第 33卷 第 11期 控 制 与 决 策 Vol.33 No.11
2018年 11月 Control and Decision Nov. 2018
文章编号: 1001-0920(2018)11-1931-10 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2017.0852

属性值为三角模糊数的决策对象可能度关系模型

黄智力[1†], 罗 键[2]
(1. 厦门理工学院 经济与管理学院，福建 厦门 361024；2. 厦门大学 自动化系，福建 厦门 361005)

摘 要: 对于属性值是三角模糊数的不确定多属性决策问题,首先研究几组三角模糊数比较可能度公式之间的等价关系,提出三角模糊数比较优势关系理论,并得到一些优良性质关系和结论;然后借鉴离差最大化思想构建一种确定属性权重向量的三角模糊数型比较可能度关系模型,通过集结所有决策对象比较的可能度值,并对方案对象集进行优劣筛选和次序排定,得到一种新的三角模糊数多属性决策对象的可能度关系模型算法;最后通过算例分析验证所提出模型算法的可行性和实用性.

关键词: 不确定多属性决策；三角模糊数；可能度关系模型；属性权重
中图分类号: O159；TP182 **文献标志码:** A

Possibility degree relation model for decision making objects with multiple criteria values as triangular fuzzy number

HUANG Zhi-li[1†], *LUO Jian*[2]
(1. School of Economics and Management，Xiamen University of Technology，Xiamen 361024，China；2. Department of Automation，Xiamen University，Xiamen 361005，China)

Abstract: For the problem of uncertain multiple criteria decision making(UMCDM) of which the attribute value is triangular fuzzy number, firstly equivalent relations between several groups comparison possibility degree formulas of triangular fuzzy numbers are studied, comparative advantage relation theories of triangular fuzzy numbers are proposed, and some good properties, relations and conclusions are obtained. Then, by using the idea of maximizing deviations algorithm rules, a triangular fuzzy number-based comparison possibility degree relation model to determine the attribute weight vector is constructed. By aggregating the comparison possibility degree values of all decision objects, the set of alternatives objects is selected and scheduled, and a new model algorithm for the possibility degree relation of triangular fuzzy number-based multiple criteria decision making objects is obtained. Finally, an example is given to illustrate the feasibility and practicability of the proposed algorithm.

Keywords: uncertain multiple criteria decision making；triangular fuzzy number；possibility degree relation model；attribute weight

0 引 言

不确定多属性决策(Uncertain multi criteria decision making, UMCDM)是不确定决策与不完备信息系统研究领域的一类基本问题[1-2],已经被广泛研究并成功应用于经济、金融、能源、环境、电商竞争、研发竞赛、卡特尔行为等领域,如商业资源配置[3]、Iranian水泥行业评估[4]、能源工艺评价[5]、危害度评价[6]、医疗水平评估[7]、污水处理厂址选择[8]、土地利用与运输系统优化[9]、装备体系对抗[10]等. 在日常生产实践中遇到的决策问题或对象的粗糙模糊性、认知局限性、主观偏好性以及决策属性测量信息的不完备与不确定性,导致人们不能事先对决策问题或对象作出正确的判断,也很难用纯数学意义上的精确数或准确的语言值来表达这种待定决策问题或对象的不确定信息. 为此,文献[11-13]提出用三角模糊数刻画和描述模糊偏好信息以及模糊偏好关系的一致性对比判定方法,与以精确数为构成元素表示不确定信息的对比判定矩阵相比,更好地契合了环境的客观

收稿日期: 2017-06-30；**修回日期:** 2017-09-25.
基金项目: 国家自然科学基金面上项目(61473240, 60975052)；福建省社会科学规划项目(FJ2018B031)；厦门理工学院高层次人才引进项目(YKJ17004R).
责任编委: 李登峰.
作者简介: 黄智力(1983−), 男, 博士, 从事管理与决策支持系统的理论与技术的研究；罗键(1954−), 男, 教授, 博士生导师, 从事自动化智能信息系统以及系统建模、优化与决策等研究.
†通讯作者. E-mail: zhili_huang@hotmail.com

不确定性以及人们逻辑思维的主观模糊性;文献[14-15]分别从相似关系和相对相似关系研究了三角模糊数多属性决策对象问题,并给出相应的决策模型与算法;文献[16]提出了一种基于TOPSIS的区间直觉模糊集UMCDM的非线性规划方法;文献[17-18]均引入了可能性测度,是对传统概率测度[19]的推广,已成为模糊集[20]理论的一个重要发展分支,二者的区别在于可能性测度是否满足可加性. 因此,人们可以方便地利用可能性测度对表达或刻画不确定模糊概念的多个问题或对象的属性测度信息做类比推断的比较研究,并将其(可能性测度)大量应用在评估[3-6]、系统优化[8]、系统预测[21]、随机模拟[22]、模糊距离[23]和矩阵对策博弈[24-25]等不确定决策问题领域.

文献[1, 26]采用离差最大化模型赋权算法对决策对象集实施优劣筛选和排序,并都取得了不错的效果,但是它们只单纯考虑集结含有属性测度值偏差信息来扩大决策对象间的综合属性测度值差异,却缺乏考虑属性测度值间两两相互比较的可能度值信息在集结融合处理如UMCDM一类的不完备信息系统[1]评估中对属性自身的影响作用,易造成决策对象间优劣程度无法测定、综合属性值偏差大小无意义、决策结果十分相近、对象区分度过低等问题. 受上述问题的启示,针对属性测度值为三角模糊数的UMCDM问题,从可能度[27]的角度提出新的基于决策对象可能度关系模型的属性赋权规则:全体决策对象在同一属性测定下合成的总属性优势比较可能度值越大,说明该属性对决策对象优劣筛选所起重要性作用水平越高,应侧重关注并相应地增加该属性权重的度量值;反之,说明该属性对决策对象优劣筛选所起重要性作用水平越低,应相应地减小该属性权重的度量值. 由于决策对象间比较可能度值数据大的属性往往是造成决策对象的优劣次序排定发生变化的根源,为了使决策对象的属性测定值在最优权重作用下融合集结后得出的反映全体决策对象优劣的综合属性值差异最大化,从而更利于决策对象的优劣筛选,给出对决策对象集实施优劣次序排定的三角模糊数多属性决策对象的可能度关系模型算法.

1 三角模糊数可能度与比较优势关系理论

1.1 可能度等价关系式

定义1 若 $\tilde{x}=[x^L,x^M,x^U]=\{x|0<x^L\leqslant x^M\leqslant x^U,x,x^L,x^M,x^U\in R\}$,则称 $\tilde{x}$ 为一个三角模糊数(Triangular fuzzy number, TFN)[14-15]. 其中: x^L 和 x^U 是三角模糊数 $\tilde{x}$ 所支撑的下界和上界,一般称为 $\tilde{x}$ 的小元和大元; x^M 是三角模糊数 $\tilde{x}$ 所支撑的中值(即信息倾向偏好值,通常指在该区间内被选中机率最大的数),一般称为 $\tilde{x}$ 的特元. 若 $\tilde{x}$ 还满足 $0<x^L\leqslant x^M\leqslant x^U<1$,则称 $\tilde{x}$ 为一个规范三角模糊数. 如果 $x^L=x^M$ 或 $x^M=x^U$,则 $\tilde{x}=[x^L,x^M,x^U]$ 退化成一个区间数 $\tilde{x}=[x^M,x^U]$ 或 $\tilde{x}=[x^L,x^M]$;特别地,若 $x^L=x^M=x^U$,则 $\tilde{x}$ 退化成一个普通的正实数,即 $\tilde{x}=x^L=x^M=x^U$.

为了便于分析和研究,设 $\tilde{x}=[x^L,x^M,x^U]$, $\tilde{y}=[y^L,y^M,y^U]$,则界定有关三角模糊数的运算法则如下所示.

法则1 $\tilde{x}+\tilde{y}=[x^L+y^L,x^M+y^M,x^U+y^U]$.

法则2 $\dfrac{1}{\tilde{x}}=\Big[\dfrac{1}{x^U},\dfrac{1}{x^M},\dfrac{1}{x^L}\Big]$, $x^L,x^M,x^U\neq 0$.

法则3 $k\tilde{x}=[kx^L,kx^M,kx^U]$, $k\geqslant 0$.

法则4 $\tilde{x}\times\tilde{y}=[x^Ly^L,x^My^M,x^Uy^U]$.

法则5 当且仅当 $x^L=y^L,x^M=y^M,x^U=y^U$ 时,有 $\tilde{x}=\tilde{y}$.

法则6 当且仅当 $x^L\leqslant y^L,x^M\leqslant y^M,x^U\leqslant y^U$ 时,有 $\tilde{x}\leqslant\tilde{y}$.

定义2 设 $\tilde{x}=[x^L,x^M,x^U]$ 和 $\tilde{y}=[y^L,y^M,y^U]$ 同时为任意两个三角模糊数,或其中一个为三角模糊数,且 $l_{\tilde{x}}^{(1)}$ 和 $l_{\tilde{y}}^{(1)}$ 分别表示 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的上半取值长度, $l_{\tilde{x}}^{(2)}$ 和 $l_{\tilde{y}}^{(2)}$ 分别表示 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的下半取值长度,记

$$l_{\tilde{x}}^{(1)}=x^U-x^M,\ l_{\tilde{y}}^{(1)}=y^U-y^M,$$
$$l_{\tilde{x}}^{(2)}=x^M-x^L,\ l_{\tilde{y}}^{(2)}=y^M-y^L,$$

则称

$$p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=\lambda\frac{\max(x^M-y^L,0)-\max(x^L-y^M,0)}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+(1-\lambda)\frac{\max(x^U-y^M,0)-\max(x^M-y^U,0)}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}}\tag{1}$$

为 $\tilde{x}\geqslant\tilde{y}$ 的可能度(Possibility degree)[27],记 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的次序关系为 $\tilde{x}\underset{p}{\geqslant}\tilde{y}$. 类似地,称

$$p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})=\lambda\frac{\max(y^M-x^L,0)-\max(y^L-x^M,0)}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+(1-\lambda)\frac{\max(y^U-x^M,0)-\max(y^M-x^U,0)}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}}\tag{2}$$

为 $\tilde{y}\geqslant\tilde{x}$ 的可能度,记 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的次序关系为 $\tilde{y}\underset{p}{\geqslant}\tilde{x}$.

注1 λ 值的选择取决于决策者的风险态度:当 $\lambda>0.5$ 时,称决策者倾向于风险偏好型;当 $\lambda=0.5$ 时,称决策者倾向于风险中立型;当 $\lambda<0.5$ 时,称决策者倾向于风险规避型. 特别地,当 $\lambda=1$ 时,称 $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})$ 为 $\tilde{x}\geqslant\tilde{y}$ 的悲观可能度;当 $\lambda=0$ 时,称 $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})$ 为 $\tilde{x}\geqslant\tilde{y}$ 的乐观可能度[27].

类似于定义2的相关假定, 文献[27]分别给出了如下几组不同的可能度公式.

1)

$$p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=\lambda\frac{\min\{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)},\max(x^M-y^L,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+(1-\lambda)\frac{\min\{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)},\max(x^U-y^M,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}},\tag{3}$$

$$p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})=\lambda\frac{\min\{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)},\max(y^M-x^L,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+(1-\lambda)\frac{\min\{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)},\max(y^U-x^M,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}};\tag{4}$$

2)

$$p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=\lambda\min\left\{\max\left(\frac{x^M-y^L}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}},0\right),1\right\}+(1-\lambda)\min\left\{\max\left(\frac{x^U-y^M}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}},0\right),1\right\},\tag{5}$$

$$p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})=\lambda\min\left\{\max\left(\frac{y^M-x^L}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}},0\right),1\right\}+(1-\lambda)\min\left\{\max\left(\frac{y^U-x^M}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}},0\right),1\right\};\tag{6}$$

3)

$$p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=\lambda\frac{\max\{0,l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}-\max(y^M-x^L,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+(1-\lambda)\frac{\max\{0,l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}-\max(y^U-x^M,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}},\tag{7}$$

$$p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})=\lambda\frac{\max\{0,l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}-\max(x^M-y^L,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+(1-\lambda)\frac{\max\{0,l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}-\max(x^U-y^M,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}};\tag{8}$$

4)

$$p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=\lambda\max\left\{1-\max\left(\frac{y^M-x^L}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}},0\right),0\right\}+(1-\lambda)\max\left\{1-\max\left(\frac{y^U-x^M}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}},0\right),0\right\},\tag{9}$$

$$p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})=\lambda\max\left\{1-\max\left(\frac{x^M-y^L}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}},0\right),0\right\}+(1-\lambda)\max\left\{1-\max\left(\frac{x^U-y^M}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}},0\right),0\right\}.\tag{10}$$

对于本文界定的三角模糊数可能度定义和文献[27]给出的4种三角模糊数比较的可能度关系式, 可以证明下列结论[27]均成立.

定理1　设三角模糊数 $\tilde{x}=[x^L,x^M,x^U],\tilde{y}=[y^L,y^M,y^U]$, 则:

1) $0\leqslant p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})\leqslant 1, 0\leqslant p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})\leqslant 1$.

2) 当且仅当 $y^U\leqslant x^L$ 时, 有 $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=1$; 类似地, 当且仅当 $x^U\leqslant y^L$ 时, 有 $p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})=1$.

3) 当且仅当 $x^U\leqslant y^L$ 时, 有 $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=0$; 类似地, 当且仅当 $y^U\leqslant x^L$ 时, 有 $p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})=0$.

4) 互补性. $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})+p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})=1$, 特别地, $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{x})=0.5$.

5) 当 $\lambda=1$ 时, 当且仅当 $x^L+x^M\geqslant y^L+y^M$, 有 $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})\geqslant 0.5$; 特别地, 当且仅当 $x^L+x^M=y^L+y^M$, 有 $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=0.5$.

6) 当 $\lambda=0$ 时, 当且仅当 $x^M+x^U\geqslant y^M+y^U$, 有 $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})\geqslant 0.5$; 特别地, 当且仅当 $x^M+x^U=y^M+y^U$, 有 $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=0.5$.

7) 传递性. 对于3个三角模糊数 $\tilde{x}$、$\tilde{y}$、$\tilde{z}$, 若 $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})\geqslant 0.5$ 且 $p(\tilde{y}\geqslant\tilde{z})\geqslant 0.5$, 则 $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{z})\geqslant 0.5$.

由三角模糊数比较的可能度概念的界定可知, 定理1的结论成立, 证明略.

文献[27]已经研究了三角模糊数可能度4组公式即式(3)～(10)之间的关系, 证明它们之间是等价的. 事实上, 本文定义2新给出的三角模糊数可能度公式(即式(1)、(2))与式(3)～(10)也是等价的.

定理2　式(1)、(3)、(5)、(7)、(9)互为等价, 或者式(2)、(4)、(6)、(8)、(10)互为等价, 即式(1)⇔式(3)⇔式(5)⇔式(7)⇔式(9), 或者式(2)⇔式(4)⇔式(6)⇔式(8)⇔式(10).

证明　式(3)⇔式(5)⇔式(7)⇔式(9), 或者式(4)⇔式(6)⇔式(8)⇔式(10)的证明见文献[27], 这里只需证明式(1)⇔式(3)或者式(2)⇔式(4)即可. 首先证明式(1)⇔式(3). 由式(3)及定理1可能度的互补性可得

$$p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=1-p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})=\lambda+(1-\lambda)-\lambda\frac{\min\{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)},\max(y^M-x^L,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}-(1-\lambda)\frac{\min\{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)},\max(y^U-x^M,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}}=$$

$$\lambda\frac{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}-\min\{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)},\max(y^M-x^L,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+$$
$$(1-\lambda)\frac{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}-\min\{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)},\max(y^U-x^M,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}}=$$
$$\lambda\frac{\max\{0,l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}-\max(y^M-x^L,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+$$
$$(1-\lambda)\frac{\max\{0,l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}-\max(y^U-x^M,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}}=$$
$$\lambda\frac{\max\{0,x^M-y^L+y^M-x^L-\max(y^M-x^L,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+$$
$$(1-\lambda)\frac{\max\{0,x^U-y^M+y^U-x^M-\max(y^U-x^M,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}}=$$
$$\lambda\frac{\max\{0,x^M-y^L+\min(0,y^M-x^L)\}}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+$$
$$(1-\lambda)\frac{\max\{0,x^U-y^M+\min(0,y^U-x^M)\}}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}}=$$
$$\lambda\frac{\max\{0,x^M-y^L-\max(0,x^L-y^M)\}}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+$$
$$(1-\lambda)\frac{\max\{0,x^U-y^M-\max(0,x^M-y^U)\}}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}}.$$

由于
$$x^L\leqslant x^M\leqslant x^U,\ y^L\leqslant y^M\leqslant y^U,$$
有
$$x^L-y^M\leqslant x^L-y^L\leqslant x^M-y^L,$$
$$x^M-y^U\leqslant x^M-y^M\leqslant x^U-y^M.$$
因此
$$\lambda\frac{\max\{0,x^M-y^L-\max(0,x^L-y^M)\}}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+$$
$$(1-\lambda)\frac{\max\{0,x^U-y^M-\max(0,x^M-y^U)\}}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}}=$$
$$\lambda\frac{\max(x^M-y^L,0)-\max(x^L-y^M,0)}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+$$
$$(1-\lambda)\frac{\max(x^U-y^M,0)-\max(x^M-y^U,0)}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}}.$$
即
$$p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=$$
$$\lambda\frac{\max(x^M-y^L,0)-\max(x^L-y^M,0)}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+$$
$$(1-\lambda)\frac{\max(x^U-y^M,0)-\max(x^M-y^U,0)}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}}.$$
故式(1)$\Leftrightarrow$式(3)成立,即式(1)$\Leftrightarrow$式(3)$\Leftrightarrow$式(5)$\Leftrightarrow$式(7)$\Leftrightarrow$式(9)成立.

同理可证式(2)$\Leftrightarrow$式(4)成立,即式(2)$\Leftrightarrow$式(4)$\Leftrightarrow$式(6)$\Leftrightarrow$式(8)$\Leftrightarrow$式(10)成立. □

与文献[27]给出的式(3)～(10)相比,式(1)或(2)更加清晰、紧凑. 本文将利用式(1)或(2)创建三角模糊数比较的决策对象可能度关系模型,并基于该模型给出三角模糊数型决策矩阵中属性权重的确定方法.

定理3 设$\tilde{x}=[x^L,x^M,x^U]$和$\tilde{y}=[y^L,y^M,y^U]$同时为任意两个三角模糊数,或其中一个为三角模糊数,且$l_{\tilde{x}}^{(1)}$和$l_{\tilde{y}}^{(1)}$分别表示$\tilde{x}$和$\tilde{y}$的上半取值长度,$l_{\tilde{x}}^{(2)}$和$l_{\tilde{y}}^{(2)}$分别表示$\tilde{x}$和$\tilde{y}$的下半取值长度,记
$$l_{\tilde{x}}^{(1)}=x^U-x^M,\ l_{\tilde{y}}^{(1)}=y^U-y^M,$$
$$l_{\tilde{x}}^{(2)}=x^M-x^L,\ l_{\tilde{y}}^{(2)}=y^M-y^L.$$
若三角模糊数$\tilde{y}$保持固定不变,则$p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})$是三角模糊数$\tilde{x}$的单调非递减函数.

证明 任取两个非退化的三角模糊数$\tilde{x}_1=[x_1^L,x_1^M,x_1^U]$和$\tilde{x}_2=[x_2^L,x_2^M,x_2^U]$,且$\tilde{x}_1\leqslant\tilde{x}_2$,根据三角模糊数的运算法则6可得,$x_1^L\leqslant x_2^L,x_1^M\leqslant x_2^M,x_1^U\leqslant x_2^U$,且$l_{\tilde{x}_2}^{(2)}\leqslant l_{\tilde{x}_1}^{(2)}+x_2^M-x_1^M,l_{\tilde{x}_2}^{(1)}\leqslant l_{\tilde{x}_1}^{(1)}+x_2^U-x_1^U$. 根据定理2的结论,这里选用式(5)可以得到
$$p(\tilde{x}_2\geqslant\tilde{y})=$$
$$\lambda\min\Big\{\max\Big(\frac{x_2^M-y^L}{l_{\tilde{x}_2}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}},0\Big),1\Big\}+$$
$$(1-\lambda)\min\Big\{\max\Big(\frac{x_2^U-y^M}{l_{\tilde{x}_2}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}},0\Big),1\Big\}\geqslant$$
$$\lambda\min\Big\{\max\Big(\frac{x_2^M-y^L}{l_{\tilde{x}_1}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}+x_2^M-x_1^M},0\Big),1\Big\}+$$
$$(1-\lambda)\min\Big\{\max\Big(\frac{x_2^U-y^M}{l_{\tilde{x}_1}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}+x_2^U-x_1^U},0\Big),1\Big\}=$$
$$\lambda\min\Big\{\max\Big(\frac{x_1^M-y^L+x_2^M-x_1^M}{l_{\tilde{x}_1}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}+x_2^M-x_1^M},0\Big),1\Big\}+$$
$$(1-\lambda)\min\Big\{\max\Big(\frac{x_1^U-y^M+x_2^U-x1_1^U}{l_{\tilde{x}_1}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}+x_2^U-x_1^U},0\Big),1\Big\}\geqslant$$
$$\lambda\min\Big\{\max\Big(\frac{x_1^M-y^L}{l_{\tilde{x}_1}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}},0\Big),1\Big\}+$$
$$(1-\lambda)\min\Big\{\max\Big(\frac{x_1^U-y^M}{l_{\tilde{x}_1}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}},0\Big),1\Big\}=p(\tilde{x}_1\geqslant\tilde{y}).$$
即$p(\tilde{x}_2\geqslant\tilde{y})\geqslant p(\tilde{x}_1\geqslant\tilde{y})$,故$P(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})$是三角模糊数$\tilde{x}$的单调非递减函数. □

1.2 三角模糊数比较优势关系

定义3 设$\tilde{x}=[x^L,x^M,x^U]$和$\tilde{y}=[y^L,y^M,y^U]$同时为任意两个三角模糊数,若范数
$$\|\tilde{x}-\tilde{y}\|_{\rm TFN}=|x^L-y^L|+|\,x^M-y^M|+|x^U-y^U|,\tag{11}$$
则称$d_{\rm TFN}(\tilde{x},\tilde{y})=\|\tilde{x}-\tilde{y}\|_{\rm TFN}$为三角模糊数$\tilde{x}$与$\tilde{y}$的相离度(Deviation degree)[1-2,14]. 显然$d_{\rm TFN}(\tilde{x},\tilde{y})$越

大, $\tilde{x}$与$\tilde{y}$相离的程度越大. 特别地, 当$d_{\rm TFN}(\tilde{x},\tilde{y})=0$时, 有$\tilde{x}=\tilde{y}$, 即$\tilde{x}$和$\tilde{y}$相等.

假设已规范化的三角模糊数型决策矩阵为$\tilde{Z}=(\tilde{z}_{ij})_{n\times m}$, 其中$\tilde{z}_{ij}=[z_{ij}^L,z_{ij}^M,z_{ij}^U]$, $i\in N$, $j\in M$, 则有如下定义.

定义4 称$Z^{+*}=\{\tilde{z}_1^{+*},\tilde{z}_2^{+*},\cdots,\tilde{z}_m^{+*}\}$为正理想点序列构成的三角模糊数型正理想决策对象, 其中$\tilde{z}_j^{+*}=[z_j^{+*L},z_j^{+*M},z_j^{+*U}]=[\max\limits_i(z_{ij}^L),\max\limits_i(z_{ij}^M),\max\limits_i(z_{ij}^U)](j=1,2,\cdots,m)$为三角模糊数型正理想点[14-15], 该值越大越优; 称$Z^{-*}=\{\tilde{z}_1^{-*},\tilde{z}_2^{-*},\cdots,\tilde{z}_m^{-*}\}$为负理想点序列构成的三角模糊数型负理想决策对象, 其中$\tilde{z}_j^{-*}=[z_j^{-*L},z_j^{-*M},z_j^{-*U}]=[\min\limits_i(z_{ij}^L),\min\limits_i(z_{ij}^M),\min\limits_i(z_{ij}^U)](j=1,2,\cdots,m)$为三角模糊数型负理想点[14-15], 该值越小越劣.

定义5 设$\tilde{x}=[x^L,x^M,x^U]$和$\tilde{y}=[y^L,y^M,y^U]$为任意两个三角模糊数, $\tilde{z}^{+*}=[z^{+*L},z^{+*M},z^{+*U}]$和$\tilde{z}^{-*}=[z^{-*L},z^{-*M},z^{-*U}]$分别为三角模糊数型正、负理想点, 若

$$d_{\rm TFN}(\tilde{x},\tilde{z}^{+*})<d_{\rm TFN}(\tilde{y},\tilde{z}^{+*}),\tag{12}$$

或

$$d_{\rm TFN}(\tilde{x},\tilde{z}^{-*})>d_{\rm TFN}(\tilde{y},\tilde{z}^{-*}),\tag{13}$$

则称三角模糊数$\tilde{x}$更占优势[2,14], 记为$\tilde{x}\succ\tilde{y}$. 显然, 与三角模糊数型正理想点的相离度越小, 或者与三角模糊数型负理想点的相离度越大, 对应三角模糊数的优势度越大.

定理4 1) 当且仅当三角模糊数型正理想点为最优决策点进行优劣决策时, 有

$$\tilde{x}\succ\tilde{y}\Leftrightarrow\begin{cases}d_{\rm TFN}(\tilde{x},\tilde{z}^{+*})<d_{\rm TFN}(\tilde{y},\tilde{z}^{+*}),\\ x^L+x^M+x^U>y^L+y^M+y^U,\\ p(\tilde{x}\geqslant\tilde{z}^{+*})>p(\tilde{y}\geqslant\tilde{z}^{+*}),\\ p(\tilde{z}^{+*}\geqslant\tilde{x})<p(\tilde{z}^{+*}\geqslant\tilde{y});\end{cases}\tag{14}$$

2) 当且仅当三角模糊数型负理想点为最优决策点进行优劣决策时, 有

$$\tilde{x}\succ\tilde{y}\Leftrightarrow\begin{cases}d_{\rm TFN}(\tilde{x},\tilde{z}^{-*})>d_{\rm TFN}(\tilde{y},\tilde{z}^{-*}),\\ x^L+x^M+x^U>y^L+y^M+y^U,\\ p(\tilde{x}\geqslant\tilde{z}^{-*})>p(\tilde{y}\geqslant\tilde{z}^{-*}),\\ p(\tilde{z}^{-*}\geqslant\tilde{x})<p(\tilde{z}^{-*}\geqslant\tilde{y}).\end{cases}\tag{15}$$

根据定义3～定义5及定理3的结论易证定理4成立, 证明过程略. 该定理表明三角模糊数间优势关系的判别可以通过计算三角模糊数同理想点的相离度值大小、比较可能度值大小或者比较三角模糊数小元、特元和大元的属性值和大小来确定.

定义6 设$X=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_m\}$和$Y=\{\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\cdots,\tilde{y}_m\}$为三角模糊数序列构成的供选决策对象, $Z^{+*}=\{\tilde{z}_1^{+*},\tilde{z}_2^{+*},\cdots,\tilde{z}_m^{+*}\}$和$Z^{-*}=\{\tilde{z}_1^{-*},\tilde{z}_2^{-*},\cdots,\tilde{z}_m^{-*}\}$为正、负理想点序列构成的三角模糊数型正、负理想决策对象. 其中: $\tilde{x}_j=[x_j^L,x_j^M,x_j^U]$, $\tilde{y}_j=[y_j^L,y_j^M,y_j^U]$, $\tilde{z}_j^{+*}=[z_j^{+*L},z_j^{+*M},z_j^{+*U}]$, $\tilde{z}_j^{-*}=[z_j^{-*L},z_j^{-*M},z_j^{-*U}]$, $j=1,2,\cdots,m$. 若

$$\sum_{j=1}^m d_{\rm TFN}(\tilde{x}_j,\tilde{z}_j^{+*})<\sum_{j=1}^m d_{\rm TFN}(\tilde{y}_j,\tilde{z}_j^{+*}),\tag{16}$$

或

$$\sum_{j=1}^m d_{\rm TFN}(\tilde{x}_j,\tilde{z}_j^{-*})>\sum_{j=1}^m d_{\rm TFN}(\tilde{y}_j,\tilde{z}_j^{-*}),\tag{17}$$

则称供选决策对象X更占优[2,14], 记为$X\succ Y$. 显然, 与正理想决策对象、正理想点序列的相离度之和越小, 或者与负理想决策对象、负理想点序列的相离度之和越大, 对应供选决策对象的优势度越大.

定理5 1) 当且仅当三角模糊数型正理想决策对象为最优供选对象实施优劣决策时, 有

$$X\succ Y\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^m d_{\rm TFN}(\tilde{x}_j,\tilde{z}_j^{+*})<\sum\limits_{j=1}^m d_{\rm TFN}(\tilde{y}_j,\tilde{z}_j^{+*}),\\ d_{\rm TFN}\Big(\sum\limits_{j=1}^m\tilde{x}_j,\sum\limits_{j=1}^m\tilde{z}_j^{+*}\Big)<d_{\rm TFN}\Big(\sum\limits_{j=1}^m\tilde{y}_j,\sum\limits_{j=1}^m\tilde{z}_j^{+*}\Big),\\ \sum\limits_{j=1}^m(x_j^L+x_j^M+x_j^U)>\sum\limits_{j=1}^m(y_j^L+y_j^M+y_j^U),\\ p\Big(\sum\limits_{j=1}^m\tilde{x}_j\geqslant\sum\limits_{j=1}^m\tilde{z}_j^{+*}\Big)>p\Big(\sum\limits_{j=1}^m\tilde{y}_j\geqslant\sum\limits_{j=1}^m\tilde{z}_j^{+*}\Big),\\ p\Big(\sum\limits_{j=1}^m\tilde{z}_j^{+*}\geqslant\sum\limits_{j=1}^m\tilde{x}_j\Big)<p\Big(\sum\limits_{j=1}^m\tilde{z}_j^{+*}\geqslant\sum\limits_{j=1}^m\tilde{y}_j\Big);\end{cases}\tag{18}$$

2) 当且仅当三角模糊数型负理想决策对象为最优供选对象实施优劣决策时, 有

$$X\succ Y\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^m d_{\rm TFN}(\tilde{x}_j,\tilde{z}_j^{-*})>\sum\limits_{j=1}^m d_{\rm TFN}(\tilde{y}_j,\tilde{z}_j^{-*}),\\ d_{\rm TFN}\Big(\sum\limits_{j=1}^m\tilde{x}_j,\sum\limits_{j=1}^m\tilde{z}_j^{-*}\Big)>d_{\rm TFN}\Big(\sum\limits_{j=1}^m\tilde{y}_j,\sum\limits_{j=1}^m\tilde{z}_j^{-*}\Big),\\ \sum\limits_{j=1}^m(x_j^L+x_j^M+x_j^U)>\sum\limits_{j=1}^m(y_j^L+y_j^M+y_j^U),\\ p\Big(\sum\limits_{j=1}^m\tilde{x}_j\geqslant\sum\limits_{j=1}^m\tilde{z}_j^{-*}\Big)>p\Big(\sum\limits_{j=1}^m\tilde{y}_j\geqslant\sum\limits_{j=1}^m\tilde{z}_j^{-*}\Big),\\ p\Big(\sum\limits_{j=1}^m\tilde{z}_j^{-*}\geqslant\sum\limits_{j=1}^m\tilde{x}_j\Big)<p\Big(\sum\limits_{j=1}^m\tilde{z}_j^{-*}\geqslant\sum\limits_{j=1}^m\tilde{y}_j\Big).\end{cases}\tag{19}$$

定理5的实质是将属性值为三角模糊数系列的决策对象优劣次序排定问题转化为对决策对象综合属性值三角模糊数的优势比较次序排定问题, 证明过

程略. 该定理表明供选决策对象间优势关系的判别可以通过计算决策对象属性值序列与理想决策对象、理想点序列的相离度之和的大小,或者计算决策对象属性值序列之和与理想决策对象理想点序列之和的相离度值的大小、比较可能度值大小,或者比较供选决策对象的三角模糊数小元、特元和大元的属性值序列之和大小来确定.

2 三角模糊数型决策对象可能度关系模型

借鉴离差最大化[26]思想的相关理论,引入一种新的基于决策对象可能度关系模型的属性赋权规则[2]:在求解属性效用测度值为三角模糊数并对决策对象信息无偏好的UMCDM问题过程中,若最终决策者不仅考虑了决策对象属性效用值偏差大小本身的重要性程度,还考虑了属性效用值比较可能度大小信息,则当所有决策对象属性效用值间的比较可能度求和而合成的属性间优势比较可能度值总和越大时,对属性权重的赋值也应相应变大;反之,对属性权重的赋值也应相应变小. 这样处理的目的是让全体决策对象的属性效用测度值在基于决策对象可能度关系模型所确定出的最优属性权重信息作用下融合与集结后,每个决策对象的综合属性效用值数据实现了差异的扩大和最优化,更便于对决策对象集$\{X_i\}(i \in N)$进行优劣筛选和次序排定. 为此,假设全体供选决策对象X_i关于各属性u_j的初始效用测定值$\tilde{x}_{ij}(\tilde{x}_{ij} = [x_{ij}^L, x_{ij}^M, x_{ij}^U])$构成的矩阵$\tilde{X} = (\tilde{x}_{ij})_{n\times m}$称为初始三角模糊数型决策矩阵. 设$I_t(t = 1, 2)$分别表示效益型、成本型属性的下标集,且令$M = \{1, 2, \cdots, m\}$, $N = \{1, 2, \cdots, n\}$. 为统一不同属性效用值数据间的不可公度性及矛盾性,可将$\tilde{X}$按下式转换成规范三角模糊数型决策矩阵$\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$[2,14-15]:

$$\tilde{r}_{ij} = \tilde{x}_{ij}/\parallel \tilde{x}_j \parallel, i \in N,\ j \in I_1, \tag{20}$$

$$\tilde{r}_{ij} = (1/\tilde{x}_{ij})/\parallel (1/\tilde{x}_j) \parallel, i \in N,\ j \in I_2. \tag{21}$$

其中: $\tilde{r}_{ij} = [r_{ij}^L, r_{ij}^M, r_{ij}^U]$, $||\cdot||$表示向量的范数, $||\tilde{x}_j|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \tilde{x}_{ij}^2}$, $\parallel (1/\tilde{x}_j) \parallel = \sqrt{\sum_{i=1}^n (1/\tilde{x}_{ij})^2}$. 依据三角模糊数运算法则,通常把式(20)和(21)改写成

$$\begin{cases} r_{ij}^L = x_{ij}^L \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{ij}^U)^2}, \\ r_{ij}^M = x_{ij}^M \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{ij}^M)^2}, \\ r_{ij}^U = x_{ij}^U \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{ij}^L)^2}, \end{cases}$$
$$i \in N, j \in I_1; \tag{22}$$

$$\begin{cases} r_{ij}^L = (1/x_{ij}^U) \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^n (1/x_{ij}^L)^2}, \\ r_{ij}^M = (1/x_{ij}^M) \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^n (1/x_{ij}^M)^2}, \\ r_{ij}^U = (1/x_{ij}^L) \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^n (1/x_{ij}^U)^2}, \end{cases}$$
$$i \in N, j \in I_2. \tag{23}$$

根据三角模糊数可能度与比较优势关系理论,在规范三角模糊数型决策矩阵$\tilde{R}$中,只考虑对于第j个属性u_j情形下,属性u_j与属性u_k在全体决策对象下的优势比较可能度之和为

$$p_k(u_j \succ u_k) = \sum_{i=1}^n p(u_j^{X_i} \succ u_k^{X_i}) = \sum_{i=1}^n p(\tilde{r}_{ij} \geqslant \tilde{r}_{ik}),$$
$$i \in N,\ k, j \in M. \tag{24}$$

于是,属性u_j与其他属性的优势比较可能度总和为

$$p(u_j) = \sum_{k=1,k\neq j}^m p_k(u_j \succ u_k) = \sum_{k=1,k\neq j}^m \sum_{i=1}^n p(\tilde{r}_{ij} \geqslant \tilde{r}_{ik}),$$
$$i \in N,\ k, j \in M. \tag{25}$$

针对属性效用值为三角模糊数且属性权重信息完全未知的UMCDM问题,不妨假设其属性权重向量为$\boldsymbol{W} = (w_1, w_2, \cdots, w_m)$, $0 \leqslant w_j \leqslant 1, j \in M$,并满足单位化约束条件$\sum_{j=1}^m w_j^2 = 1$.

依据本文提出的基于三角模糊数型可能度关系模型的属性赋权规则,考虑到决策者对决策对象无偏好的情况下,最优权重向量$\boldsymbol{W}$的确定应使得在全体决策对象下全体决策属性的比较可能度总和在加权向量$\boldsymbol{W}$作用下的加权和最大[2]. 为此,构造下列UMCDM的三角模糊数型决策对象可能度关系模型(Triangular fuzzy number-based decision making object possibility degree relation model, TFN-DMOPDRM):

$$\max F(\boldsymbol{W}) = \sum_{j=1}^m p(u_j)\cdot w_j = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1,k\neq j}^m \sum_{i=1}^n p(\tilde{r}_{ij} \geqslant \tilde{r}_{ik})\cdot w_j.$$
$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^m w_j^2 = 1,\ w_j \geqslant 0,\ i \in N,\ k, j \in M. \tag{26}$$

求解此最优化模型,得到最优解为

$$w_j^* = \frac{\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} p(\tilde{r}_{ij} \geqslant \tilde{r}_{ik})}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m}\Big[\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} p(\tilde{r}_{ij} \geqslant \tilde{r}_{ik})\Big]^2}},$$
$$i \in N,\ k,j \in M. \tag{27}$$

为保持与传统归一化使用一致, 可按照

$$w_j = w_j^* \Big/ \sum_{j=1}^{m} w_j^*,\ j \in M$$

对单位化权重向量 w_j^* 作归一化处理,即得属性最优权重值为

$$w_j = \frac{\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} p(\tilde{r}_{ij} \geqslant \tilde{r}_{ik})}{\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} p(\tilde{r}_{ij} \geqslant \tilde{r}_{ik})},$$
$$i \in N,\ k,j \in M. \tag{28}$$

由式(28)易知,在全体备选决策对象下指标属性间的比较可能度值总和与该属性权重值大小成正比关系.

3 模型实施步骤及算例

本文给出的UMCDM三角模糊数型决策对象可能度关系模型(TFN-DMOPDRM)实施步骤如下.

Step 1: 为消除不同物理量纲对决策对象优劣判定作用的影响,必须先统一属性效用值数据间的不可公度性及矛盾性,将初始三角模糊数型决策矩阵 $\tilde{X}$ 按式(22)和(23)转换成规范三角模糊数型决策矩阵 $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$,其中 $\tilde{r}_{ij} = [r_{ij}^L, r_{ij}^M, r_{ij}^U]$ 为规范三角模糊数[2].

Step 2: 按照本文新界定的可能度定义,分析测定蕴涵在规范三角模糊数型决策矩阵 $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ 中能够反映各决策对象属性特征值间的比较可能度关系,然后根据构造出的TFN-DMOPDRM,按式(28)将式(1)和(2)测定出的不同属性效用值数据间的比较可能度值信息融合集结确定出属性权重向量 $\boldsymbol{W}$.

Step 3: 将在Step 2中求得的属性权重向量 $\boldsymbol{W}$ 作用于Step 1中所转换成的规范三角模糊数型决策矩阵 $\tilde{R}$,称由此构造出的矩阵

$$\tilde{R}(\boldsymbol{W}) = (\tilde{r}_{ij}\cdot w_j)_{n\times m} \tag{29}$$

为加权规范三角模糊数型决策矩阵[2]. 然后根据已获得的加权规范三角模糊数型决策矩阵 $\tilde{R}(\boldsymbol{W})$ 按下式求出各决策对象 $X_i(i \in N)$ 的加权综合属性值:

$$\tilde{z}_i(\boldsymbol{W}) = \sum_{j=1}^{m} w_j \tilde{r}_{ij}. \tag{30}$$

为考察各决策对象间的优势比较可能度关系,将式(30)计算出的各决策对象加权综合属性值按式(1)和(2)进行两两优势比较,称

$$p(X_i \succ X_k) = p(\tilde{z}_i(\boldsymbol{W}) \geqslant \tilde{z}_k(\boldsymbol{W})) \tag{31}$$

为决策对象 X_i 优于决策对象 X_k 的比较可能度[27],称由式(31)构成的矩阵

$$P_{n\times n} = p(X_i \succ X_k)_{n\times n} \tag{32}$$

为决策对象间两两优势比较测定出的可能度关系矩阵[27],称

$$\mu(X_i^{\succ}) = \frac{1}{n-1}\sum_{k\neq i}^{n} p(X_i \succ X_k), i,k \in N \tag{33}$$

为决策对象 X_i 在供选对象集 $\{X_i\}(i \in N)$ 两两优势比较测定出的可能度矩阵信息集结融合下的总体比较可能度[27].

Step 4: 运用式(30)～(33)求得决策对象 X_i 在供选对象间两两优势比较测定出的可能度矩阵信息集结融合下的总体比较可能度值 $\mu(X_i^{\succ}),\ i \in N$.

Step 5: 将根据Step 4获得的总体比较可能度值 $\mu(X_i^{\succ})$ 按从大到小的次序对决策对象集 $\{X_i\}(i \in N)$ 实施优劣筛选和排定.

算例1 为了说明TFN-DMOPDRM的实用性和有效性,这里采用文献[28]中舰载机机型优劣排序问题实例进行分析. 影响舰载机机型的性能参数有最大航速(u_1)、越海自由航程(u_2)、最大净载荷(u_3)、购置费(u_4)、可靠性(u_5)和机动灵活性(u_6)6个方面,现有4种机型 $X_i(i = 1,2,\cdots,4)$ 可供选择, 假定经过规范化统计处理后,各机型性能参数在各指标(属性)下的效用测度值以三角模糊数形式表示(给出的数据均是效益型数据),具体如表1所示[28].

表 1 规范化决策信息表

候选机型	u_1	u_2	u_3
X_1	[0.78, 0.80, 0.85]	[0.50, 0.55, 0.58]	[0.90, 0.95, 0.95]
X_2	[0.92, 0.95, 1.00]	[0.95, 0.97, 1.00]	[0.85, 0.86, 0.88]
X_3	[0.70, 0.72, 0.78]	[0.72, 0.74, 0.75]	[0.95, 0.98, 1.00]
X_4	[0.85, 0.88, 0.90]	[0.65, 0.67, 0.70]	[0.90, 0.95, 0.96]

候选机型	u_4	u_5	u_6
X_1	[0.80, 0.82, 0.85]	[0.45, 0.50, 0.57]	[0.90, 0.95, 0.97]
X_2	[0.65, 0.69, 0.71]	[0.17, 0.20, 0.23]	[0.47, 0.51, 0.55]
X_3	[0.94, 0.97, 1.00]	[0.80, 0.83, 0.85]	[0.80, 0.82, 0.85]
X_4	[0.85, 0.90, 0.93]	[0.46, 0.50, 0.52]	[0.48, 0.50, 0.52]

假定经过式(22)和(23)规范化统计处理后得到的规范三角模糊数型决策矩阵 $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ 如表1所示,利用式(1)和(2)求出表1中不同属性效用测度值数据间的比较可能度值(为了便于决策对象的优劣判定和次序排定,这里不妨取 $\lambda = 0.5$,即决策者是属于风险中立型的). 然后根据构造出的TFN-DMOPDRM,按式(28)将不同属性间的比较可能度值信息融合集结确定出属性权重向量为

$\boldsymbol{W}=$

$(0.164\,1,0.140\,5,0.281\,4,0.216\,5,0.051\,9,0.145\,6)^{\mathrm{T}}$.

之后根据式(29)将属性权重向量$\boldsymbol{W}$作用于表1,即规范三角模糊数型决策矩阵$\tilde{R}$, 以此构造出加权规范三角模糊数型决策矩阵$\tilde{R}(\boldsymbol{W})$如表2所示.

表 2 加权规范化决策信息表 $\times 10^{-1}$

候选机型	u_1	u_2
X_1	[1.280, 1.313, 1.395]	[0.703, 0.773, 0.815]
X_2	[1.510, 1.559, 1.641]	[1.335, 1.363, 1.405]
X_3	[1.149, 1.182, 1.280]	[1.012, 1.040, 1.054]
X_4	[1.395, 1.444, 1.477]	[0.914, 0.942, 0.984]
候选机型	u_3	u_4
X_1	[2.533, 2.673, 2.673]	[1.732, 1.776, 1.840]
X_2	[2.392, 2.420, 2.476]	[1.407, 1.494, 1.537]
X_3	[2.673, 2.758, 2.814]	[2.035, 2.100, 2.165]
X_4	[2.533, 2.673, 2.701]	[1.840, 1.949, 2.014]
候选机型	u_5	u_6
X_1	[0.234, 0.260, 0.296]	[1.310, 1.383, 1.412]
X_1	[0.088, 0.104, 0.119]	[0.684, 0.742, 0.801]
X_1	[0.416, 0.431, 0.442]	[1.164, 1.194, 1.237]
X_1	[0.239, 0.260, 0.270]	[0.699, 0.728, 0.757]

按式(30)计算出全体决策对象$X_i(i=1,2,\cdots,4)$的加权综合属性效用值如下:

$$\tilde{z}_1(\boldsymbol{w})=[7.791,8.177,8.432]\times 10^{-1},$$
$$\tilde{z}_2(\boldsymbol{w})=[7.417,7.683,7.980]\times 10^{-1},$$
$$\tilde{z}_3(\boldsymbol{w})=[8.449,8.704,8.992]\times 10^{-1},$$
$$\tilde{z}_4(\boldsymbol{w})=[7.619,7.996,8.203]\times 10^{-1}.$$

采用式(31)和(32)建立决策对象$X_i(i=1,2,\cdots,4)$间两两优势比较测定出的可能度关系矩阵为

$$P_{4\times 4}=\begin{bmatrix}0.5 & 1 & 0 & 0.838\,2\\ 0 & 0.5 & 0 & 0.049\,4\\ 1 & 1 & 0.5 & 1\\ 0.161\,8 & 0.950\,6 & 0 & 0.5\end{bmatrix}.$$

运用式(33)求出决策对象X_i在可能度矩阵信息集结融合下的总体比较可能度值$\mu(X_i^{\succ})$ $(i=1,2,\cdots,4)$分别为

$$\mu(X_1^{\succ})=0.612\,7,\ \mu(X_2^{\succ})=0.016\,5,$$
$$\mu(X_3^{\succ})=1.000\,0,\ \mu(X_4^{\succ})=0.370\,8.$$

根据总体比较可能度$\mu(X_i^{\succ})$值按从大到小的次序对决策对象集$\{X_i\}$ $(i=1,2,\cdots,4)$实施优劣筛选和排定为

$$X_3\underset{1.000\,0}{\succ}X_1\underset{0.838\,2}{\succ}X_4\underset{0.950\,6}{\succ}X_2.$$

故X_3为最优候选机型,结果与文献[28]的结论一致.

上述算例除了采用各决策对象间的优势比较可能度关系模型算法外,亦可采用本文定理5的结论实施优劣判定. 首先,根据表2中的属性值数据$\tilde{R}(\boldsymbol{W})$, 按照定义4求出由三角模糊数型正负理想点序列分别构成的正负理想决策对象Z^{+*}和Z^{-*}如下:

$Z^{+*}=$
$\{[1.510,1.559,1.641],[1.335,1.363,1.405],$
$[2.673,2.758,2.814],[2.035,2.100,2.165],$
$[0.416,0.431,0.442],[1.310,1.383,1.412]\}\times 10^{-1}$;

$Z^{-*}=$
$\{[1.149,1.182,1.280],[0.703,0.773,0.815],$
$[2.392,2.420,2.476],[1.407,1.494,1.537],$
$[0.088,0.104,0.119],[0.684,0.728,0.757]\}\times 10^{-1}$.

然后利用式(30)计算出正负理想决策对象Z^{+*}和Z^{-*}的加权综合理想属性值为

$$\tilde{z}^{+*}(\boldsymbol{W})=[9.279,9.594,9.879]\times 10^{-1},$$
$$\tilde{z}^{-*}(\boldsymbol{W})=[6.423,6.700,6.985]\times 10^{-1}.$$

最后根据Step 3所求的各决策对象$X_i(i\in N)$的加权综合属性效用值, 容易计算出如下结果:

$$\sum_{j=1}^{6}d_{\mathrm{TFN}}(\tilde{x}_{1u_j}^{w},\tilde{z}_{u_j}^{+*})=d_{\mathrm{TFN}}\Big(\sum_{j=1}^{6}\tilde{x}_{1u_j}^{w},\sum_{j=1}^{6}\tilde{z}_{u_j}^{+*}\Big)=0.435\,2,$$

$$\sum_{j=1}^{6}d_{\mathrm{TFN}}(\tilde{x}_{2u_j}^{w},\tilde{z}_{u_j}^{+*})=d_{\mathrm{TFN}}\Big(\sum_{j=1}^{6}\tilde{x}_{2u_j}^{w},\sum_{j=1}^{6}\tilde{z}_{u_j}^{+*}\Big)=0.567\,3,$$

$$\sum_{j=1}^{6}d_{\mathrm{TFN}}(\tilde{x}_{3u_j}^{w},\tilde{z}_{u_j}^{+*})=d_{\mathrm{TFN}}\Big(\sum_{j=1}^{6}\tilde{x}_{3u_j}^{w},\sum_{j=1}^{6}\tilde{z}_{u_j}^{+*}\Big)=0.260\,7,$$

$$\sum_{j=1}^{6}d_{\mathrm{TFN}}(\tilde{x}_{4u_j}^{w},\tilde{z}_{u_j}^{+*})=d_{\mathrm{TFN}}\Big(\sum_{j=1}^{6}\tilde{x}_{4u_j}^{w},\sum_{j=1}^{6}\tilde{z}_{u_j}^{+*}\Big)=0.493\,5.$$

或者

$$\sum_{j=1}^{6}(x_{1u_j}^{wL}+x_{1u_j}^{wM}+x_{1u_j}^{wU})=2.440\,1,$$
$$\sum_{j=1}^{6}(x_{2u_j}^{wL}+x_{2u_j}^{wM}+x_{2u_j}^{wU})=2.308\,0,$$
$$\sum_{j=1}^{6}(x_{3u_j}^{wL}+x_{3u_j}^{wM}+x_{3u_j}^{wU})=2.614\,6,$$

$$\sum_{j=1}^{6}(x_{4u_j}^{wL}+x_{4u_j}^{wM}+x_{4u_j}^{wU})=2.381\,8.$$

因此,对决策对象集 $\{X_i\}$ $(i=1,2,\cdots,4)$ 的优劣判定和次序排定仍为

$$X_3\succ X_1\succ X_4\succ X_2,$$

即 X_3 是最优候选机型,结果与文献[28]的结论一致.

为便于分析比较,本文再采用文献[1,26]中基于离差最大化模型的权重度量算法对上述舰载机机型优劣排序问题案例实施验算,其属性权重度量公式为

$$w_j=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}d_{\rm TFN}(\tilde r_{ij},\tilde r_{kj})}{\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}d_{\rm TFN}(\tilde r_{ij},\tilde r_{kj})},\ i\in N,\ j\in M.$$

假定已统一了UMCDM问题中决策对象属性效用测度值数据间的不同物理量纲信息,按照文献[1,26]提供的基于离差最大化赋权的多属性决策算法对上述算例的候选舰载机机型实施筛选和次序排定得到

$$X_3\underset{1.000\,0}{\succ}X_1\underset{0.989\,0}{\succ}X_4\underset{0.847\,1}{\succ}X_2.$$

故 X_3 亦是最优候选机型,结果与文献[28]的结论一致.

通过对上述问题案例验证结果的分析,说明采用本文给出的基于三角模糊数型决策对象可能度关系模型(TFN-DMOPDRM)的属性赋权算法与文献[1,26]给出的基于离差最大化模型赋权算法对属性权重的度量虽不相同,但是两种模型算法不但获得了相同的最优解判定和筛选排序,而且都能应用可能度对任意两决策对象间比较优势进行度量测定. 此外,本文所提的基于TFN-DMOPDRM的属性赋权算法还融合了属性值间两两比较可能度值信息,与现有其他方法相比更能体现UMCDM问题的合理性和有效性.

4 结 论

本文提出的基于三角模糊数型决策对象可能度关系模型(TFN-DMOPDRM)的属性赋权度量是常见的不确定多属性决策(UMCDM)研究的重点内容之一. 其基本原理是在消除属性效用测度值数据间的不可公度性及矛盾性,若所有决策对象属性效用值间的比较可能度值信息集结融合后合成的属性间优势比较可能度值总和越大,则说明数据波动幅度大的属性对供选对象实施优劣决策的作用越大,相应地要提高属性赋权值;反之,则说明数据波动幅度小的属性对供选对象实施优劣决策的作用更小,相应地要降低属性赋权值. 本文针对属性权重未知且对决策对象无偏好的UMCDM问题,引入三角模糊数可能度与比较优势关系理论,研究了5种新的三角模糊数比较可能度定义的等价关系式以及三角模糊数比较优势关系的一些优良性质;推导出决策对象间优势关系与决策对象属性值序列同理想决策对象理想点序列的相离度和大小、决策对象属性值序列和同理想决策对象理想点序列和的相离度值大小、比较可能度值大小或者决策对象的三角模糊数小元、特元和大元的属性值序列和大小存在等价. 本文还根据上述赋权思想,通过新建立的一种基于三角模糊数比较优势关系确定属性赋权向量的DMOPDRM和决策对象间两两优势比较测定出的可能度矩阵信息,集结并求解出各个决策对象的总体比较可能度值大小,对决策对象集实施优劣筛选和次序排定,以此给出新的三角模糊数多属性决策对象的可能度关系模型算法.

参考文献(References)

[1] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 161-178.
(Xu Z S. Uncertain multiple attribute decision making methods and applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 161-178.)

[2] 黄智力. 区间数型与三角模糊数型不确定多指标决策研究[D]. 厦门: 厦门大学航空航天学院, 2016.
(Huang Z L. Study on interval number-based and triangular fuzzy number-based uncertain multi-attribute decision-making[D]. Xiamen: School of Aerospace Engineering, Xiamen University, 2016.)

[3] Hsieh C H, Chen S H. A model and algorithm of fuzzy product positioning[J]. Information Sciences, 1999, 121(1): 61-82.

[4] Kamran Rezaie, Sara Saeidi Ramiyani, Salman Nazari-Shirkouhi, et al. Evaluating performance of Iranian cement firms using an integrated fuzzy AHP-VIKOR method[J]. Applied Mathematical Modelling, 2014, 22(3): 21-30.

[5] Wu L F, Liu S F, Yang Y J. A model to determine OWA weights and its application in energy technology evaluation[J]. Int J of Intelligent Systems, 2015, 30(7): 798-806.

[6] Liu H C, Liu L, Liu N, et al. Risk evaluation in failure mode and effects analysis with extended VIKOR method under fuzzy environment[J]. Expert Systems with Applications, 2012, 39(17): 12926-12934.

[7] Chang T H. Fuzzy VIKOR method: A case study of the hospital service evaluation in Taiwan[J]. Information Sciences, 2014, 271(1): 196-212.

[8] Liu H C, You J X, Fan X J, et al. Site selection in waste management by the VIKOR method using linguistic assessment[J]. Applied Soft Computing, 2014, 21(1): 684-696.

[9] Yim K K, Wong S C, Anthony Chen, et al. A reliability-based land use and transportation optimization model[J]. Transportation Research Part C, 2011, 19(2): 351-362.

[10] Wang P, Meng P, Song B W. Response surface method using grey relational analysis for decision making in weapon system selection[J]. J of Systems Engineering and Electronics, 2014, 25(2): 265-272.

[11] Van Laarhoven P J M, Pedrycz W. A fuzzy extension of satty's priority theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1983, 11(1): 229-241.

[12] Herrera-viedma E, Herrera F, Chiclana F, et al. Some issues on consistency of fuzzy preference relations[J]. European J of Operational Research, 2004, 154(1): 98-109.

[13] Wang Y M, Celik Parkan. Multiple attribute decision making based on fuzzy preference information on alternatives: Ranking and weighting[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 153(3): 331-346.

[14] 黄智力, 罗键. 三角模糊数型不确定多指标决策的相似规划模型及其应用[J]. 系统工程与电子技术, 2016, 38(5): 1100-1106.
(Huang Z L, Luo J. Similarity programming model for triangular fuzzy number-based uncertain multi-attribute decision making and its application[J]. System Engineering and Electronics, 2016, 38(5): 1100-1106.)

[15] 陈雪, 黄智力, 罗键. 基于相对相似度关系的三角模糊数型不确定多属性决策法[J]. 控制与决策, 2016, 31(12): 2232-2240.
(Chen X, Huang Z L, Luo J. Approach for triangular fuzzy number-based uncertain multi-attribute decision making based on relative similarity degree relation[J]. Control and Decision, 2016, 31(12): 2232-2240.)

[16] Li D F. TOPSIS-based nonlinear-programming methodology for multiattribute decision making with interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2010, 18(2): 299-311.

[17] 李存林, 张强. 基于可能性测度的模糊对策[J]. 北京理工大学学报: 自然科学版, 2011, 31(3): 324-328.
(Li C L, Zhang Q. Fuzzy games based on possibility measures[J]. J of Beijing Institute of Technology: Natural Science Edition, 2011, 31(3): 324-328.)

[18] 李亚利, 李永明. 可能性测度下计算树逻辑的若干性质[J]. 陕西师范大学学报: 自然科学版, 2013, 41(6): 6-11.
(Li Y L, Li Y M. Some properties of computation tree logic under possibility measure[J]. J of Shaanxi Normal University: Natural Science Edition, 2013, 41(6): 6-11.)

[19] John Drakopoulos A. Probabilities, possibilities, and fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 75(1): 1-15.

[20] Zadeh L A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1(1): 3-28.

[21] Wu Q, Law R. The complex fuzzy system forecasting model based on fuzzy SVM with triangular fuzzy number input and output[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(10): 12085-12093.

[22] Jin J L, Wei Y M, Zou L L, et al. Risk evaluation of China's natural disaster systems: An approach based on triangular fuzzy numbers and stochastic simulation[J]. Natural Hazards, 2012, 62(1): 129-139.

[23] Sadi-Nezhad S, Noroozi-Yadak A, Makui A. Fuzzy distance of triangular fuzzy numbers[J]. J of Intelligent & Fuzzy Systems, 2013, 25(4): 845-852.

[24] Li D F. A fast approach to compute fuzzy values of matrix games with payoffs of triangular fuzzy numbers[J]. European J of Operational Research, 2012, 223(2): 421-429.

[25] Li D F. Linear programming models and methods of matrix games with payoffs of triangular fuzzy numbers[M]. Berlin: Springer Heidelberg, 2016: 135-165.

[26] 彭张林, 张强, 李珠瑞, 等. 改进的离差最大化决策模型及其在临近空间多任务规划中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(2): 421-427.
(Peng Z L, Zhang Q, Li Z R, et al. Improved maximizing deviation decision-making model and its application in multi-mission planning of near space system[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2014, 34(2): 421-427.)

[27] 黄智力, 罗键. 三角模糊数型不确定多指标决策的可能度关系法[J]. 控制与决策, 2015, 30(8): 1365-1371.
(Huang Z L, Luo J. Possibility degree relation method for triangular fuzzy number-based uncertain multi-attribute decision making[J]. Control and Decision, 2015, 30(8): 1365-1371.)

[28] 胡凌云, 袁宏俊, 吴庆鹏. 基于集对分析的三角模糊数多属性决策方法[J]. 武汉理工大学学报: 信息与管理工程版, 2015, 37(1): 108-111.
(Hu L Y, Yuan H J, Wu Q P. Multiple attribute decision-making of triangular fuzzy number based on set pair analysis[J]. J of Wuhan University of Technology: Information & Management Engineering, 2015, 37(1): 108-111.)

(责任编辑：齐 霁)