

# 带有噪声递推估计的自适应集合卡尔曼滤波

姜浩楠, 蔡远利<sup>†</sup>

(西安交通大学 电子与信息工程学院, 西安 710049)

**摘要:** 卡尔曼滤波(KF)广泛应用于线性系统的状态估计问题. 然而, 它需要精确已知过程噪声的统计特性, 这在实际应用中往往是不能满足的. 在这个背景下, 首先, 根据协方差匹配原理建立一种带有过程噪声递推估计的自适应KF算法; 然后, 为了突破KF只能处理线性系统估计问题的局限, 将过程噪声递推估计引入集合卡尔曼滤波(EnKF)中, 提出一种自适应EnKF算法; 最后, 采用估计理论证明所提出算法的稳定性. 与标准EnKF相比, 该自适应算法在过程噪声统计特性未知的情况下滤波依然收敛, 滤波精度及稳定性显著提升. 仿真结果验证了所提出算法的有效性.

**关键词:** 卡尔曼滤波; 协方差匹配; 过程噪声递推估计; 自适应集合卡尔曼滤波

中图分类号: V448

文献标志码: A

## Adaptive ensemble Kalman filter with recursive noise estimation

JIANG Hao-nan, CAI Yuan-li<sup>†</sup>

(School of Electronic and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** The Kalman filter(KF) is widely used for state estimation of linear systems. However, it requires accurate statistic of process noise, which is not plausible in practical applications. In this paper, an adaptive KF algorithm with recursive process noise estimation is constructed firstly by utilizing the covariance matching principle. Then, in order to break through the limitation of the KF that can only deal with the estimation problem of linear systems, the recursive process noise estimation is introduced into the ensemble Kalman filter(EnKF), so that an adaptive EnKF algorithm is proposed. Finally, the stability of the novel algorithm is proved through the estimation theory. Under the condition of unknown process noise statistic, the proposed adaptive EnKF algorithm still converges, moreover its filtering precision and stability are better than those of the standard EnKF. Simulation results validate the effectiveness of the presented algorithm.

**Keywords:** Kalman filter; covariance matching; recursive process noise estimation; adaptive ensemble Kalman filter

## 0 引言

状态和参数估计问题广泛存在于组合导航、目标跟踪和控制系统等领域<sup>[1]</sup>. 能够持续准确地估计某个系统的状态是对其进行有效控制的前提, 因此, 所采用的估计方法不仅要求精度高, 而且应具备处理模型误差的能力. 这里的模型误差主要指函数模型(如状态转移函数)误差和随机模型(噪声)误差<sup>[2]</sup>.

自提出以来, 卡尔曼滤波(KF)一直是被研究和最为广泛的估计方法之一. 然而, 它需要已知系统的函数模型和噪声统计特性, 并且仅适用于受高斯白噪声干扰的线性系统的估计问题. 在卡尔曼滤波思想的基础上, 多种非线性滤波方法应运而生, 其中

应用最广泛的是扩展卡尔曼滤波(EKF)<sup>[3]</sup>. 根据实际精度需求, EKF可以对非线性系统函数进行泰勒展开并保留到 $n$ 阶项. 即便如此, 当系统的非线性较强时, 这样的线性化操作往往会导致估计结果不稳定甚至发散.

不同于EKF算法近似非线性函数的思想, 免微分非线性滤波算法, 主要包括以无味卡尔曼滤波(UKF)<sup>[4]</sup>为代表的确定性采样滤波算法和以粒子滤波(PF)<sup>[5]</sup>为代表的随机性采样滤波算法两大类, 采用不同的方式近似非线性函数的概率密度分布. 另一种随机性采样滤波算法——集合卡尔曼滤波(EnKF), 最早由Evensen<sup>[6]</sup>提出, 之后广泛应用于气象学中进

收稿日期: 2017-05-10; 修回日期: 2017-07-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61202128); 宇航动力学国家重点实验室开放基金项目(2011ADL-JD0202).

责任编委: 李韬.

作者简介: 姜浩楠(1991—), 男, 博士生, 从事目标跟踪、非线性滤波的研究; 蔡远利(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事现代控制理论及应用、飞行器制导与控制等研究.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: ylicai@mail.xjtu.edu.cn

行数据同化. EnKF采用序贯蒙特卡罗方法和数据同化技术改善了量测噪声随机性对滤波精度的不利影响<sup>[7]</sup>. 在给定足够多的集合样本条件下, EnKF具有更高的滤波精度, 同时计算复杂度较低.

在实际应用中, 由于被估计系统的函数模型和噪声统计特性往往并不能够准确获得, 采用之前所述的标准滤波算法可能会导致估计精度大大降低. 鉴于此, 国内外许多学者提出了鲁棒的滤波算法, 即在不改变估计模型的基础上, 提高算法的滤波精度. Simon<sup>[8]</sup>提出的 $H_\infty$ 滤波基于“最小化最差情况下的估计误差”的思想处理模型误差, 它的主要缺点是滤波效果非常容易受到自定义性能约束的影响; 近年来提出的变结构滤波<sup>[9]</sup>, 在给定模型或参数不确定程度上界的情况下, 能够得到鲁棒并且稳定的估计结果; 高斯和滤波<sup>[10]</sup>、Masreliez-Martin滤波<sup>[11]</sup>和Izanloo等<sup>[12]</sup>提出的基于最大熵准则的卡尔曼滤波等可以解决受非高斯噪声干扰的系统估计问题; 针对量测信息中存在异常值的情况, 文献[13]基于Huber的M估计理论提出了相应的改进算法.

此外, 也有大量学者致力于自适应滤波算法的研究, 即通过实时调整模型参数和噪声的统计特性改善算法的滤波精度. 文献报道的自适应滤波算法主要可以分为基于新息的自适应滤波算法和多模型自适应滤波算法两大类. 其中, 基于新息的自适应算法主要采用协方差匹配<sup>[14]</sup>、相关技术<sup>[15]</sup>和极大似然估计<sup>[16]</sup>等思想. 这些算法主要存在计算负担过重、无法保证矩阵正定性和不能在线估计等缺点. 交互式多模型滤波算法<sup>[17]</sup>是能够有效地解决模型误差的方法之一, 然而其估计精度依赖于模型的数量以及模型集的选取. 针对系统参数可能发生突变的情况, Nemeth等<sup>[18]</sup>在序贯蒙特卡罗框架下提出了一种自适应参数估计算法.

本文针对过程噪声统计特性未知的情况, 首先利用协方差匹配原理建立一种带有噪声递推估计的自适应卡尔曼滤波(AKF)算法, 可以对过程噪声的统计特性进行在线估计和修正. 相比于已有的基于协方差匹配的自适应算法<sup>[14, 19-21]</sup>, 本文所提出的算法不再使用滑窗, 避免了存储大量数据, 提高了算法的效率. 随后, 为了解决实际情况中更容易出现的非线性系统的估计问题, 将过程噪声递推估计方法引入EnKF算法中, 提出一种自适应集合卡尔曼滤波(AEnKF)算法. AEnKF算法可以有效地解决过程噪声未知情况下非线性系统的状态和参数估计问题. 通过理论分析, 证明了所提出算法的稳定收敛性,

并在一个典型的目标跟踪仿真实例中验证了所提出算法的有效性.

## 1 问题描述

考虑如下离散非线性系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}, \\ \mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$  为系统的状态向量;  $\mathbf{z}_k \in \mathbf{R}^m$  为系统的量测向量;  $f(\cdot)$  和  $h(\cdot)$  分别为已知的状态转移函数和量测函数;  $\mathbf{w}_k \in \mathbf{R}^n$  为过程噪声,  $\mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^m$  为量测噪声.

**假设1**  $\mathbf{w}_k$  和  $\mathbf{v}_k$  是互不相关的高斯白噪声, 且对于所有的非负整数  $k$  和  $j$ , 有

- 1)  $E[\mathbf{w}_k] = 0$ ,  $E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T] = \mathbf{Q}_k \delta_{kj}$ ,  $\mathbf{Q}_k \geq 0$ ;
- 2)  $E[\mathbf{v}_k] = 0$ ,  $E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T] = \mathbf{R}_k \delta_{kj}$ ,  $\mathbf{R}_k > 0$ ;
- 3)  $E[\mathbf{w}_k \mathbf{v}_j^T] = 0$ .

其中:  $E[\cdot]$  为数学期望运算符,  $\mathbf{Q}_k$  为非负定对称矩阵,  $\mathbf{R}_k$  为正定对称矩阵,  $\delta_{kj}$  为Kronecker- $\delta$  函数.

**假设2** 初始状态  $\mathbf{x}_0$  服从高斯分布  $\mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_0, P_0)$ , 且与  $\mathbf{w}_k$  和  $\mathbf{v}_k$  相互独立.

**假设3** 过程噪声协方差矩阵  $\mathbf{Q}_k$  未知, 量测噪声协方差矩阵  $\mathbf{R}_k$  是已知的常值矩阵.

为便于后面的理论分析, 给出非线性系统(1)的线性化模型如下:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{F}_{k-1} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}}, \quad (3)$$

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}. \quad (4)$$

在标准的滤波(KF和EnKF)算法中, 过程噪声的统计特性是已知的, 而在实际情况中这些信息往往并不能够精确获得. 因此, 为了保证得到稳定且准确的状态估计, 需要设计一种能够处理此类模型不确定问题的自适应滤波算法.

## 2 自适应滤波算法

针对上述问题, 本节根据协方差匹配原理<sup>[14]</sup>推导了一种过程噪声递推估计方法, 可以对过程噪声的统计特性进行实时估计, 然后将其引入标准的滤波算法中, 从而提升算法的自适应性.

### 2.1 过程噪声递推估计方法

考虑  $k-1$  时刻的状态一步预测估计值  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$  和  $k$  时刻的状态滤波估计值  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ , 将它们的残差表示为

$$\zeta_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}. \quad (5)$$

根据  $k - N + 1$  时刻到  $k$  时刻的状态残差数据,  $\zeta_k$  的均值  $\bar{\zeta}_k$  和协方差  $\Sigma_{\zeta_k}$  的估计分别为

$$\bar{\zeta}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=k-N+1}^k \zeta_i, \quad (6)$$

$$\Sigma_{\zeta_k} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=k-N+1}^k (\zeta_i - \bar{\zeta}_k)(\zeta_i - \bar{\zeta}_k)^T, \quad (7)$$

其中  $N$  表示滑窗宽度, 是一个可调参数.

假设过程噪声协方差不变, 对式(7)求期望<sup>[14]</sup>, 可得

$$E(\Sigma_{\zeta_k}) = \frac{1}{N} \sum_{i=k-N+1}^k (\mathbf{F}_{i-1} \mathbf{P}_{i-1|i-1} \mathbf{F}_{i-1}^T - \mathbf{P}_{i|i}) + \mathbf{Q}_k, \quad (8)$$

其中  $\mathbf{F}_{i-1}$  和  $\mathbf{P}_{i-1|i-1}$  分别为  $i - 1$  时刻的状态转移矩阵和滤波协方差矩阵.

由式(7)和(8), 过程噪声协方差可近似写为

$$\mathbf{Q}_k = \frac{1}{N-1} \sum_{i=k-N+1}^k (\zeta_i - \bar{\zeta}_k)(\zeta_i - \bar{\zeta}_k)^T - \frac{1}{N} \sum_{i=k-N+1}^k (\mathbf{F}_{i-1} \mathbf{P}_{i-1|i-1} \mathbf{F}_{i-1}^T - \mathbf{P}_{i|i}). \quad (9)$$

经过简单的数学变换, 式(9)可以重写为如下形式:

$$\mathbf{Q}_k = \frac{N-1}{N} \mathbf{X}_k + \Delta \mathbf{Q}_k. \quad (10)$$

其中

$$\mathbf{X}_k = \frac{N}{(N-1)^2} \sum_{i=k-N+1}^{k-1} (\zeta_i - \bar{\zeta}_k)(\zeta_i - \bar{\zeta}_k)^T - \frac{1}{N-1} \sum_{i=k-N+1}^{k-1} (\mathbf{F}_{i-1} \mathbf{P}_{i-1|i-1} \mathbf{F}_{i-1}^T - \mathbf{P}_{i|i}),$$

$$\Delta \mathbf{Q}_k = \frac{1}{N-1} (\zeta_k - \bar{\zeta}_k)(\zeta_k - \bar{\zeta}_k)^T - \frac{1}{N} (\mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T - \mathbf{P}_{k|k}).$$

根据极限的相关性质, 当  $N \rightarrow \infty$  时, 有  $N/(N-1)^2 \approx 1/(N-2)$  成立, 所以

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_k &\approx \frac{1}{N-2} \sum_{i=k-N+1}^{k-1} (\zeta_i - \bar{\zeta}_k)(\zeta_i - \bar{\zeta}_k)^T - \\ &\frac{1}{N-1} \sum_{i=k-N+1}^{k-1} (\mathbf{F}_{i-1} \mathbf{P}_{i-1|i-1} \mathbf{F}_{i-1}^T - \mathbf{P}_{i|i}). \end{aligned} \quad (11)$$

参照式(9)可知,  $\mathbf{Q}_{k-1}$  具有与式(11)等价的形式, 因此式(10)可重写为如下形式:

$$\mathbf{Q}_k = \frac{N-1}{N} \mathbf{Q}_{k-1} + \Delta \mathbf{Q}_k. \quad (12)$$

由此得到了过程噪声协方差的递推估计公式, 与式

(9)相比, 不再需要存储前  $N$  时刻的状态残差数据, 大大减小了计算负担, 提升了算法的效率.

采用相同的近似方法计算  $\bar{\zeta}_k$  如下:

$$\bar{\zeta}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=k-N+1}^k \zeta_i = \frac{1}{N} \sum_{i=k-N+1}^{k-1} \zeta_i + \frac{1}{N} \zeta_k,$$

并可得到  $\bar{\zeta}_k$  的递推计算公式

$$\bar{\zeta}_k = \frac{N-1}{N} \bar{\zeta}_{k-1} + \frac{1}{N} \zeta_k. \quad (13)$$

### 2.2 带有噪声递推估计的AKF算法

本小节将过程噪声递推估计方法引入KF中, 得到AKF算法, 可以有效解决过程噪声未知情况下线性系统的估计问题. 算法的具体流程如下:

1) 初始化, 即

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_0 &= E[\mathbf{x}_0], \\ \mathbf{P}_0 &= E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T], \\ \hat{\mathbf{Q}}_0 &= \mathbf{Q}_0, \hat{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{R}_0, \\ \zeta_0 &= \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0, \bar{\zeta}_0 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

2) 时间更新, 即

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \quad (15)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}. \quad (16)$$

3) 量测更新, 即

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}, \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}), \quad (18)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T, \quad (19)$$

其中  $\mathbf{I}_n$  为  $n$  阶单位矩阵.

4) 过程噪声协方差更新, 即

$$\zeta_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \quad (20)$$

$$\bar{\zeta}_k = \frac{N-1}{N} \bar{\zeta}_{k-1} + \frac{1}{N} \zeta_k, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Q}_k &= \frac{1}{N-1} (\zeta_k - \bar{\zeta}_k)(\zeta_k - \bar{\zeta}_k)^T - \\ &\frac{1}{N} (\mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T - \mathbf{P}_{k|k}), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\mathbf{Q}_k = \frac{N-1}{N} \mathbf{Q}_{k-1} + \Delta \mathbf{Q}_k. \quad (23)$$

### 2.3 带有噪声递推估计的AEnKF算法

本小节将过程噪声递推估计引入EnKF中, 得到AEnKF算法, 可以有效解决过程噪声未知情况下非线性系统的估计问题. 算法的具体流程如下:

1) 初始化. 初始化过程参照式(14), 初始状态集合  $\{\mathbf{x}_0^i\}_{i=1}^q$  中的样本服从均值为  $\hat{\mathbf{x}}_0$ 、协方差为  $\mathbf{P}_0$  的高斯分布.

2) 时间更新. 考虑非线性系统(1), 假定在 $k-1$ 时刻, 状态估计样本集合为 $\{\mathbf{x}_{k-1|k-1}^i\}_{i=1}^q$ , 状态一步预测样本集合为 $\{\mathbf{x}_{k|k-1}^i\}_{i=1}^q$ ,  $q$ 表示集合的样本个数, 并且

$$\mathbf{x}_{k|k-1}^i = f(\mathbf{x}_{k-1|k-1}^i) + \mathbf{w}_{k-1}^i, \quad (24)$$

其中 $\mathbf{w}_{k-1}^i$ 服从均值为 $\mathbf{0}$ 、协方差为 $\mathbf{Q}_{k-1}$ 的高斯分布. 状态一步预测均值为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \mathbf{x}_{k|k-1}^i. \quad (25)$$

定义状态一步预测误差

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i = \mathbf{x}_{k|k-1}^i - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \quad (26)$$

则一步预测误差协方差为

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^{xx} = \frac{1}{q-1} \sum_{i=1}^q \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{i,T}. \quad (27)$$

3) 量测更新. 在 $k$ 时刻, 状态一步预测集合 $\{\mathbf{x}_{k|k-1}^i\}_{i=1}^q$ 中每个样本对应的量测一步预测为

$$\mathbf{z}_{k|k-1}^i = h(\mathbf{x}_{k|k-1}^i), \quad (28)$$

量测一步预测均值由下式给出:

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \mathbf{z}_{k|k-1}^i. \quad (29)$$

定义量测预测误差

$$\tilde{\mathbf{z}}_{k|k-1}^i = \mathbf{z}_{k|k-1}^i - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}, \quad (30)$$

则状态与量测误差互协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k|k-1}^{xz}$ 和量测误差协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k|k-1}^{zz}$ 可计算如下:

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^{xz} = \frac{1}{q-1} \sum_{i=1}^q \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i \tilde{\mathbf{z}}_{k|k-1}^{i,T}, \quad (31)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^{zz} = \frac{1}{q-1} \sum_{i=1}^q \tilde{\mathbf{z}}_{k|k-1}^i \tilde{\mathbf{z}}_{k|k-1}^{i,T}. \quad (32)$$

由此可以得到滤波增益矩阵

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}^{xz} (\mathbf{P}_{k|k-1}^{zz})^{-1}. \quad (33)$$

状态一步预测集合样本的滤波估计值为

$$\mathbf{x}_{k|k}^i = \mathbf{x}_{k|k-1}^i + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k + \mathbf{v}_k^i - \mathbf{z}_{k|k-1}^i). \quad (34)$$

其中: $\mathbf{z}_k$ 为 $k$ 时刻的真实量测值, $\mathbf{v}_k^i$ 服从均值为 $\mathbf{0}$ 、协方差为 $\mathbf{R}_k$ 的高斯分布. 式(34)通过数据同化思想引入 $\mathbf{v}_k^i$ 旨在解决量测噪声随机性对滤波精度的不利影响, 从而滤波均值和协方差可由下面两式计算得到:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \mathbf{x}_{k|k}^i, \quad (35)$$

$$\mathbf{P}_{k|k}^{xx} = \frac{1}{q-1} \sum_{i=1}^q \tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^i \tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^{i,T}, \quad (36)$$

其中 $\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^i = \mathbf{x}_{k|k}^i - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ .

4) 过程噪声协方差更新. 即

$$\zeta_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \quad (37)$$

$$\bar{\zeta}_k = \frac{N-1}{N} \bar{\zeta}_{k-1} + \frac{1}{N} \zeta_k, \quad (38)$$

$$\Delta \mathbf{Q}_k = \frac{1}{N-1} (\zeta_k - \bar{\zeta}_k) (\zeta_k - \bar{\zeta}_k)^T - \frac{1}{N} (\mathbf{P}_{k|k-1}^{xx} - \mathbf{Q}_{k-1} - \mathbf{P}_{k|k}^{xx}), \quad (39)$$

$$\mathbf{Q}_k = \frac{N-1}{N} \mathbf{Q}_{k-1} + \Delta \mathbf{Q}_k. \quad (40)$$

其中: 式(39)是根据式(16)和(22)得出的, 这样做的目的是避免对非线性状态转移函数进行线性化, 在减小计算复杂度的同时进一步提高滤波精度.

### 3 自适应滤波算法的稳定性分析

本节主要分析算法的稳定性, 首先定义状态误差

$\xi_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ , 其中

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}, \quad (41)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}). \quad (42)$$

将式(41)和(42)两边分别相减, 可得到

$$\xi_k = (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{F}_{k-1} \xi_{k-1}. \quad (43)$$

**引理1**<sup>[9]</sup> 考虑线性化离散时间系统(2)和所提出的AKF算法, 对于任意时刻 $k \geq 1$ , 若有以下不等式成立:

$$\|\mathbf{e}_{z_{k|k}}\| < \|\mathbf{e}_{z_{k-1|k-1}}\|, \quad (44)$$

则该算法是稳定收敛的, 其中

$$\mathbf{e}_{z_{k|k}} = \mathbf{H}_k \xi_k + \mathbf{v}_k. \quad (45)$$

**引理2** 对于维度相同的非奇异方阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{C}$ , 有如下等式成立:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{C})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{C}^{-1})^{-1} \mathbf{A}^{-1}. \quad (46)$$

**证明** 根据Sherman-Morrison-Woodbury矩阵求逆引理

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1})^{-1} \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1}, \quad (47)$$

令矩阵 $\mathbf{B} = \mathbf{D} = \mathbf{I}$ , 其中 $\mathbf{I}$ 为维度与 $\mathbf{A}$ 相同的单位阵, 代入式(47)中便可以得到式(46).  $\square$

**定理1** 如果 $\mathbf{F}_{k-1}$ 是可逆矩阵, 一步预测协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 和滤波协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k|k}$ 是正定的, 则有如下不等式成立:

$$\mathbf{P}_{k|k}^{-1} \leq (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^{-T} \mathbf{F}_{k-1}^{-T} \mathbf{M} \mathbf{F}_{k-1}^{-1} (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^{-1}. \quad (48)$$

其中

$$M = P_{k-1|k-1}^{-1} - P_{k-1|k-1}^{-1}(P_{k-1|k-1}^{-1} + F_{k-1}^T Q_{k-1}^{-1} F_{k-1})^{-1} P_{k-1|k-1}^{-1}. \quad (49)$$

证明 根据式(19),有

$$P_{k|k} \geq (I_n - K_k H_k) P_{k|k-1} (I_n - K_k H_k)^T.$$

上式两边同时求逆,有

$$P_{k|k}^{-1} \leq (I_n - K_k H_k)^{-T} P_{k|k-1}^{-1} (I_n - K_k H_k)^{-1}, \quad (50)$$

其中一步预测协方差矩阵

$$P_{k|k-1} = F_{k-1} P_{k-1|k-1} F_{k-1}^T + Q_{k-1} = F_{k-1} (P_{k-1|k-1} + F_{k-1}^{-1} Q_{k-1} F_{k-1}^{-T}) F_{k-1}^T.$$

由引理2,对于矩阵  $P_{k-1|k-1}$  和  $F_{k-1}^{-1} Q_{k-1} F_{k-1}^{-T}$ ,有

$$(P_{k-1|k-1} + F_{k-1}^{-1} Q_{k-1} F_{k-1}^{-T})^{-1} = M,$$

因此,对  $P_{k|k-1}$  求逆,可以得到

$$P_{k|k-1}^{-1} = F_{k-1}^{-T} M F_{k-1}^{-1}. \quad (51)$$

将式(51)代入(50)便可得到(48).  $\square$

**定理2** 考虑线性化系统(2)和AKF算法,若存在大于0的实数  $a, b, c$  和  $\lambda_{\min}$  使下述不等式成立:

$$aI_n \leq P_{k-1|k-1} \leq bI_n, \quad (52)$$

$$\|F_{k-1}\| \leq c, \quad (53)$$

$$\frac{1}{b-a} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) > \frac{c^2}{\lambda_{\min}}, \quad (54)$$

则AKF算法是稳定收敛的.其中  $\lambda_{\min}$  是式(23)更新的噪声协方差矩阵的最小的特征值.

证明 定义  $k-1$  时刻的Lyapunov函数如下:

$$V(\xi_{k-1}) = \xi_{k-1}^T P_{k-1|k-1}^{-1} \xi_{k-1}. \quad (55)$$

同理可得

$$V(\xi_k) = \xi_k^T P_{k|k}^{-1} \xi_k. \quad (56)$$

显然  $V(0) = 0$ . 由式(52)和(55)可得

$$\frac{1}{b} \|\xi_{k-1}\|^2 \leq V(\xi_{k-1}) \leq \frac{1}{a} \|\xi_{k-1}\|^2. \quad (57)$$

根据式(43),(56)和定理1,有

$$V(\xi_k) \leq \xi_{k-1}^T M \xi_{k-1}, \quad (58)$$

则Lyapunov函数的变化率满足如下不等式:

$$\begin{aligned} \Delta V = V(\xi_k) - V(\xi_{k-1}) &\leq \\ \xi_{k-1}^T (M - P_{k-1|k-1}^{-1}) \xi_{k-1} &= \\ - \xi_{k-1}^T P_{k-1|k-1}^{-1} (P_{k-1|k-1}^{-1} + & \\ F_{k-1}^T Q_{k-1}^{-1} F_{k-1})^{-1} P_{k-1|k-1}^{-1} \xi_{k-1}. & \end{aligned}$$

结合式(52)和(53),有

$$\begin{aligned} \Delta V = V(\xi_k) - V(\xi_{k-1}) &\leq \\ - \frac{1}{b^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{c^2}{\lambda_{\min}}\right)} \|\xi_{k-1}\|^2. & \end{aligned} \quad (59)$$

根据式(57),式(59)可表示为

$$V(\xi_k) \leq \left(1 - \frac{a}{b^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{c^2}{\lambda_{\min}}\right)}\right) V(\xi_{k-1}),$$

从而可以得到

$$\|\xi_k\| \leq \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{1 - \frac{a}{b^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{c^2}{\lambda_{\min}}\right)}} \|\xi_{k-1}\|. \quad (60)$$

由式(54)可以推出

$$b^2(\lambda_{\min} + ac^2) - a^2 \lambda_{\min} < ab(\lambda_{\min} + ac^2). \quad (61)$$

将式(61)两边同时除以  $a\lambda_{\min}$ ,有

$$b^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{c^2}{\lambda_{\min}}\right) - a < ab \left(\frac{1}{a} + \frac{c^2}{\lambda_{\min}}\right), \quad (62)$$

再结合式(60),可以得到

$$\|\xi_k\| < \|\xi_{k-1}\|. \quad (63)$$

为了去掉范数符号,将不等式(63)两边同时乘以自身的转置,得

$$\xi_k \xi_k^T < \xi_{k-1} \xi_{k-1}^T.$$

取数学期望,有

$$E(\xi_k \xi_k^T) < E(\xi_{k-1} \xi_{k-1}^T).$$

根据式(2),假设量测函数为线性时不变,即  $H_k = H_{k-1} = H$ ,则有

$$\begin{aligned} E[(H_k \xi_k)(H_k \xi_k)^T + v_k v_k^T] &< \\ E[(H_{k-1} \xi_{k-1})(H_{k-1} \xi_{k-1})^T + v_{k-1} v_{k-1}^T]. & \end{aligned} \quad (64)$$

再根据噪声的不相关性,式(64)可以重写为

$$\begin{aligned} E[(H_k \xi_k)(H_k \xi_k)^T + v_k v_k^T + & \\ (H_k \xi_k) v_k^T + v_k (H_k \xi_k)^T] &< \\ E[(H_{k-1} \xi_{k-1})(H_{k-1} \xi_{k-1})^T + v_{k-1} v_{k-1}^T + & \\ (H_{k-1} \xi_{k-1}) v_{k-1}^T + v_{k-1} (H_{k-1} \xi_{k-1})^T]. & \end{aligned}$$

进一步,根据式(45)可得出

$$e_{z_{k|k}} e_{z_{k|k}}^T < e_{z_{k-1|k-1}} e_{z_{k-1|k-1}}^T,$$

即

$$\|e_{z_{k|k}}\| < \|e_{z_{k-1|k-1}}\|. \quad (65)$$

则由引理1可知,AKF算法是稳定收敛的.  $\square$

文献[5]已经证明,在给定足够多的样本时,对于线性系统,采用EnKF算法和KF算法进行估计得到的滤波均值和协方差是近似相等的,所以AEnKF算法也是稳定收敛的.而对于非线性系统滤波问题,由

于无法获得闭合解析解,本文将主要通过计算均方误差下界来评估AEnKF算法的性能,具体见下一节。

#### 4 误差分析

Cramér-Rao 下界 (CRLB) 被广泛应用于滤波器的性能评估,它提供了一个滤波器可能达到的最好的均方误差。 $k$ 时刻估计误差的CRLB有如下形式:

$$\text{CRLB}_k \triangleq \mathbf{J}_k^{-1}, \quad (66)$$

其中Fisher信息矩阵

$$\mathbf{J}_k = \mathbb{E} \left[ - \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}_{1:k}, \mathbf{z}_{1:k})}{\partial \mathbf{x}_k^2} \right].$$

引理3<sup>[1]</sup> 后验Fisher信息矩阵 $\mathbf{J}_k$ 的计算服从如下递推形式:

$$\mathbf{J}_k = \mathbf{D}_k^{22} - \mathbf{D}_k^{21} (\mathbf{J}_{k-1} + \mathbf{D}_k^{11})^{-1} \mathbf{D}_k^{12}. \quad (67)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_k^{11} &= \mathbb{E} \left\{ - \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}_{k-1}^2} \right\}, \\ \mathbf{D}_k^{12} &= \mathbb{E} \left\{ - \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}_{k-1} \partial \mathbf{x}_k} \right\}, \\ \mathbf{D}_k^{21} &= \mathbb{E} \left\{ - \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}_k \partial \mathbf{x}_{k-1}} \right\}, \\ \mathbf{D}_k^{22} &= \mathbb{E} \left\{ - \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}_k^2} \right\} + \\ &\quad \mathbb{E} \left\{ - \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k^2} \right\}. \end{aligned}$$

定理3 针对非线性系统(1),状态估计误差的CRLB由下式给出:

$$\text{CRLB}_k \triangleq \mathbf{J}_k^{-1}. \quad (68)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_k &= \mathbf{Q}_{k-1}^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k - \mathbf{Q}_{k-1}^{-1} \mathbf{F}_{k-1} (\mathbf{J}_{k-1} + \\ &\quad \mathbf{F}_{k-1}^T \mathbf{Q}_{k-1}^{-1} \mathbf{F}_{k-1})^{-1} \mathbf{F}_{k-1}^T \mathbf{Q}_{k-1}^{-1}, \end{aligned} \quad (69)$$

$\mathbf{F}_{k-1}$ 和 $\mathbf{H}_k$ 可以根据线性化系统模型(2)求出。

证明 对于系统(1),假设噪声服从高斯分布,则条件概率密度函数

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} |\mathbf{Q}_{k-1}|} \exp \left[ - \frac{\tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_k}{2} \right], \\ p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} |\mathbf{R}_k|} \exp \left[ - \frac{\tilde{\mathbf{z}}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \tilde{\mathbf{z}}_k}{2} \right]. \end{aligned}$$

其中: $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - f(\mathbf{x}_{k-1})$ ,  $\tilde{\mathbf{z}}_k = \mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k)$ 。

根据引理3,有

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_k^{11} &= \mathbf{F}_{k-1}^T \mathbf{Q}_{k-1}^{-1} \mathbf{F}_{k-1}, \quad \mathbf{D}_k^{12} = -\mathbf{F}_{k-1}^T \mathbf{Q}_{k-1}^{-1}, \\ \mathbf{D}_k^{21} &= -\mathbf{Q}_{k-1}^{-1} \mathbf{F}_{k-1}, \quad \mathbf{D}_k^{22} = \mathbf{Q}_{k-1}^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k. \end{aligned} \quad (70)$$

将式(70)代入(67),然后根据(66)便可得到(68)。□

#### 5 仿真分析

为了验证所提出算法的有效性,本节针对目标跟踪问题进行建模仿真分析。二维平面内目标运动的状态方程为

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ \dot{x}_k \\ \dot{y}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k, \quad (71)$$

量测方程为

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_k - s_x)^2 + (y_k - s_y)^2} \\ \text{atan} \left( \frac{x_k - s_x}{y_k - s_y} \right) \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k. \quad (72)$$

其中: $(x_k, y_k)$ 和 $(\dot{x}_k, \dot{y}_k)$ 分别为 $k$ 时刻目标的位置和速度, $T$ 为采样周期, $(s_x, s_y)$ 为传感器的位置。

本文采用位置均方根误差(RMSE)作为性能指标,在后面的仿真中对标准的EnKF算法和AEnKF算法的性能进行比较。 $k$ 时刻的位置RMSE定义如下:

$$\text{RMSE}_k = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\hat{x}_k^i - x_k^i)^2 + (\hat{y}_k^i - y_k^i)^2}. \quad (73)$$

其中: $M$ 为蒙特卡罗次数, $(x_k^i, y_k^i)$ 和 $(\hat{x}_k^i, \hat{y}_k^i)$ 分别为第 $i$ 次蒙特卡罗实验中 $k$ 时刻目标位置的真实值和滤波估计值。

对于本文仿真中研究的目标跟踪模型, $k$ 时刻位置RMSE的CRLB可由下式计算得到:

$$\text{CRLB}(\text{RMSE}_k) = \sqrt{\mathbf{J}_k^{-1}[1, 1] + \mathbf{J}_k^{-1}[2, 2]}. \quad (74)$$

其中: $\mathbf{J}_k$ 可以根据式(69)求出, $\mathbf{J}_{k|k}^{-1}[1, 1]$ 和 $\mathbf{J}_k^{-1}[2, 2]$ 分别表示矩阵 $\mathbf{J}_k^{-1}$ 主对角线上的第1和第2个元素。在求 $\mathbf{J}_k$ 时,由于量测方程(72)是非线性的,需要对其进行线性化处理。根据式(4)得到线性化的量测矩阵如下:

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \frac{x_k - s_x}{r} & \frac{y_k - s_y}{r} & 0 & 0 \\ \frac{y_k - s_y}{r^2} & -\frac{(x_k - s_x)}{r^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (75)$$

其中 $r = \sqrt{(x_k - s_x)^2 + (y_k - s_y)^2}$ ,表示 $k$ 时刻目标与传感器之间的距离。

目标的初始位置为(30 km, 30 km),初始速度为(100 m/s, 0 m/s),传感器位于(55 km, 55 km),采样周期设为 $T = 1$  s,仿真时长设为300 s。假设量测噪声协方差矩阵为 $\mathbf{R} = \text{diag}[(10 \text{ m})^2, (0.1^\circ)^2]$ 且已知。目标状态和状态误差协方差矩阵的初始值分别设为

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = [30.1 \text{ km}, 30.1 \text{ km}, 110 \text{ m/s}, 10 \text{ m/s}]^T,$$

$$\mathbf{P}_0 = \text{diag}[(100 \text{ m})^2, (100 \text{ m})^2, (10 \text{ m/s})^2, (10 \text{ m/s})^2].$$

假设过程噪声协方差矩阵未知,且真实值为

$$Q_{\text{true}} = \text{diag}[(1 \text{ m})^2, (1 \text{ m})^2, (0.1 \text{ m/s})^2, (0.1 \text{ m/s})^2].$$

分别采用标准的 EnKF 算法和 AEnKF 算法, 在初始过程噪声协方差  $Q_{\text{initial}}$  分别为  $Q_{\text{big}} = 10^4 Q_{\text{true}}$  和  $Q_{\text{small}} = 10^{-4} Q_{\text{true}}$  的条件下进行 100 次蒙特卡罗仿真, 集合样本数目设为  $q = 50$ , 得到的仿真结果如图 1~图 4 所示. 其中 CRLB 曲线表示距离 RMSE 的 Cramér-Rao 下界.

当初始过程噪声协方差  $Q_{\text{initial}}$  远大于真实值  $Q_{\text{true}}$  时, 采用 EnKF 算法和 AEnKF 算法估计得到的位置均方根误差如图 1 所示. 此时, 对于标准的 EnKF 算法而言, 每一时刻所采用的过程噪声协方差都是有偏的, 但由于  $Q_{\text{initial}} > Q_{\text{true}}$ , 相当于对未知的过程噪声协方差定义了上界, 所以能够保持收敛状态, 但是滤波精度严重下降; 而 AEnKF 算法通过噪声递推估计对噪声的统计特性进行实时修正, 使得状态估计能够快速跟踪上真实值并且保持稳定.

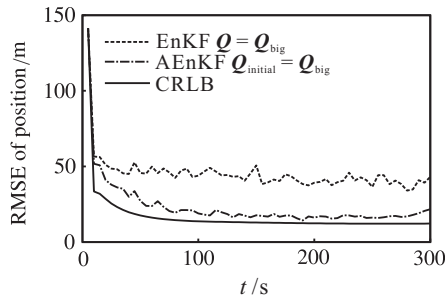


图 1 较大初始噪声协方差条件下采用 EnKF 和 AEnKF 估计得到的位置 RMSE 对比

图 2 为初始噪声协方差远小于真实值时采用两种算法估计得到的位置均方根误差. 可以看出, 在这种情况下, 标准 EnKF 算法的滤波精度迅速下降并逐渐趋于发散, 而 AEnKF 算法得到的结果依然能够保证稳定收敛. 大量仿真实验结果表明, 无论初始值设为  $Q_{\text{initial}} > Q_{\text{true}}$  还是  $Q_{\text{initial}} < Q_{\text{true}}$ , 采用 AEnKF 算法得到的估计结果均是稳定收敛的, 并且逐渐逼近 CRLB 曲线, 表明本文提出的算法具有很强的自适应性. 仿真结果与前面理论分析一致, 验证了所提出算法的有效性.

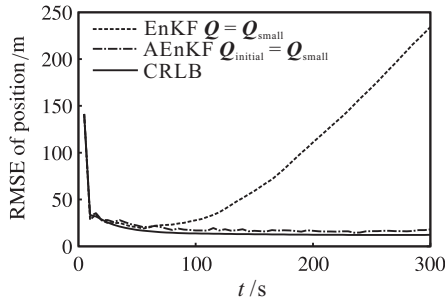


图 2 较小初始噪声协方差条件下采用 EnKF 和 AEnKF 估计得到的位置 RMSE 对比

图 3 和图 4 为采用 AEnKF 算法估计得到的协方差分量误差. 在两种初始条件下, 采用 AEnKF 算法对过程噪声协方差进行估计得到的结果最终都能收敛于真实值. 初始值  $Q_{\text{initial}}$  的选取会影响噪声协方差的收敛速度, 由于本文仿真中选取的  $Q_{\text{initial}}$  与真实值偏差较大, 收敛到真实值附近需要一定的时间. 另外一个影响收敛速度的因素是滑窗宽度  $N$  的选取, 由式 (12) 可知,  $N$  值越大, 表明过去的过程噪声协方差估计值  $Q_{k-1}$  在  $Q_k$  的更新中起到的作用越大, 反之则越小.

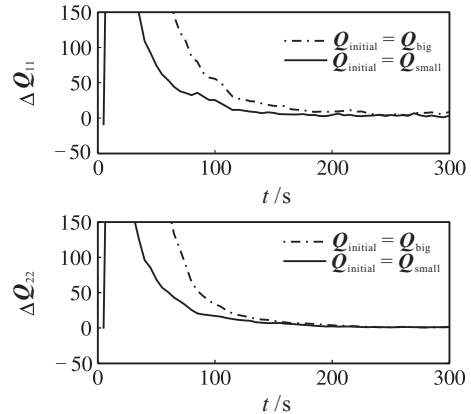


图 3 不同初始噪声协方差条件下采用 AEnKF 估计得到的协方差分量误差  $\Delta Q_{11}$  和  $\Delta Q_{22}$

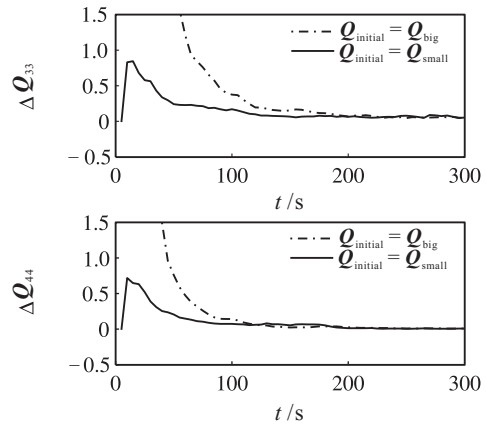


图 4 不同初始噪声协方差条件下采用 AEnKF 估计得到的协方差分量误差  $\Delta Q_{33}$  和  $\Delta Q_{44}$

## 6 结论

在过程噪声统计特性未知的情况下, 采用标准的 KF 算法对系统状态进行估计可能会产生较大的误差甚至导致滤波发散. 鉴于此, 本文首先根据协方差匹配原理建立了一种带有过程噪声递推估计的 AKF 算法, 并通过理论分析证明了其稳定收敛性. 随后, 将过程噪声递推估计方法引入 EnKF 算法中, 提出了 AEnKF 算法, 能够在线估计和修正过程噪声的统计特性. 仿真实验表明, AEnKF 算法可以有效地解决过程噪声未知情况下的非线性系统的状态估计问题, 其滤波效果明显优于标准的 EnKF 算法.

## 参考文献(References)

- [1] Lewis F L, Xie L, Popa D. Optimal and robust estimation: With an introduction to stochastic control theory[M]. Florida: CRC Press, 2007.
- [2] Chang G. Kalman filter with both adaptivity and robustness[J]. J of Process Control, 2014, 24(3): 81-87.
- [3] Xiong R, He H, Sun F, et al. Evaluation on state of charge estimation of batteries with adaptive extended Kalman filter by experiment approach[J]. IEEE Trans on Vehicular Technology, 2013, 62(1): 108-117.
- [4] Li W, Sun S, Jia Y, et al. Robust unscented Kalman filter with adaptation of process and measurement noise covariances[J]. Digital Signal Processing, 2016, 48(C): 93-103.
- [5] Dunik J, Straka O, Simandl M, et al. Random-point-based filters: Analysis and comparison in target tracking[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2015, 51(2): 1403-1421.
- [6] Evensen G. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics[J]. J of Geophysical Research: Oceans, 1994, 99(C5): 10143-10162.
- [7] Katzfuss M, Stroud J R, Wikle C K. Understanding the ensemble Kalman filter[J]. The American Statistician, 2016, 70(4): 350-357.
- [8] Simon D. Optimal state estimation: Kalman,  $H_{\infty}$ , and nonlinear approaches[M]. New York: John Wiley & Sons, 2006.
- [9] Al-Shabi M, Gadsden S A, Habibi S R. Kalman filtering strategies utilizing the chattering effects of the smooth variable structure filter[J]. Signal Processing, 2013, 93(2): 420-431.
- [10] 刘瑜,董凯,刘俊,等. 基于SRCKF的自适应高斯和状态滤波算法[J]. 控制与决策, 2014, 29(12): 2158-2164. (Liu Y, Dong K, Liu J, et al. Adaptive Gaussian sum method based on squared-root cubature Kalman filter for state estimation[J]. Control and Decision, 2014, 29(12): 2158-2164.)
- [11] Stojanovic V, Nedic N. Robust Kalman filtering for nonlinear multivariable stochastic systems in the presence of non-Gaussian noise[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2016, 26(3): 445-460.
- [12] Izanloo R, Fakoorian S A, Yazdi H S, et al. Kalman filtering based on the maximum correntropy criterion in the presence of non-Gaussian noise[C]. 2016 Annual Conf on Information Science and Systems. Princeton: IEEE, 2016: 500-505.
- [13] Chang L, Hu B, Chang G, et al. Multiple outliers suppression derivative-free filter based on unscented transformation[J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 2012, 35(6): 1902-1906.
- [14] Myers K, Tapley B D. Adaptive sequential estimation with unknown noise statistics[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1976, 21(4): 520-523.
- [15] Odelson B J, Rajamani M R, Rawlings J B. A new autocovariance least-squares method for estimating noise covariances[J]. Automatica, 2006, 42(2): 303-308.
- [16] Raghavan H, Tangirala A K, Gopaluni R B, et al. Identification of chemical processes with irregular output sampling[J]. Control Engineering Practice, 2006, 14(5): 467-480.
- [17] 胡振涛,张勇,刘先省. 基于量测迭代更新集合卡尔曼滤波的机动目标跟踪算法[J]. 控制理论与应用, 2014, 31(11): 1517-1523. (Hu Z T, Zhang Y, Liu X X. Maneuvering target tracking algorithm based on ensemble Kalman filter with observation iterated update[J]. Control Theory & Applications, 2014, 31(11): 1517-1523.)
- [18] Nemeth C, Fearnhead P, Mihaylova L. Sequential Monte Carlo methods for state and parameter estimation in abruptly changing environments[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2014, 62(5): 1245-1255.
- [19] Ding W, Wang J, Rizos C, et al. Improving adaptive Kalman estimation in GPS/INS integration[J]. The J of Navigation, 2007, 60(3): 517-529.
- [20] Shi E. An improved real-time adaptive Kalman filter for low-cost integrated GPS/INS navigation[C]. Proc of 2012 Int Conf on Measurement, Information and Control. Harbin: IEEE, 2012, 2: 1093-1098.
- [21] Dey A, Sadhu S, Ghoshal T K. Adaptive Gauss-Hermite filter for non-linear systems with unknown measurement noise covariance[J]. IET Science, Measurement & Technology, 2015, 9(8): 1007-1015.

(责任编辑: 孙艺红)