致运算规则不满足封闭性. 为此,经过剖析直觉模糊集和勾股模糊集之间的关系,本文挖掘出单位区间内的一个自同构,然后利用该自同构构造出适用于勾股模糊集的一种同构Frank t-模与其对偶s-模,进而定义勾股模糊集的广义运算规则,并研究新运算规则的特殊形式和基本性质.

集结算子在多属性决策过程中发挥着重要作用. 决策者利用集结算子将多个评价信息融合成单一的综合评价值后,再利用评价值的排序方法对综合值进行排序,进而获取备选方案的排序,选择出符合要求的最优方案. 针对勾股模糊环境下MADM的多个评价信息的集结问题,本文将基于同构Frank t-模和s-模定义的运算规则提出勾股模糊Frank加权平均(PFFWA)算子和勾股模糊Frank加权平均(PFFWG)算子,探讨其特殊形式和基本性质,并提出一种基于PFFWA和PFFWG算子的勾股模糊环境下的多属性决策方法. 在部分勾股模糊环境下的多属性决策问题中,不同决策者的心理特征并不统一,其乐观性和悲观性并非一成不变. 面对此种情形,单一固定的算子并不适用,而具有反馈决策者心理特征能力的广义集结算子显得尤为重要. 本文所提出带参数的Frank算子是基于勾股模糊Frank运算定义的,在特定条件下可以退化现存的部分算子,且具备广义性和灵活性. 利用所提出决策方法对航空公司的服务质量进行评定和择优,以验证Frank算子的这些性质,并深入分析算子中参数对于评估过程的影响,利用参数刻画决策者的心理特征. 为了进一步表明该方法的可信性和优点,将现存的决策方法与所提出方法进行对比分析.

1 预备知识

1.1 勾股模糊集的相关概念

给出直觉模糊集与勾股模糊集的相关定义.

定义1[2] 设$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$为给定的集合,则$X$上的直觉模糊集$I$定义为

$$I = \{\langle x_i, \mu_I(x_i), v_I(x_i)\rangle | x_i \in X\},$$

其中$\mu_I(x_i)$和$v_I(x_i)$分别为元素x_i属于集合I的隶属度和非隶属度. 二元组$(\mu_I(x_i), v_I(x_i))$称为直觉模糊数(IFN),为了方便,直觉模糊数简记为$\beta = (\mu_I, v_I)$,其中$\mu_I, v_I \in [0,1]$, $\mu_I + v_I \leqslant 1$.

定义2[9-10] 设$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$为给定的集合,则$X$上的勾股模糊集$P$定义为

$$P = \{\langle x_i, \mu_P(x_i), v_P(x_i)\rangle | x_i \in X\},$$

其中$\mu_P(x_i)$和$v_P(x_i)$分别为元素x_i属于集合P的隶属度和非隶属度. 二元组$(\mu_P(x_i), v_P(x_i))$称为勾股模糊数(PFN),为了方便,勾股模糊数简记为$\alpha = (\mu_P, v_P)$,其中$\mu_P, v_P \in [0,1]$, $\mu_P^2 + v_P^2 \leqslant 1$.

设$\alpha = (\mu, v)$, $\alpha_1 = (\mu_1, v_1)$和$\alpha_2 = (\mu_2, v_2)$为3个勾股模糊数, Yager等[9-10] 定义了如下基本运算:

1) $\alpha_1 \bigcup \alpha_2 = (\max\{\mu_1, \mu_2\}, \min\{v_1, v_2\})$;

2) $\alpha_1 \bigcap \alpha_2 = (\min\{\mu_1, \mu_2\}, \max\{v_1, v_2\})$;

3) $\alpha^c = (v, \mu)$.

进一步地,勾股模糊数之间的自然偏序关系定义如下:若$\mu_1 \leqslant \mu_2, v_1 \geqslant v_2$,则称$\alpha_1 \leqslant \alpha_2$. 易知若$\alpha_1 \leqslant \alpha_2$,则$\alpha_2^c \leqslant \alpha_1^c$.

定义3[12]　设$\alpha_i = (\mu_i, v_i)(i = 1, 2)$为两个勾股模糊数,有: 1) 若$s(\alpha_1) < s(\alpha_2)$,则$\alpha_1 \prec \alpha_2$; 2) 若$s(\alpha_1) = s(\alpha_2), h(\alpha_1) < h(\alpha_2)$,则$\alpha_1 \prec \alpha_2$; 3) 若$s(\alpha_1) = s(\alpha_2), h(\alpha_1) = h(\alpha_2)$,则$\alpha_1 \sim \alpha_2$. 其中$s(\alpha_i) = \mu_i^2 - v_i^2$和$h(\alpha_i) = \mu_i^2 + v_i^2$分别为$\alpha_i(i = 1, 2)$的记分函数[11]和精确度函数[12].

由定义3易知,若$\alpha_1 \leqslant \alpha_2$,则$\alpha_1 \prec \alpha_2$或$\alpha_1 = \alpha_2$.

1.2　Frank s-模与t-模

定义4[29]　设$\varphi : [a, b] \to [a, b]$,若$\varphi$是严格递增的连续函数,且满足$\varphi(a) = a, \varphi(b) = b$,则称$\varphi$是$[a, b]$上的自同构.

定义5[29]　设$N : [0, 1] \to [0, 1]$,若N单调减,且$N(0) = 1, N(1) = 0$,则称N为否定函数. 若否定函数N严格递减且连续,则称N为严格否定函数. 若严格否定函数N满足复原性质$\forall x \in [0, 1], N(N(x)) = x$,则称$N$为强否定函数.

若强否定函数$N(x) = 1 - x$,则称为标准否定函数,简记为N_I. 若强否定函数为$N(x) = \sqrt{1 - x^2}$,则称为勾股否定函数[9-10],简记为N_P.

定理1[30]　N为强否定函数当且仅当存在自同构$\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$,使得$\forall x \in [0, 1], N(x) = \varphi^{-1}(N_I(\varphi(x)))$,其中$N_I$为标准否定函数.

定理1表明,任意的强否定函数都可以通过单位区间上的自同构构建.

定义6[29]　若$T : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$满足: 1) 对称性:$\forall x, y \in [0, 1]$, $T(x, y) = T(y, x)$; 2) 单调性:$\forall x_1 \leqslant x_2, y_1 \leqslant y_2, T(x_1, y_1) \leqslant T(x_2, y_2)$; 3) 结合律:$\forall x, y, z \in [0, 1]$, $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$; 4) 边界条件:$\forall x \in [0, 1], T(x, 1) = x$. 则称$T$为$t$-模.

定义7[29]　若$S : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$满足: 1) 对称性:$\forall x, y \in [0, 1], S(x, y) = S(y, x)$; 2) 单调性:$\forall x_1 \leqslant x_2, y_1 \leqslant y_2, S(x_1, y_1) \leqslant S(x_2, y_2)$; 3) 结合律:$\forall x, y, z \in [0, 1], S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$; 4) 边界条件:$\forall x \in [0, 1], S(x, 0) = 0$. 则称$S$为$s$-模($t$-余模).

George等[31]提出了对偶三元组的概念(T, S, N),即T和S关于N对偶,将这样的三元组称为对偶三元组.

定义8[31]　设T和S分别为t-模和s-模,T和S关于否定函数N对偶当且仅当

$$T(x, y) = N(S(N(x), N(y))),$$
$$S(x, y) = N(T(N(x), N(y))).$$

Frank[23]提出了Frank t-模和s-模,定义为

$$T_F(x, y) = h_F^{-1}(h_F(x) + h_F(y)) = \log_\tau\Big(1 + \frac{(\tau^x - 1)(\tau^y - 1)}{\tau - 1}\Big), \tag{1}$$

$$S_F(x, y) = g_F^{-1}(g_F(x) + g_F(y)) = 1 - \log_\tau\Big(1 + \frac{(\tau^{1-x} - 1)(\tau^{1-y} - 1)}{\tau - 1}\Big). \tag{2}$$

其中:$\tau \in (1, \infty)$,标准否定函数$N_I(x) = 1 - x, h_F(x) = \log((\tau - 1)/(\tau^x - 1))$为连续严格递减函数,$g_F(x) = h_F(N_I(x))$为连续严格递增函数,$h_F$和$g_F$分别为Frank t-模和s-模的生成元. 显然,Frank t-模和Frank s-模S_F关于N_I对偶. 根据定义9,称(T_F, S_F, N_I)为Frank对偶三元组.

特别地,当$\tau \to 1$时,Frank t-模退化为Algebraic t-模$T(x, y) = xy$,Frank s-模退化为Algebraic s-模$S(x, y) = x + y - xy$.

2　勾股模糊集的广义运算法则

虽然Frank t-模和s-模已成功应用于定义直觉模糊集的运算规则,但经实例分析其并不适用于勾股模糊集. 为此,本文基于标准否定函数与勾股否定函数分析了直觉模糊集与勾股模糊集之间的关系,确定了单位区间内的一个自同构,进而利用该自同构构造出适用于勾股模糊集的一种同构Frank t-模与其对偶s-模,并定义了勾股模糊集的广义运算规则.

2.1　一种同构Frank t-模与其对偶s-模

例1　设$\alpha_1 = (0.6, 0.8)$和$\alpha_2 = (0.8, 0.6)$为两个勾股模糊数. 若利用Frank t-模与s-模定义勾股模糊数的加法运算,则有

$$\alpha_1 \oplus_F \alpha_2 = (S_F(\mu_1, \mu_2), T_F(v_1, v_2)).$$

因此,当$\tau = 2$时,有$\alpha_1 \oplus_F \alpha_2 = (0.933, 0.467)$. 显然,$(0.933)^2 + (0.467)^2 > 1$,因此$\alpha_1 \oplus_F \alpha_2$不是勾股模糊数,即该运算规则不满足封闭性.

例1表明,基于Frank t-模与s-模定义的勾股模糊集的运算规则不满足封闭性,因此Frank t-模与s-模不适用于勾股模糊集.

下面引入单位区间上的一个自同构构造出适用于勾股模糊集的一种同构Frank t-模与其对偶s-模,在此之前,回顾同构t-模与s-模的基本定义.

定义9[29]　设T是一个t-模,φ是$[0, 1]$上的一个自同构,若函数T_φ为映射$T_\varphi : [0, 1]^2 \to [0, 1]$,且满足

$$T_\varphi(x, y) = \varphi^{-1}(T(\varphi(x), \varphi(y))), \tag{3}$$

则T_φ仍为t-模,并称T_φ为T的同构t-模.

定义10[29]　设S是一个s-模,φ是$[0, 1]$上的一个自同构,若函数S_φ为映射$S_\varphi : [0, 1]^2 \to [0, 1]$,且满足

$$S_\varphi(x,y)=\varphi^{-1}(S(\varphi(x),\varphi(y))), \tag{4}$$

则T_φ仍为s-模,并称S_φ为S的同构t-模.

下面基于标准否定函数N_I与勾股否定函数N_P对直觉模糊数和勾股模糊数之间的关系进行探讨. 设$I=(\mu_I,v_I)$为直觉模糊数,其约束条件$\mu_I+v_I\leqslant 1$可以等价为$\mu_I\leqslant N_I(\nu_I)$. 对于勾股模糊数$P=(\mu_P,v_P)$,其约束条件$(\mu_P)^2+(v_P)^2\leqslant 1$可以等价为$\mu_P\leqslant N_P(\nu_P)$. 由定理1可得,勾股否定函数可通过标准否定函数和$[0,1]$上的自同构$\varphi(x)=x^2$构造,即$N_P(x)=\varphi^{-1}(N_I(\varphi(x)))$.

注1 下文中符号φ均视作为自同构$\varphi(x)=x^2$.

基于自同构$\varphi(x)=x^2$提出一个新的对偶三元组$(T_{F,\varphi},S_{F,\varphi},N_P)$,$T_{F,\varphi}$为同构Frank t-模,$S_{F,\varphi}$为同构Frank s-模,下面给出相关定义.

定义11 若$T_{F,\varphi}:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$,且满足

$$T_{F,\varphi}(x,y)=\varphi^{-1}(T_F(\varphi(x),\varphi(y))), \tag{5}$$

则称$T_{F,\varphi}$为Frank t-模T_F的同构t-模,简称同构Frank t-模,其中$\varphi(x)=x^2$为$[0,1]$上的自同构.

根据定义11和式(1),可得

$$T_{F,\varphi}(x,y)=h^{-1}_{F,\varphi}(h_{F,\varphi}(x)+h_{F,\varphi}(y))=\\ \sqrt{\log_\tau\Big(1+\frac{(\tau^{x^2}-1)(\tau^{y^2}-1)}{\tau-1}\Big)}, \tag{6}$$

其中$h_{F,\varphi}(t)=h_F(\varphi(t))$为$T_{F,\varphi}$的生成元.

定义12 若$S_{F,\varphi}:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$,且满足

$$S_{F,\varphi}(x,y)=\varphi^{-1}(S_F(\varphi(x),\varphi(y))), \tag{7}$$

则称$S_{F,\varphi}$为Frank s-模S_F的同构s-模,简称同构Frank s-模,其中$\varphi(x)=x^2$为$[0,1]$上的自同构.

根据定义12和式(2),可得

$$S_{F,\varphi}(x,y)=g^{-1}_{F,\varphi}(g_{F,\varphi}(x)+g_{F,\varphi}(y))=\\ \sqrt{1-\log_\tau\Big(1+\frac{(\tau^{1-x^2}-1)(\tau^{1-y^2}-1)}{\tau-1}\Big)}, \tag{8}$$

其中$g_{F,\varphi}(t)=g_F(\varphi(t))$为$S_{F,\varphi}$的生成元.

定理2 设$T_{F,\varphi}$和$S_{F,\varphi}$分别为定义11和定义12所给的同构Frank t-模和同构Frank s-模,则有: 1) $T_{F,\varphi}(x,y)=N_P(S_{F,\varphi}(N_P(x),N_P(y)))$; 2) $S_{F,\varphi}(x,y)=N_P(T_{F,\varphi}(N_P(x),N_P(y)))$. 其中$N_P(t)=\sqrt{1-t^2}$为勾股否定函数.

证明 该定理只需证明1)即可,类似可以证明2). 根据定义12,有

$$S_{F,\varphi}(x,y)=\varphi^{-1}(S_F(\varphi(x),\varphi(y))),\\ N_P(x)=\varphi^{-1}(N_I(\varphi(x))).$$

进而有

$$S_{F,\varphi}(N_P(x),N_P(y))=\\ \varphi^{-1}(S_F(\varphi(N_P(x)),\varphi(N_P(y))))=\\ \varphi^{-1}(S_F(\varphi(\varphi^{-1}(N_I(\varphi(x)))),\varphi(\varphi^{-1}(N_I(\varphi(y))))))=\\ \varphi^{-1}(S_F(N_I(\varphi(x)),N_I(\varphi(y)))).$$

因此

$$N_P(S_{F,\varphi}(N_P(x),N_P(y)))=\\ \varphi^{-1}(N_I(\varphi(\varphi^{-1}(S_F(N_I(\varphi(x)),N_I(\varphi(y)))))))=\\ \varphi^{-1}(N_I(S_F(N_I(\varphi(x)),N_I(\varphi(y)))))=\\ \varphi^{-1}(T_F(\varphi(x),\varphi(y)))=T_{F,\varphi}(x,y).\qquad\square$$

根据定理2和定义8可得,$T_{F,\varphi}$和$S_{F,\varphi}$关于勾股否定函数N_P对偶,因此$(T_{H,\varphi},S_{H,\varphi},N_P)$仍为对偶三元组,将其称为同构Frank对偶三元组.

Frank对偶三元组(T_F,S_F,N_I)与同构Frank对偶三元组$(T_{F,\varphi},S_{F,\varphi},N_P)$之间的关系体现为:

1) $T_{F,\varphi}(x,y)=\varphi^{-1}(T_F(\varphi(x),\varphi(y)))$;

2) $S_{F,\varphi}(x,y)=\varphi^{-1}(S_F(\varphi(x),\varphi(y)))$;

3) $N_P(x)=\varphi^{-1}(N_I(\varphi(x)))$.

上述三元组的特点在于$T_{F,\varphi}$、$S_{F,\varphi}$和N_P皆基于自同构$\varphi(x)=x^2$构造.

2.2 勾股模糊集的广义运算法则

定义13 设$\alpha_i=(\mu_i,v_i)(i=1,2)$为两个勾股模糊数,$\tau\in(1,\infty)$,$\lambda>0$. 基于同构Frank对偶三元组$(T_{H,\varphi},S_{H,\varphi},N_P)$的勾股模糊集的运算规则定义为:

1) $\alpha_1\oplus_{FI}\alpha_2=(S_{F,\varphi}(\mu_1,\mu_2),T_{F,\varphi}(v_1,v_2))=$

$$\Big(\sqrt{1-\log_\tau\Big(1+\frac{(\tau^{1-\mu_1^2}-1)(\tau^{1-\mu_2^2}-1)}{\tau-1}\Big)},\\ \sqrt{\log_\tau\Big(1+\frac{(\tau^{v_1^2}-1)(\tau^{v_2^2}-1)}{\tau-1}\Big)}\Big),$$

2) $\alpha_1\otimes_{FI}\alpha_2=(T_{F,\varphi}(\mu_1,\mu_2),S_{F,\varphi}(v_1,v_2))=$

$$\Big(\sqrt{\log_\tau\Big(1+\frac{(\tau^{\mu_1^2}-1)(\tau^{\mu_2^2}-1)}{\tau-1}\Big)},\\ \sqrt{1-\log_\tau\Big(1+\frac{(\tau^{1-v_1^2}-1)(\tau^{1-v_2^2}-1)}{\tau-1}\Big)}\Big),$$

3) $\lambda\alpha_1=(g^{-1}_{F,\varphi}(\lambda g_{F,\varphi}(\mu_1)),h^{-1}_{F,\varphi}(\lambda h_{F,\varphi}(v_1)))=$

$$(\sqrt{1-\log_\tau(1+(\tau^{1-\mu_1^2}-1)^\lambda/(\tau-1)^{\lambda-1}}),\\ \sqrt{\log_\tau(1+(\tau^{v_1^2}-1)^\lambda/(\tau-1)^{\lambda-1}}\ ),$$

4) $\alpha_1^\lambda=(h^{-1}_{F,\varphi}(\lambda h_{F,\varphi}(\mu_1)),g^{-1}_{F,\varphi}(\lambda g_{F,\varphi}(v_1)))=$

$$(\sqrt{\log_\tau(1+(\tau^{\mu_1^2}-1)^\lambda/(\tau-1)^{\lambda-1}}),\\ \sqrt{1-\log_\tau(1+(\tau^{1-v_1^2}-1)^\lambda/(\tau-1)^{\lambda-1}}\ ).$$

特别地,若$\tau \to 1$,则定义13中的运算规则退化为:

1) $\alpha_1 \oplus_{FI} \alpha_2 = (\sqrt{1-(1-\mu_1^2)(1-\mu_2^2)}, v_1 v_2)$;

2) $\alpha_1 \otimes_{FI} \alpha_2 = (\mu_1 \mu_2, \sqrt{1-(1-v_1^2)(1-v_2^2)})$;

3) $\lambda\alpha_1 = (\sqrt{1-(1-\mu_1^2)^\lambda}, v_1^\lambda)$;

4) $\alpha_1^\lambda = (\mu_1^\lambda, \sqrt{1-(1-v_1^2)^\lambda})$.

易知,上述运算法则为Zhang等[11]定义的勾股模糊集的运算法则.

定理3 (封闭性)　设$\alpha_i = (\mu_i, v_i)(i=1,2)$为两个勾股模糊数,定义13中的运算法则均满足封闭性,即$\alpha_1 \oplus_{FI} \alpha_2$、$\alpha_1 \otimes_{FI} \alpha_2$、$\lambda\alpha_1$和$\alpha_1^\lambda$仍为勾股模糊数.

证明　下面证明$\alpha_1 \oplus_{FI} \alpha_2$和$\lambda\alpha_1$为勾股模糊数,其余的可以类似证明. 由于$\alpha_i = (\mu_i, v_i)(i=1,2)$为勾股模糊数,有$\mu_i \leqslant N_P(v_i)(i=1,2)$. 根据定义7和定义8,有

$$S_{F,\varphi}(\mu_1, \mu_2) \leqslant$$
$$S_{F,\varphi}(N_P(v_1), N_P(v_2)) =$$
$$N_P(T_{F,\varphi}(N_P(N_P(v_1)), N_P(N_P(v_2)))) =$$
$$N_P(T_{F,\varphi}(v_1, v_2)),$$

因此$\alpha_1 \oplus_{FI} \alpha_2$为勾股模糊数.

根据生成元的单调性,有

$$g_{F,\varphi}^{-1}(\lambda g_{F,\varphi}(\mu_1)) \leqslant$$
$$g_{F,\varphi}^{-1}(\lambda g_{F,\varphi}(N_P(\mu_1))) =$$
$$N_P(h_{F,\varphi}^{-1}(\lambda h_{F,\varphi}(N_P(N_P(\mu_1))))) =$$
$$N_P(h_{F,\varphi}^{-1}(\lambda h_{F,\varphi}(\mu_1))).$$

因此$\lambda\alpha_1$为勾股模糊数. □

定理4　设$\alpha_i = (\mu_i, v_i)(i=1,2)$为两个勾股模糊数,则有:

1) $\alpha_1 \oplus_{FI} \alpha_2 = \alpha_2 \oplus_{FI} \alpha_1$;

2) $\alpha_1 \otimes_{FI} \alpha_2 = \alpha_2 \otimes_{FI} \alpha_1$;

3) $\lambda\alpha_1 \oplus_{FI} \lambda\alpha_2 = \lambda(\alpha_1 \oplus_{FI} \alpha_2), \lambda > 0$;

4) $\alpha_1^\lambda \oplus_{FI} \alpha_2^\lambda = (\alpha_1 \otimes_{FI} \alpha_2)^\lambda, \lambda > 0$;

5) $\lambda_1\alpha_1 \oplus_{FI} \lambda_2\alpha_1 = (\lambda_1 + \lambda_2)\alpha_1, \lambda_1, \lambda_2 > 0$;

6) $\alpha_1^{\lambda_1} \otimes_{FI} \alpha_1^{\lambda_2} = (\alpha_1)^{\lambda_1+\lambda_2}, \lambda_1, \lambda_2 > 0$.

根据定义13易证定理14,此处不再详述.

3　勾股模糊Frank加权平均算子与勾股模糊Frank加权几何算子

为了集结带权重的勾股模糊数组,本节基于所定义的勾股模糊Frank运算规则提出勾股模糊Frank加权平均(PFFWA)算子和勾股模糊Frank加权几何(PFFWA)算子.

3.1　勾股模糊Frank加权平均算子

定义14　设$\alpha_i = (\mu_i, v_i)(i=1,2,\cdots,n)$为勾股模糊数组,勾股模糊Frank加权平均(PFFWA)算子为映射$\Theta^n \to \Theta$,满足

$$\mathrm{PFFWA}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \mathop{\oplus_{FI}}_{i=1}^{n} (w_i \alpha_i). \tag{9}$$

其中: Θ为所有勾股模糊数组成的集合; $(w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$为$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$的权重向量,满足$w_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

定理5　设$\alpha_i = (\mu_i, v_i)(i=1,2,\cdots,n)$为勾股模糊数组,则有

$$\mathrm{PFFWA}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) =$$
$$\Big(g_{F,\varphi}^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} w_i g_{F,\varphi}(\mu_i)\Big), h_{F,\varphi}^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} w_i h_{F,\varphi}(v_i)\Big)\Big) =$$
$$\Big(\sqrt{1-\log_\tau\Big(1+\prod_{i=1}^{n}(\tau^{1-\mu_i^2}-1)^{w_i}\Big)},$$
$$\sqrt{\log_\tau\Big(1+\prod_{i=1}^{n}(\tau^{v_i^2}-1)^{w_i}\Big)}\Big).$$

基于定义13中的运算法则,利用数学归纳法可以证明定理5. 下面探究算子的基本性质:封闭性、单调性、幂等性、有界性.

定理6　设$\alpha_i = (\mu_{1i}, v_{1i})(i=1,2,\cdots,n)$和$\beta_i = (\mu_{2i}, v_{2i})(i=1,2,\cdots,n)$为两组勾股模糊数组,则有:

1) 封闭性: $\mathrm{PFFWA}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$为勾股模糊数;

2) 单调性:若$\alpha_i \leqslant \beta_i (i=1,2,\cdots,n)$,则

$$\mathrm{PFFWA}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \leqslant$$
$$\mathrm{PFFWA}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n); \tag{10}$$

3) 幂等性:若$\alpha_i = \alpha = (\mu, v)(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$\mathrm{PFFWA}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \alpha; \tag{11}$$

4) 有界性:若令

$$\alpha_{\min} = (\min_i\{\mu_{1i}\}, \max_i\{v_{1i}\}),$$
$$\alpha_{\max} = (\max_i\{\mu_{1i}\}, \min_i\{v_{1i}\}),$$

则

$$\alpha_{\min} \leqslant \mathrm{PFFWA}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \leqslant \alpha_{\max}. \tag{12}$$

下面探究勾股模糊Frank加权平均算子的特殊情形.

定理7　设$\alpha_i = (\mu_i, v_i)(i=1,2,\cdots,n)$为勾股模糊数组,有:

1) $\lim\limits_{\tau \to 1} \mathrm{PFFWA}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) =$

$$\Big(\sqrt{1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu_i^2)^{w_i}}, \prod_{i=1}^{n}(v_i^{w_i})\Big);$$

2) $\lim\limits_{\tau\to\infty}\mathrm{PFFWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=$

$$\Big(\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i\mu_i^2},\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i v_i^2}\Big).$$

证明 1) 根据常用的等价无穷小, 当$x\to 0$时, $x\sim\ln(1+x), a^x-1\sim x\ln a(a>0)$,因此,当$\tau\to 1$时,有

$$\ln\Big(1+\prod_{i=1}^n(\tau^{1-\mu_i^2}-1)^{w_i}\Big)\sim\prod_{i=1}^n(\tau^{1-\mu_i^2}-1)^{w_i},$$

$$\tau^{1-\mu_i^2}-1=\mathrm{e}^{(1-\mu_i^2)\ln\tau}-1\sim(1-\mu_i^2)\ln\tau.$$

进而有

$$\lim_{\tau\to 1}\sqrt{1-\log_\tau\Big(1+\prod_{i=1}^n(\tau^{1-\mu_i^2}-1)^{w_i}\Big)}=$$

$$\sqrt{1-\lim_{\tau\to 1}\Big(\ln\Big(1+\prod_{i=1}^n(\tau^{1-\mu_i^2}-1)^{w_i}\Big)\Big)\Big/\ln\tau}=$$

$$\sqrt{1-\lim_{\tau\to 1}\Big(\prod_{i=1}^n(\tau^{1-\mu_i^2}-1)^{w_i}\Big)\Big/\ln\tau}=$$

$$\sqrt{1-\lim_{\tau\to 1}\Big(\prod_{i=1}^n((1-\mu_i^2)\ln\tau)^{w_i}\Big)\Big/\ln\tau}=$$

$$\sqrt{1-\prod_{i=1}^n(1-\mu_i^2)^{w_i}}.$$

同理可证

$$\lim_{\tau\to 1}\sqrt{\log_\tau\Big(1+\prod_{i=1}^n(\tau^{v_i^2}-1)^{w_i}\Big)}=\prod_{i=1}^n(v_i^{w_i}).$$

因此

$$\lim_{\tau\to 1}\mathrm{PFFWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=$$

$$\Big(\sqrt{1-\prod_{i=1}^n(1-\mu_i^2)^{w_i}},\prod_{i=1}^n(v_i^{w_i})\Big).$$

2) 根据洛必达法则,有

$$\lim_{\tau\to\infty}\sqrt{1-\log_\tau\Big(1+\prod_{i=1}^n(\tau^{1-\mu_i^2}-1)^{w_i}\Big)}=$$

$$\sqrt{1-\lim_{\tau\to\infty}\frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{w_i(1-\mu_i^2)\tau^{-\mu_i^2}}{\tau^{1-\mu_i^2}-1}\Big)\prod\limits_{i=1}^n(\tau^{1-\mu_i^2}-1)^{w_i}}{(1/\tau)\Big(1+\prod\limits_{i=1}^n(\tau^{1-\mu_i^2}-1)^{w_i}\Big)}}=$$

$$\sqrt{1-\lim_{\tau\to\infty}\frac{\prod\limits_{i=1}^n(\tau^{1-\mu_i^2}-1)^{w_i}\Big(\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{w_i(1-\mu_i^2)\tau^{1-\mu_i^2}}{\tau^{1-\mu_i^2}-1}\Big)}{\Big(1+\prod\limits_{i=1}^n(\tau^{1-\mu_i^2}-1)^{w_i}\Big)}}=$$

$$\sqrt{1-\sum_{i=1}^n w_i(1-\mu_i^2)}=$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i\mu_i^2}.$$

同理可证

$$\lim_{\tau\to\infty}\sqrt{\log_\tau\Big(1+\prod_{i=1}^n(\tau^{v_i^2}-1)^{w_i}\Big)}=\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i v_i^2}.$$

因此

$$\lim_{\tau\to\infty}\mathrm{PFFWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=$$

$$\Big(\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i\mu_i^2},\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i v_i^2}\Big).\qquad\square$$

上述定理表明. 当参数$\tau\to 1$时, PFFWA算子退化为现存的勾股模糊加权平均(PFWA)算子[9-10]; 当参数$\tau\to\infty$时, PFFWA算子退化为现存的勾股模糊加权幂平均(PFWPM)算子[9-10].

3.2 勾股模糊Frank加权几何算子

定义15 设$\alpha_i=(\mu_i,v_i)(i=1,2,\cdots,n)$为勾股模糊数组,勾股模糊Frank加权几何(PFFWG)算子为映射$\varTheta^n\to\varTheta$,满足

$$\mathrm{PFFWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\bigotimes_{FI\,i=1}^{\;n}(\alpha_i^{w_i}).\qquad(13)$$

其中:$\varTheta$为所有勾股模糊数组成的集合; $(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm T}$为$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$的权重向量,满足$w_i>0$, $\sum\limits_{i=1}^n w_i=1$.

定理8 设$\alpha_i=(\mu_i,v_i)(i=1,2,\cdots,n)$为勾股模糊数组,有

$$\mathrm{PFFWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=$$

$$\Big(h_{F,\varphi}^{-1}\Big(\sum_{i=1}^n w_i h_{F,\varphi}(\mu_i)\Big),\ g_{F,\varphi}^{-1}\Big(\sum_{i=1}^n w_i g_{F,\varphi}(v_i)\Big)\Big)=$$

$$\Big(\sqrt{\log_\tau\Big(1+\prod_{i=1}^n(\tau^{\mu_i^2}-1)^{w_i}\Big)},$$

$$\sqrt{1-\log_\tau\Big(1+\prod_{i=1}^n(\tau^{1-v_i^2}-1)^{w_i}\Big)}\Big).$$

定理9 设$\alpha_i=(\mu_{1i},v_{1i})(i=1,2,\cdots,n)$和$\beta_i=(\mu_{2i},v_{2i})(i=1,2,\cdots,n)$为两组勾股模糊数组,则有:

1) 封闭性: PFFWG$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$为勾股模糊数;

2) 单调性:若$\alpha_i\leqslant\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$\mathrm{PFFWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\leqslant$$

$$\mathrm{PFFWG}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n); \tag{14}$$

3) 幂等性: 若$\alpha_i=\alpha=(\mu,v)(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$\mathrm{PFFWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\alpha; \tag{15}$$

4) 有界性: 若令

$$\alpha_{\min}=(\min_i\{\mu_{1i}\},\max_i\{v_{1i}\}),$$

$$\alpha_{\max}=(\max_i\{\mu_{1i}\},\min_i\{v_{1i}\}),$$

则

$$\alpha_{\min}\leqslant \mathrm{PFFWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\leqslant\alpha_{\max}. \tag{16}$$

类似于PFFWA算子,可以获取PFFWG算子的如下特殊情形.

定理10 设$\alpha_i=(\mu_i,v_i)(i=1,2,\cdots,n)$为勾股模糊数组,有:

1) $\lim\limits_{\tau\to1}\mathrm{PFFWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=$

$$\Big(\prod_{i=1}^n(v_i^{w_i}),\sqrt{1-\prod_{i=1}^n(1-\mu_i^2)^{w_i}}\Big);$$

2) $\lim\limits_{\tau\to\infty}\mathrm{PFFWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=$

$$\Big(\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i\mu_i^2},\sqrt{\sum_{i=1}^n w_iv_i^2}\Big).$$

定理10的证明类似定理7,此处不再详述.

上述定理表明: 当参数$\tau\to1$时, PFFWG算子退化为现存的勾股模糊加权几何(PFWG)算子[9-10]; 当参数$\tau\to\infty$时, PFFWG算子退化为现存的勾股模糊加权幂平均(PFWPM)算子[9-10].

下述定理阐述了PFFWA算子与PFFWG算子之间的关系.

定理11 设$\alpha_i=(\mu_i,v_i)(i=1,2,\cdots,n)$为勾股模糊数组,则有: 1) $\mathrm{PFFWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\mathrm{PFFWA}((\alpha_1)^c,(\alpha_2)^c,\cdots,(\alpha_n)^c))^c$; 2) $\mathrm{PFFWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\mathrm{PFFWG}((\alpha_1)^c,(\alpha_2)^c,\cdots,(\alpha_n)^c))^c$. 其中$\alpha_i^c=(v_i,\mu_i)$, $i=1,2,\cdots,n$.

4 基于勾股模糊Frank算子的多属性决策方法

本节将提出的勾股模糊Frank算子应用于勾股模糊环境下的多属性决策问题中. 在多属性决策问题中,设备选方案集为$X=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$,属性(准则)集为$C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$. 决策者根据属性$C_j(j=1,2,\cdots,n)$对方案$X_i(i=1,2,\cdots,m)$进行评价,进而给出决策矩阵$D=(\alpha_{ij})_{m\times n}$,其中$\alpha_{ij}=(\mu_{ij},v_{ij})$为勾股模糊数. 属性集的权重向量为$W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$,满足$\sum\limits_{j=1}^n w_j=1, w_j>0, j=1,2,\cdots,n$.

Step 1: 根据属性权重向量$W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$,利用勾股模糊Frank加权平均(PFFWA)算子或勾股模糊Frank加权几何(PFFWG)算子

$$\alpha_i=\mathop{\oplus_{FI}}_{j=1}^{n}(w_j\alpha_{ij}),\ \alpha_i=\mathop{\otimes_{FI}}_{j=1}^{n}(\alpha_{ij}^{w_j}) \tag{17}$$

集结备选方案$X_i(i=1,2,\cdots,m)$所对应的评价值$\alpha_{ij}(j=1,2,\cdots,n)$,进而获取综合评价值$\alpha_i(i=1,2,\cdots,m)$.

Step 2: 利用定义3中的排序方法对综合评价值$\alpha_i(i=1,2,\cdots,m)$进行排序.

Step 3: 根据综合评价值$\alpha_i(i=1,2,\cdots,m)$的排序对方案集$X=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$进行排序,选择最优方案.

5 实例分析

考虑航空公司的服务质量评价问题[11],评价对象为4家国内航空公司$X=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$,评价属性(准则)包括: 机票服务C_1、安检和登机服务C_2、客舱服务C_3、响应性C_4. 4个属性的详情见文献[11]. 评价委员会给出属性的权重向量为$W=(0.15, 0.25, 0.35, 025)$,评价对象$X_i(i=1, 2, 3, 4)$在属性$C_j(j=1, 2, 3, 4)$下的评价值$\alpha_{ij}=(\mu_{ij},v_{ij})(i,j=1, 2, 3, 4)$为勾股模糊数,进而构成评价矩阵$D=(\alpha_{ij})_{4\times4}$,详见表1. 利用所提出的多属性决策方法选出服务质量最优的航空公司.

表1 决策矩阵D

	C_1	C_2	C_3	C_4
X_1	$(0.9, 0.3)$	$(0.7, 0.6)$	$(0.5, 0.8)$	$(0.6, 0.3)$
X_2	$(0.4, 0.7)$	$(0.9, 0.2)$	$(0.8, 0.1)$	$(0.5, 0.3)$
X_3	$(0.8, 0.4)$	$(0.7, 0.5)$	$(0.6, 0.2)$	$(0.7, 0.4)$
X_4	$(0.7, 0.2)$	$(0.8, 0.2)$	$(0.8, 0.4)$	$(0.6, 0.6)$

Step 1: 根据权重向量$W=(0.15, 0.25, 0.35, 025)$和评价矩阵$D=(\alpha_{ij})_{4\times4}$,利用PFFWA算子($\tau=2$)集结$\alpha_{ij}(j=1, 2, 3, 4)$,有

$$\alpha_i=\Big(\sqrt{1-\log_\tau\Big(1+\prod_{j=1}^4(\tau^{1-\mu_{ij}^2}-1)^{w_j}\Big)},$$

$$\sqrt{\log_\tau\Big(1+\prod_{j=1}^4(\tau^{v_{ij}^2}-1)^{w_j}\Big)}\Big),$$

进而获取综合评价值

$$\alpha_1=(0.677\,8,\ 0.511\,2),$$

$$\alpha_2=(0.756\,2,\ 0.212\,0),$$

$$\alpha_3=(0.688\,8,\ 0.333\,6),$$

$$\alpha_4=(0.748\,3,\ 0.338\,4).$$

Step 2: 利用定义3的排序方法对综合评价值 $\alpha_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 进行排序. 记分函数值

$$s(\alpha_1)=0.198\,0,$$

$$s(\alpha_2)=0.526\,8,$$

$$s(\alpha_3)=0.363\,1,$$

$$s(\alpha_4)=0.445\,4,$$

因此 $\alpha_2 \succ \alpha_4 \succ \alpha_3 \succ \alpha_1$.

Step 3: 根据综合评价值 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的排序获取方案集的排序, 有

$$X_2 \succ X_4 \succ X_3 \succ X_1,$$

因此最优方案为 X_2.

为了探究参数对决策过程的影响, 考虑参数范围为 $\tau\in(1,50]$ 方案的排序情况综合分析.

利用PFFWA算子集结方案 $X_i(i=1,2,3,4)$ 对应的评价值 $\alpha_{ij}(j=1,2,3,4)$ 获取综合评价值 $\alpha_i^A=\mathrm{PFFWA}(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\alpha_{i3},\alpha_{i4})(i=1,2,3,4)$, 其对应的记分函数值 $s(\alpha_i^A)(i=1,2,3,4)$ 与参数 $\tau\in(1,50]$ 之间的关系如图1所示.

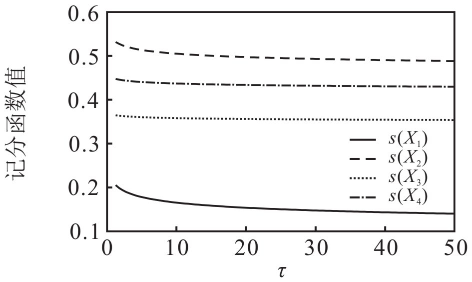

图1 基于PFFWA算子下的记分函数值

利用PFFWG算子集结方案 $X_i(i=1,2,3,4)$ 对应的评价值 $\alpha_{ij}(j=1,2,3,4)$ 获取综合评价值 $\alpha_i^G=\mathrm{PFFWG}(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\alpha_{i3},\alpha_{i4})(i=1,2,3,4)$, 其对应的记分函数值 $s(\alpha_i^G)(i=1,2,3,4)$ 与参数 $\tau\in(1,50]$ 之间的关系如图2所示.

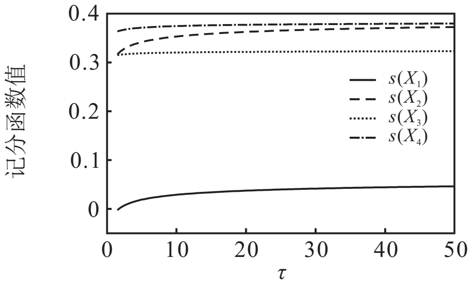

图2 基于PFFWG算子下的记分函数值

将综合评价值 $\alpha_i^A(i=1,2,3,4)$ 对应的记分函数值 $s(\alpha_i^A)(i=1,2,3,4)$ 与 $\alpha_i^G(i=1,2,3,4)$ 对应的记分函数值 $s(\alpha_i^G)(i=1,2,3,4)$ 作差值, 进而获取 $\Delta s_i=s(\alpha_i^A)-s(\alpha_i^G)(i=1,2,3,4)$, 并给出 $\Delta s_i(i=1,2,3,4)$ 与参数之间的关系如图3所示.

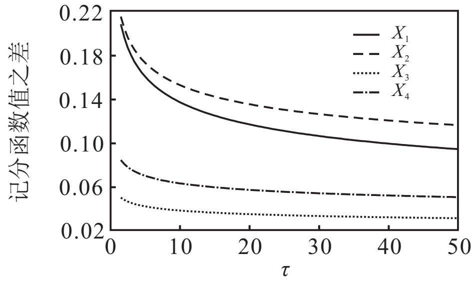

图3 PFFWA与PFFWG算子下的记分函数值之差

分别利用PFFWA算子、PFFWG算子、PFWPA算子、PFWA算子和PFWG算子对方案 X_1 对应的评价值 $\alpha_{1j}(j=1,2,3,4)$ 进行集结, 获取方案 X_1 对应综合评价值 α_1^A、α_1^G、$\alpha_1^{\mathrm{PFWPA}}$、$\alpha_1^{\mathrm{PFWA}}$、$\alpha_1^{\mathrm{PFWG}}$, 研究综合评价值的记分函数值 $s(\alpha_1^A)$、$s(\alpha_1^G)$、$s(\alpha_1^{\mathrm{PFWPA}})$、$s(\alpha_1^{\mathrm{PFWA}})$、$s(\alpha_1^{\mathrm{PFWG}})$ 与参数之间的关系如图4所示.

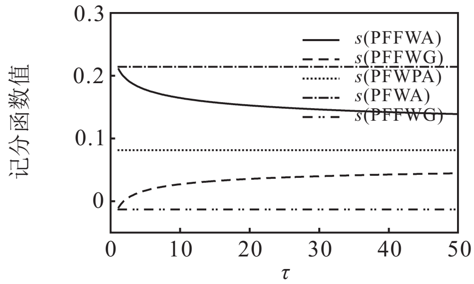

图4 基于不同算子下方案 X_1 的记分函数值

由图1 ~ 图4可见:

1) 根据图1, 当 $\tau\in(1,50]$ 时, 航空公司的排序为 $X_2\succ X_4\succ X_3\succ X_1$, 方案 $X_i(i=1,2,3,4)$ 对应的记分函数值 $s(\alpha_i^A)(i=1,2,3,4)$ 关于参数 τ 呈递减趋势.

2) 根据图2, 当 $\tau\in(1,50]$ 时, 航空公司的排序为 $X_4\succ X_2\succ X_3\succ X_1$, 服务质量最优的公司为 X_4, 方案 $X_i(i=1,2,3,4)$ 对应的记分函数值 $s(\alpha_i^G)(i=1,2,3,4)$ 关于参数 τ 呈递增趋势.

3) 根据图3, PFFWA算子获取的记分函数值与PFFWG算子获取的记分函数值之间的差值 $\Delta s_i(i=1,2,3,4)$ 关于参数 $\tau\in(1,50]$ 递减, 由图1和图2可知, $s(\alpha_i^A)(i=1,2,3,4)$ 关于参数递减, $s(\alpha_i^G)(i=1,2,3,4)$ 关于参数递增.

4) 当 $\tau\in(1,50]$ 时, $\Delta s_i>0(i=1,2,3,4)$, 表明由PFFWA算子获取的综合评价值大于PFFWG算子获取的综合评价值 $\alpha_i^A\succ\alpha_i^G(i=1,2,3,4)$. 相对PFFWG算子而言, PFFWA算子获取的综合评价值较大, 适用于乐观的决策者, 参数可以刻画乐观水平, PFFWG算子较适用于悲观的决策者, 参数可以刻画决策者的悲观水平.

5) 根据图4,当$\tau \in (1,50]$时,有

$$s(\alpha_1^{\mathrm{PFWG}}) < s(\alpha_1^G) < s(\alpha_1^{\mathrm{PFWPA}}) < s(\alpha_1^A) < s(\alpha_1^{\mathrm{PFWA}}),$$

与定理7和定理10保持一致. 根据定理7,有

$$\lim_{\tau\to 1} s(\alpha_1^A) = s(\alpha_1^{\mathrm{PFWA}}),$$
$$\lim_{\tau\to \infty} s(\alpha_1^A) = s(\alpha_1^{\mathrm{PFWPA}}).$$

根据定理10,有

$$\lim_{\tau\to 1} s(\alpha_1^G) = s(\alpha_1^{\mathrm{PFWG}}),$$
$$\lim_{\tau\to \infty} s(\alpha_1^G) = s(\alpha_1^{\mathrm{PFWPA}}).$$

为了进一步验证本文所提出决策方法的可行性和可信性,将所提出方法与现存的决策方法进行对比分析. 利用现存的勾股集结算子和决策方法解决上述算例中多属性决策问题,获取的排序结果如表2所示. 由表2可见,基于表中8类算子所获取的方案排序为$X_2 \succ X_4 \succ X_3 \succ X_1$,最优方案为$X_2$. 利用Zhang等[11]的TOPSIS方法获取的方案排序为$X_2 \succ X_3 \succ X_4 \succ X_1$,虽然方案$X_4$和$X_3$的排序略有变化,但最优方案仍为$X_2$,充分表明了本文所提出的PFFWA算子和PFFWG算子具有一定的可行性. 事实上,根据上述分析所述,Yager等[9-10]提出的PFWPA算子、PFWA算子和PFWG算子为本文所提出算子的特殊形式,表明本文所提出算子具有退化性. 相对表中的其他算子而言,本文算子具有一定的灵活性,PFFWA算子中的参数可以表征乐观决策者的乐观程度,PFFWG算子中的参数可以表征悲观决策者的悲观程度.

表2　决策方法与方案排序结果

算子与决策方法	方案排序
本文的PFFWA与PFFWG算子	$X_2 \succ X_4 \succ X_3 \succ X_1$
Yager[9-10]的PFWPA算子	$X_2 \succ X_4 \succ X_3 \succ X_1$
Yager[9-10]的PFWA与PFWG算子	$X_2 \succ X_4 \succ X_3 \succ X_1$
Zhang和Xu[11]的TOPSIS方法	$X_2 \succ X_3 \succ X_4 \succ X_1$
刘卫锋等[16]的PFIWA算子	$X_2 \succ X_4 \succ X_3 \succ X_1$
Ma和Xu[18]的SPFWG/SPFWA算子	$X_2 \succ X_4 \succ X_3 \succ X_1$

6　结　论

鉴于Frank t-模与s-模可有效应用于定义各类模糊集的广义运算规则,本文构造出适用于定义勾股模糊集广义运算规则的一种同构Frank t-模与其对偶s-模. 勾股模糊集的广义运算规则具有兼容性,能够退化成文献[11]定义的运算规则. 进一步地,针对带权重向量的勾股模糊数组,基于新的运算规则提出两类勾股模糊Frank集结算子,并研究其基本性质,揭露了所提出算子在特定条件下可以退化为文献[9-10]所提出的勾股模糊集结算子. 利用基于新算子提出的决策方法对航空公司的服务质量进行评估,深入分析了算子参数对于决策过程的影响,并剖析了新提出算子在该案例中的内在关联.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information & Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets & Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[3] 万树平. 直觉模糊多属性决策方法综述[J]. 控制与决策, 2010, 25(11): 1601-1606.
(Wan S P. Survey on intuitionistic fuzzy multi-criteria decision making approach[J]. Control and Decision, 2010, 25(11): 1601-1606.)

[4] 曾祥添, 李登峰, 余高锋. 面向偏好冲突的直觉模糊多属性群体决策方法[J]. 控制与决策, 2015, 30(11): 2108-2112.
(Zeng X T, Li D F, Xu G F. Intuitionistic fuzzy multi-attribute group decision-making method for preference conflicting[J]. Control and Decision, 2015, 30(11): 2108-2112.)

[5] 陈华友, 何迎东, 周礼刚, 等. 广义直觉模糊加权交叉影响平均算子及其在多属性决策中的应用[J]. 控制与决策, 2014, 29(7): 1250-1256.
(Chen H Y, He Y D, Zhou L G, et al. Generalized intuitionistic fuzzy interaction averaging operators and their applications to multi-attribute decision making[J]. Control and Decision, 2014, 29(7): 1250-1256.)

[6] 周伟, 何建敏, 余德建. 直觉模糊群决策中专家权重确定的一种精确方法[J]. 控制与决策, 2013, 28(5): 716-725.
(Zhou W, He J M, Xu D J. Accurate method of obtaining decision expert weights in intuitionistic fuzzy group decision making[J]. Control and Decision, 2013, 28(5): 716-725.)

[7] 江红莉, 何建敏, 庄亚明, 等. 基于直觉模糊集和证据理论的群决策方法[J]. 控制与决策, 2012, 27(5): 752-756.
(Jiang H L, He J M, Zhuang Y M, et al. Approach to group decision making based on intuitionistic fuzzy sets and evidence theory[J]. Control and Decision, 2012, 27(5): 752-756.)

[8] 陶长琪, 凌和良. 基于 Choquet 积分的模糊数直觉模糊数多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2012, 27(9): 1381-1386.
(Tao C Q, Ling H L. Approach for multiple attribute decision-making with fuzzy-number-intuitionistic-fuzzy-number based on Choquet integral[J]. Control and Decision, 2012, 27(9): 1381-

1386.)

[9] Yager R R, Abbasov A M. Pythagorean membership grades, complex numbers, and decision making[J]. Int J Intelligent Systems, 2013; 28: 436-452.

[10] Yager R R. Pythagorean membership grades in multicriteria decision making[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2014, 22: 958-965.

[11] Zhang X L, Xu Z S. Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with Pythagorean fuzzy sets[J]. Int J Intelligent Systems, 2014, 29: 1061-1078.

[12] Peng X D, Yang Y. Some results for Pythagorean fuzzy sets[J]. Int J Intelligent Systems, 2015, 30: 1133-1160.

[13] Zhang X L. A novel approach based on similarity measure for pythagorean fuzzy multiple criteria group decision making[J]. Int J of Intelligent Systems, 2015, 31(6): 593-611.

[14] Yang Y, Ding H, Chen Z, et al. A note on extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with pythagorean fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2015, 31(1): 68-72.

[15] 刘卫锋, 常娟, 何霞. 广义毕达哥拉斯模糊集成算子及其决策应用[J]. 控制与决策, 2016, 31(12): 2280-2286.
(Liu W F, Chang J, He X. Generalized Pythagorean fuzzy aggregation operators and applications in decision making[J]. Control and Decision, 2016, 31(12): 2280-2286.)

[16] 刘卫锋, 杜迎雪, 常娟. 毕达哥拉斯模糊交叉影响集成算子及其决策应用[J]. 控制与决策, 2017, 32(6): 1033-1040.
(Liu W F, Du Y X, Chang J, Pythagorean fuzzy interaction aggregation operators and applications in decision making[J]. Control and Decision, 2017, 32(6): 1033-1040.)

[17] 李德清, 曾文艺. 勾股模糊集的距离测度及其在多属性决策中的应用[J].控制与决策, 2017, 32(10): 1817-1823.
(Li D Q, Zeng W Y. Distance measures of Pythagorean fuzzy sets and their applications in multiattribute decision making[J]. Control and Decision, 2017, 32(10): 1817-1823.)

[18] Ma Z M, Xu Z S. Symmetric pythagorean fuzzy weighted geometric/averaging operators and their application in multicriteria decisionmaking problems[J]. Int J of Intelligent Systems, 2016, 31(12): 1198-1219.

[19] Ren P J, Xu Z S, Gou X J. Pythagorean fuzzy TODIM approach to multi-criteria decision making[J]. Applied Soft Computing, 2016, 42(5): 246-259.

[20] 彭新东, 杨勇. 基于Pythagorean模糊语言集多属性群决策方法[J]. 计算机工程与应用, 2016, 52(23): 50-54.
(Peng X D, Yang Y. Multiple attribute group decision making methods based on Pythagorean fuzzy linguistic set[J].Computer Engineering and Applications, 2016, 52(23): 50-54.)

[21] Peng X D, Yang Y. Pythagorean fuzzy choquet integral based MABAC method for multiple attribute group decision making[J]. Int J of Intelligent Systems, 2016, 31(10): 989-1020.

[22] Gou X J, Xu Z S, Ren P J. The properties of continuous pythagorean fuzzy information[J]. Int J of Intelligent Systems, 2016, 31(5): 401-424.

[23] Frank M J. On the simultaneous associativity of $F(x, y)$ and $x+y-F(x, y)$[J]. Aequationes Mathematicae, 1979, 19(1): 194-226.

[24] Zhang X, Liu P D, Wang Y M. Multiple attribute group decision making methods based on intuitionistic fuzzy frank power aggregation operators[J]. J of Intelligent & Fuzzy Systems, 2015, 29(5): 2235-2246.

[25] Zhang Z M. Interval-valued intuitionistic fuzzy Frank aggregation operators and their applications to multiple attribute group decision making[J]. Neural Computing & Applications, 2017, 28(6): 1471-1501.

[26] Qin J D, Liu X W, Pedrycz W. Frank aggregation operators and their application to hesitant fuzzy multiple attribute decision making[J]. Applied Soft Computing, 2016, 41(4): 428-452.

[27] 杜玉琴, 侯福均, 区间直觉语言Frank集结算子及其在决策中的应用[J], 控制与决策, 2018, 33(1): 119-125.
(Du Y Q, Hou F J. Interval intuitionistic linguistic Frank aggregation operators and their application in decision making[J]. Control and Decision, 2018, 33(1): 119-125.)

[28] Qin J D, Liu X W. Frank aggregation operators for triangular interval type-2 fuzzy set and its application in multiple attribute group decision making[J]. J of Applied Mathematics, 2014, 3: 1-24.

[29] Klement E P, Mesiar R, Pap E. Triangular norms[J]. Trends in Logic, 2000, 13(1): 169-193.

[30] Beliakov G, Pradera A, Calvo T. Aggregation functions: A guide for practitioners[M]. Berling: Springer-Verlag, 2007: 139-141.

[31] Klir G, Yuan B. Fuzzy sets and fuzzy logic[M]. New Jersey: Prentice hall, 1995: 414-446.

(责任编辑：郑晓蕾)