

多运动体分布式最优编队构型形成算法

胡春鹤[†], 王健豪

(北京林业大学 工学院, 北京 100083)

摘要: 针对分布式通信条件下的多运动体编队构型形成问题进行研究. 考虑到个体的有限通信与感知能力, 传统集中式求解算法无法适应实际需求, 提出一种基于分布式交替映射凸优化的分布式时间最优编队构型形成算法, 使得个体间仅依赖局部通信与局部计算实现编队构型的快速形成; 将该问题建模为含有等式约束的分布式 Minimax 凸优化问题, 提出基于虚拟等式约束函数的分布式交替映射凸优化算法实现求解; 根据求解结果, 各运动体采用 RVO 避障策略实现最优构型形成. 针对含有 100 个运动体的最优编队构型形成问题进行仿真, 验证了所提出算法的有效性.

关键词: 分布式凸优化; 多运动体; 最优编队构型; 交替映射; 极大极小优化

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Distributed optimal formation shaping algorithm for multi-agent

HU Chun-he[†], WANG Jian-hao

(School of Technology, Beijing Forestry University, Beijing 100083, China)

Abstract: In this paper, we study the multi-agent distributed time-optimal formation shaping problem by proposing the time-optimal formation shaping distributed algorithm based on distributed convex alternating projection method, in which each individual only has limited communication range and sensing ability, where centralized algorithms failed. In the proposed algorithm, we model the problem as a equality-constraint distributed minimax convex optimization, which is further solved by proposing a novel virtual-equality-constraint based alternating projection method. According to the optimization results, multi-agent can achieve optimal shaping with the RVO avoidance strategy. Finally, the simulation of 100 multi-agent optimal formation is demonstrated to verify the efficiency of the proposed algorithm.

Keywords: distributed convex optimization; multi-agent; optimal formation shape; alternating projection; minimax optimization

0 引 言

作为一类典型的协同控制问题,多运动体的编队控制问题近年来已引起人们广泛关注^[1-2],并成功应用于多机器人系统^[3]、多无人机系统的编队^[4]等领域.目前,对于编队控制问题的研究主要集中于编队形成与集结^[5]、防撞^[6]以及 Flocking^[7]等问题.

编队的形成与集结作为编队的初始任务,对整体起到至关重要的作用.为了实现有效编队,首先要求分散于各个区域的运动体在指定区域完成集结,随后根据预定分配或实时分配形成编队构型.多运动体以最短的时间完成编队构型,可以有效降低时间和能源的消耗,对后续任务的保障起到至关重要的作

用. Derenick 等^[8]首先利用构型理论将这一问题转化为受限优化凸优化问题,随后利用二次锥规划优化实现求解; Wang 等^[9]进一步将这一问题扩展为组合优化问题,并利用循环神经网络并行求解这一问题.

尽管上述算法能够有效地计算得到各运动体的最优运动轨迹,但依赖于集中式结构以及全局决策节点的优化求解.然而,分散在空间中的各运动体通常仅具备局部感知能力,无法获取全局的信息,使得集中式结构不适应于实际需求.因此,提出面向分布式结构的最优构型形成算法对编队算法的实际应用具有重要意义.

本文提出一种分布式的时间最优编队构型形成

收稿日期: 2017-06-29; 修回日期: 2017-10-18.

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金项目(BLX201605).

责任编委: 李忠奎.

作者简介: 胡春鹤(1986—),男,讲师,博士,从事无人机自主控制、多无人机协同控制及其应用等研究;王健豪(1993—),男,硕士生,从事优化控制的研究.

[†]通讯作者. E-mail: huchunhe@bjfu.edu.cn

算法,实现时间最优编队构型问题的分布式求解.算法将编队构型形成问题的集中式结构建模为含有等式约束的分布式Minimax凸优化模型,由于原有分布式交替映射凸优化算法无法处理含有等式约束的情况,本文提出一种基于虚拟等式约束函数的方法实现对等式约束的处理,最后各运动体根据局部计算结果采用RVO策略实现最终的最优编队构型形成.

1 问题描述

多运动体时间最优编队构型形成问题,是考察空间上分布的多运动体如何以最短的时间形成指定的编队构型^[8].为便于分析,给出如下定义.

定义 1 对于欧氏空间内分布的多个质点,由其位置坐标形成的相互方位关系称作空间构型.

定义 2 由给定的空间构型,只通过旋转、平移以及缩放等变换得到的一系列与之具有相同形状构型所组成的集合称作同构构型集合.

属于同一同构构型集合的两个分布 Q 与 P 的关系用 $Q \sim P$ 表示,则 P 所在的同构构型集合可描述为 $\{P\} = \{Q|Q \sim P\}$,即 $Q \sim P \Leftrightarrow Q \in \{P\}$.

编队构形属于一类典型的空空间构型,可以描述空间中各运动体形成编队后所具有的方位关系.根据定义 2,同属于相同编队构型的不同编队实例虽然不具有相同的坐标,但具有几何同构的性质,可以通过适当的旋转、平移以及缩放等方式进行转换.

考虑 m (m 通常为 2 或 3)维实数空间上的 n 个完整驱动运动体具有如下系统动态:

$$\dot{x}_i = u_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (1)$$

其中 $x_i \in \mathbf{R}^m$ 为运动体 i 的位置.多运动体在惯性坐标系中的位置分布可以用如下 $m \times n$ 矩阵描述:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2)$$

假定多运动体所需形成的编队构型为

$$\{P\} = \{\alpha RP + 1_n^T \otimes r | \alpha \in \mathbf{R}^+, R \in \text{SO}(m), r \in \mathbf{R}^m\}. \quad (3)$$

其中: $P = (p_1, p_2, \dots, p_l)$ 为 m 维空间上符合该编队构型的一个编队实例, $p_i \in \mathbf{R}^m$ 为运动体 i 在编队应处的位置,通常为运动体 i 的地理坐标;正实数 α 为缩放因子; $R \in \text{SO}(m)$ 为 \mathbf{R}^m 上的旋转矩阵; 1_n 为 n 维全 1 列向量; r 为平移向量; \otimes 为Kronecker积.

多运动体分布最优编队构型形成问题^[8]研究的是如何在仅具有分布式的通信协调关系下,使得具有位置分布(2)并满足系统动态(1)的多运动体,以最短的时间或距离形成指定编队构型 Q ,满足 $Q \sim P$,具体可以描述为如下最优规则:

$$\begin{aligned} \min_Q \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \|q_i - x_i\|_2; \\ \text{s.t. } Q \in \{P\}. \end{aligned} \quad (4)$$

其中: $\|\cdot\|$ 表示欧氏距离, $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $\{P\}$ 由式(3)定义.

多运动体分布最优编队构型形成问题(4)属于典型的含有约束的分布式Minimax凸优化问题.由于分布式环境约束,各运动体只能获得自身的优化方程、状态,以及依靠通信拓扑获得相邻运动体(邻居)状态,进而只能利用有限信息实施局部优化算法.因此,如何通过局部优化算法保证整体的最优性成为这一问题的难点.

本文所用到的符号定义与数学基本引理说明如下:

文中利用 \mathbf{Z}_+ 表示正整数集, $\text{epi} f_i$ 表示函数 f_i 的上部图函数: $\text{epi} f = \{(x, t) | t \geq f(x)\}$.利用 $P_f(\cdot) \in \mathbf{R}^{m+1} \rightarrow \mathbf{R}^{m+1}$ 表示 \mathbf{R}^{m+1} 中点到函数 $f \in \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ 图像的映射函数.典型函数的映射函数见如下引理.

引理 1 (二阶锥映射)^[10] 给定如下二阶锥:

$$C = \{(x, t) \in \mathbf{R}^{(m+1) \times 1} | \|x\|_2 \leq t\}.$$

点 $(x, t) \in \mathbf{R}^{(m+1) \times 1}$ 到该二阶锥的映射为

$$P_C(x, t) = \begin{cases} (x, t), \|x\|_2 \leq t; \\ (0, 0), \|x\|_2 \leq -t; \\ \frac{t + \|x\|_2}{2\|x\|_2} \begin{bmatrix} x \\ \|x\|_2 \end{bmatrix}, -t < \|x\|_2 < t, x \neq 0. \end{cases}$$

引理 2 (仿射集映射)^[10] 给定如下仿射集:

$$C = \{x | Ax = b, A \in \mathbf{R}^{m \times n}\}.$$

点 $x \in \mathbf{R}^n$ 到该仿射集的映射为

$$P_C(x) = x + A^+(b - Ax),$$

其中 A^+ 是 A 的Moore-Penrose逆.

2 分布式交替映射凸优化算法

分布式Minimax凸优化是一类由多个局部凸优化方程构成,仅依赖于分布式结构求解优化变量保证整体Minimax的综合优化问题^[11-12].

本文采用基于交替映射的分布式凸优化算法^[12].该算法通过分布式映射迭代实现最优化的求解,具有收敛速度快、局部计算量低等优点,已被成功应用于求解无约束下的分布式凸优化问题,包括最短时间一致性^[13]、最优集结等.因为对于所研究问题(4)中的优化变量需要额外满足 $Q \in \{P\}$,所以本文需要对无约束算法进行修正,提出一种含有等式约束的分布式凸优化求解算法.

2.1 无约束分布式凸优化算法

无约束的分布式凸优化问题通常具有如下结构:

$$\min_{x \in U} \max_{i \in \mathbf{Z}_+} f_i(x), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (5)$$

其中: f_i 为运动体 i 的局部凸优化方程, 定义域 $U \subseteq \mathbf{R}^m$ 为凸集.

对于式(5)所示的 Minimax 凸优化问题, 分布式交替映射凸优化算法首先将该优化问题转化为凸集与仿射集的最短距离问题, 随后基于分布式循环交替映射实现对该最短距离的求解.

定理1 (分布式交替映射凸优化算法)^[12] 对于任意给定正数 $\delta > 0$, 总可以找到 $\varepsilon > 0$, 对于满足迭代过程

$$\begin{aligned} (x_l^i, t_l^i) &= \begin{cases} (x_{l-1}^i, t_{\min}^i), & |e| \leq \varepsilon; \\ P_{\text{epi}f_i}((x_l^n, t_l^n) - I_{l-1}^i), & |e| > \varepsilon; \end{cases} \\ (x_l^i, t_l^i) &= P_{\text{epi}f_i}((x_{l-1}^{i-1}, t_{l-1}^{i-1}) - I_{l-1}^i); \\ I_{l-1}^i &= \begin{cases} 0, & |e| \leq \varepsilon; \\ (x_l^i, t_l^i) - (x_{l-1}^{i-1}, t_{l-1}^{i-1}) - I_{l-1}^i, & |e| > \varepsilon \end{cases} \end{aligned}$$

的序列, 有

$$\|\lim_{l \rightarrow \infty} x_l^1 - \arg \min_x \max_i f_i\| \leq \delta.$$

其中: $1 < i \leq n$ 为个体编号; x_l^i 为个体 i 在第 l 次迭代的局部优化变量; $t_l^i = f_i(x_l^i)$ 为所对应的优化值; $x_0^1 := x, I_0^i := 0$ 为初值; $e = \|(x_l^1, t_l^1) - (x_{l-1}^1, t_{l-1}^1)\|$ 为收敛条件.

定理1给出了 Minimax 凸优化问题在循环通信拓扑结构下的分布式求解方法. 对于个体 i , 从上一个个体 $i-1$ 获得局部优化变量 x_{l-1}^{i-1} 和优化值 t_{l-1}^{i-1} , 进行增量修正后通过映射 $P_{\text{epi}f_i}(\cdot)$ 获得新的优化变量和优化值 (x_l^i, t_l^i) , 并将其传输给个体 $i+1$. 当个体1发现两次迭代误差足够小的时候, 将局部优化值设为最低, 随后重新交互运算直至收敛, 收敛值可以任意接近于问题(5)的最优解.

2.2 含有等式约束的凸优化算法

实际优化问题, 如整数规划^[14]、半正定规划^[15]以及分布式凸优化^[16]等, 通常只具有有限求解空间, 需要处理如下所示的含有等式约束的情况:

$$\begin{aligned} \min_{x \in U} \max_{i \in \mathbf{Z}_+} f_i(x), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}; \\ \text{s.t. } Ax = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

上述问题一般可采用拉格朗日乘子法转化为不含约束的优化问题进行求解^[17], 但优化变量的维度会增加, 导致求解难度提升, 无法进行分布式求解. 本文提出一种基于虚拟等式约束函数的方法, 将问题(6)的局部优化函数数量扩充等价于无约束的情况,

进而采用定理1所述算法进行处理.

构造如下虚拟函数:

$$g(x) = c, \quad x \in \{x | Ax = 0\}, \quad (7)$$

其中 c 为小于式(6)最优值的常数, 若式(6)的最优解大于0, 则可取 c 为0. 将其视作虚拟运动体 $n+1$ 的局部凸优化方程 f_{n+1} , 则可构造如下含有 $n+1$ 个局部方程的无约束优化问题:

$$\min_{x \in U} \max_{i \in \mathbf{Z}_+} f_i(x), \quad i \in \{1, 2, \dots, n, n+1\}, \quad (8)$$

其中 $f_{n+1}(x) = g(x)$. 这与含有 n 个局部方程及等式约束的优化问题(6)等价.

定理2 可利用定理1所述算法对问题(8)进行求解, 并与问题(6)所述等价.

证明 首先, 根据虚拟函数 $g(x)$ 的定义(7), $g(x)$ 仅在 A 的零空间有定义, 显然 A 的零空间是凸集, 进而函数(7)为凸函数, 则定理1可用于求解式(8)所述问题.

其次, 定义(7)保证 $g(x)$ 的取值小于式(6)的最优解, 则满足式(8)的解与 $g(x)$ 取值无关. 然而, 式(6)的极值仅出现在 A 的零空间, 即有限区域, 显然有

$$\begin{aligned} \min_{x \in U} \max_{i \in \{1, 2, \dots, n+1\}} f_i(x) \leq \\ \{\min_{x \in U} \max_{i \in \{1, 2, \dots, n+1\}} f_i(x) | Ax = 0\}. \end{aligned}$$

另外, 由于 $g(x)$ 仅在 A 的零空间有定义, 式(8)的解也出现在 A 的零空间, 但由于式(8)相较于式(6)的 \max 部分多出一项, 则显然

$$\begin{aligned} \min_{x \in U} \max_{i \in \{1, 2, \dots, n+1\}} f_i(x) \geq \\ \{\min_{x \in U} \max_{i \in \{1, 2, \dots, n+1\}} f_i(x) | Ax = 0\}. \end{aligned}$$

综上所述, 式(8)与(6)所述问题等价. \square

此时, 无约束优化问题(8)可以利用定理1所述算法进行求解, 只需要运动体1额外多计算一次虚拟函数的映射.

3 二维平面最优编队构型分布式算法

研究二维平面的编队构型形成具体问题, 可假定待形成的编队构型为

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_n)_{2 \times n},$$

其中 $p_i = (p_{i,x}, p_{i,y})^T$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) 为平面地理坐标. 不失一般性, 假设惯性坐标系的原点位于待形成编队的第一个位置, 即 $p_1 = (0, 0)^T$. 根据式(3), 假定 $r = q_1$, 则任意属于该集合的新构型 $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \{P\}$ 中的位置可以利用如下变换手段得到^[8]:

$$q_i = q_1 + \alpha RP, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (9)$$

运动体之间的碰撞. 算法的仿真结果如图2所示, 其中: * 为空间分布的100个运动体初始构型, \circ 为最优编队构型, 虚线为各运动体的航行路线.

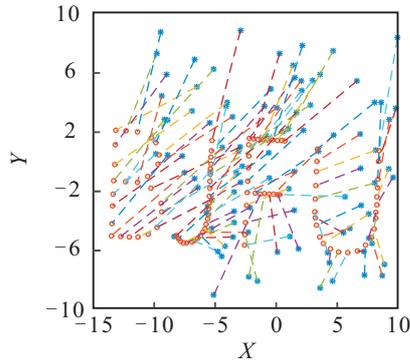


图2 运动体形成的最优构型

由仿真结果可知, 运动体通过局部协调策略得到了与图2编队构型同构的BJFU字母构型, 各运动体的轨迹基本符合最短路径(直线), 其中个别运动体为避免碰撞而对速度进行实时调整形成了部分折线轨迹. 通过与集中式序列二次规划算法的结果比较可知, 本文算法结果满足最优性需求.

5 结论

本文针对具有完整驱动能力的多运动体分布式通信环境下的时间最优编队构型形成问题展开研究, 提出了基于分布式通信结构的时间最优编队构型形成算法. 该算法将编队构型分布式时间最优构型形成问题建模为含有等式约束的分布式Minimax凸优化结构, 设计了可处理含等式约束的基于交替映射分布式凸优化算法, 实现了对该问题的分布式求解. 与现有算法相比, 本文提出的算法采用分布式通信结构, 不需要集中节点的协调, 每个个体仅依赖于各自在编队的位置信息以及邻居间的局部通信, 同时对于新增运动体具有快速适应能力. 本文针对含有100个运动体的快速编队问题进行了仿真, 各运动体采用RVO避障策略. 算法结果表明, 本文算法中的各节点通过少量计算与交互即可对编队构型方位达成一致, 满足最优性需求.

参考文献(References)

[1] Rubenstein M, Cornejo A, Nagpal R. Programmable self-assembly in a thousand-robot swarm[J]. *Science*, 2014, 345(6198): 795-799.

[2] Oh K K, Park M C, Ahn H S. A survey of multi-agent formation control[J]. *Automatica*, 2015, 53(C): 424-440.

[3] Zhao S, Zelazo D. Bearing rigidity and almost global bearing-only formation stabilization[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2016, 61(5): 1255-1268.

[4] 樊琼剑, 杨忠, 方挺, 等. 多无人机协同编队飞行控制的研究现状[J]. *航空学报*, 2009, 30(4): 683-691.

(Fan Q J, Yang Z, Fang T, et al. Research status of coordinated formation flight control for multi-UAVs[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2009, 30(4): 683-691.)

[5] Paunoen L, Seifert D. Asymptotic behaviour in the robot rendezvous problem[J]. *Automatica*, 2017, 79: 127-130.

[6] Alonso-mora J, Breitenmoser A, Rufli M, et al. Optimal reciprocal collision avoidance for multiple non-holonomic robots[M]. *Distributed Autonomous Robotic Systems*. Berlin: Springer, 2013: 203-216.

[7] Zhang X, Duan H. Altitude consensus based 3D flocking control for fixed-wing unmanned aerial vehicle swarm trajectory tracking[J]. *Proc of the Institution of Mechanical Engineers Part G: J of Aerospace Engineering*, 2016, 230(14): 2628-2638.

[8] Derenick J C, Spletzer J R. Convex optimization strategies for coordinating large-scale robot formations[J]. *IEEE Trans on Robotics*, 2007, 23(6): 1252-1259.

[9] Wang Y, Cheng L, Hou Z G, et al. Optimal formation of multirobot systems based on a recurrent neural network[J]. *IEEE Trans on Neural Networks and Learning Systems*, 2016, 27(2): 322-333.

[10] Parikh N, Boyd S. Proximal algorithms[J]. *Foundations and Trends in Optimization*, 2014, 1(3): 127-239.

[11] Du D Z, Pardalos P M. *Minimax and applications*[M]. Berlin: Springer, 2013.

[12] Hu C, Chen Z. Distributed Min-max optimization application to time-optimal consensus: An alternating projection approach[C]. *The AIAA Guidance, Navigation, and Control Conf*. Kissimmee: AIAA, 2015: 1-11.

[13] Hu C, Chen Z. Helly-theorem-based time-optimal consensus for multi-agent systems[J]. *J of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2015, 41(9): 1701-1707.

[14] Guerrero J, Oliver G, Valero O. Multi-robot coalitions formation with deadlines: Complexity analysis and solutions[J]. *PloS one*, 2017, 12(1): e0170659.

[15] Derenick J, Spletzer J, Kumar V. A semidefinite programming framework for controlling multi-robot systems in dynamic environments[C]. *IEEE Conf on Decision and Control*. Atlanta: IEEE, 2010: 7172-7177.

[16] Zhu M, Mart S. On distributed convex optimization under inequality and equality constraints[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2012, 57(1): 151-164.

[17] Boyd S, Vandenberghe L. *Convex optimization*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004: 215-231.

[18] Van J, Guy S, Lin M, et al. Reciprocal n -body collision avoidance[J]. *Robotics Research*, 2011(70): 3-19.