

考虑维修优先权的多状态温贮备系统可靠性模型

尹东亮[†], 胡 涛, 陈 童

(海军工程大学 管理工程与装备经济系, 武汉 430033)

摘 要: 针对工程应用中装备维修和保养两类活动具备不同优先级这一问题, 考虑单一维修台可进行维修和保养两类工作, 其中维修具有优先权. 以多状态温贮备系统为研究对象, 采用可近似拟合任意分布的 Phase-type(PH) 分布构建一种描述能力更强的系统可靠性模型, 得出系统稳态可用度、系统故障率、平均故障间隔时间等一系列可靠性指标的解析表达式. 最后利用算例验证 PH 分布的适用性, 演示系统可靠性函数随时间的变化趋势, 并讨论维修台工作速率对系统故障率、稳态可用度、维修台忙期稳态概率和平均故障间隔时间的影响. 算例结果表明, 所提模型具有较广泛的应用价值.

关键词: 温贮备系统; 可靠性; 维修优先权; Phase-type 分布; 多状态

中图分类号: F253.4

文献标志码: A

Reliability analysis for multi-state warm standby system with repair priority

YIN Dong-liang[†], HU Tao, CHEN Tong

(Department of Management Engineering and Equipment Economic, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

Abstract: Aiming at different priority of equipment preventive maintenance and corrective maintenance in engineering application, this research applies phase-type distribution to modeling, and investigates a multi-state warm standby system and a single repair facility of the two kinds of service: Preventive maintenance and corrective maintenance with higher priority, and provides an analytic reliability model that is more appropriate to characterize the real situation. Some important reliability features, such as system steady-state availability, system failure rate and mean time between failure(MTBF), are obtained for certain. Finally, a numerical application is given to illustrate the applicability of Phase-type distribution, and the trend of the system reliability function over time and the influence of the preventive maintenance time and corrective maintenance time on system reliability are discussed, which can demonstrate the strong applied value of the proposed model.

Keywords: warm standby system; reliability; repair priority; Phase-type distribution; multi-state

0 引 言

在大型复杂装备和关键系统中,通常采用冗余结构提高系统可靠性,如舰船动力系统、高炉电力系统等,往往采用“用一备一”的温贮备结构^[1-4].而在装备实际使用过程中,其工作和故障状态非常多样,常表现出多状态特性,如机械设备的磨损、腐蚀造成的性能退化,以及电子设备因少量单元损坏运行不畅等.这些问题并不会导致系统停机,而是处于劣化的工作状态.如果在系统可靠性分析时仅考虑“完好”

和“故障”二态,并不能对其进行准确描述.因此,多状态系统于上世纪 80 年代被提出,并被广泛应用于系统可靠性领域^[5-8].

对于多状态温贮备系统,系统部件不同性能水平所采取的维修保障活动各不相同.保养和维修作为常见的装备保障方式,其侧重点和重要程度也有所区别.通常,针对于故障部件的维修活动比预防装备劣化的日常保养优先级高,因此考虑维修优先权进行系统可靠性分析更为合理、科学.

收稿日期: 2017-06-09; 修回日期: 2018-01-06.

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(71501183).

责任编委: 方华京.

作者简介: 尹东亮(1992—),男,博士生,从事系统工程、装备可靠性的研究; 胡涛(1970—),男,教授,博士生导师,从事控制科学与工程、装备综合保障等研究.

[†]通讯作者. E-mail: zeronavy@163.com

Rectu^[9]考虑预防性维修比事后维修和更换更具有优先权,研究了两部件并联系统可靠性模型,其中假设部件寿命、维修时间服从指数分布;Kit等^[10]采用指数分布对考虑维修优先权的两不同部件冷贮备系统进行了分析,得出了一系列的系统可靠性指标,优化了部件更换策略;Erik等^[11]提出了装备维修计划模型,其中假设装备故障多样,不同故障的维修优先权各不相同;Li等^[12]假设系统部件寿命和维修时间服从指数分布,考虑使用和维修优先权研究了仅有“完好”和“故障”二态的两部件温贮备系统可靠性模型。

上述研究为了求解方便,一般假设部件寿命、维修时间等服从指数分布、威布尔分布等典型分布,这在一定程度上导致模型适用性较窄,只能适用于一些特定情况.为了解决这一问题,同时保留这类典型分布所构建模型易于求解的特性,Neuts等^[13]发展了Phase-type(PH)分布的矩阵表示和解析方法.PH分布既最大程度地继承了指数分布易于求解的特性,又可以在非负半轴上近似拟合任意分布,具有较好的适用性,已被迅速应用于系统可靠性研究领域中.Valentina^[14]分析了具有更新输出的单服务器重试队列,假设服务时间服从PH分布,得出了系统稳态分布和逗留时间的拉普拉斯变换;Andras等^[15]讨论了PH和ME分布的特征及其在复杂系统随机分析中的应用;Heungseob等^[16]假设系统部件寿命服从PH分布,研究了不可修复系统的可靠性模型,尝试解决了冗余分配问题。

综上,本文考虑单一维修台,且维修较保养具有优先权.假设系统部件不同性能水平的停留时间、维修台维修时间和保养时间分别服从连续PH分布,构建了两部件多状态温贮备系统可靠性模型,得出系统稳态可用度、系统故障率、平均故障间隔时间等一系列解析表达式.最后利用算例验证PH分布的适用性,讨论维修台工作速率对系统可靠性的影响。

1 连续PH分布

定义1^[17] 若一个非负随机变量 X 服从连续PH分布,则它的分布函数为

$$F(t) = 1 - \alpha \exp(Tt) e \equiv 1 - \alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} T^n \right) e, t \geq 0. \quad (1)$$

其中: e 是全部元素都为1的列向量; α 是次随机矩阵,含有 m 个非负元素的行向量, m 为正整数, $\alpha e \leq 1$; T 是 m 阶矩阵,该矩阵对角线元素全为负,其他元素非

负,矩阵可逆,且每行元素之和是非正的。

定义2^[17] 连续时间马尔科夫链 $\{I(t), t \geq 0\}$,其状态空间由 $m+1$ 个状态 $\{1, 2, \dots, m, m+1\}$ 组成,无穷小生成元表示为

$$Q = \begin{bmatrix} T & T^0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中 T 为PH分布的生成元.由于每一行元素之和均为0,可得 $T^0 = -Te$.状态 $m+1$ 的转移概率为0,则状态 $m+1$ 为吸收态。

定义3^[18] 一个 $m \times n$ 阶矩阵 A 和一个 $p \times q$ 阶矩阵 B 的Kronecker积定义为

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}. \quad (3)$$

根据式(3),可得出Kronecker积有如下性质:

$$C(A \otimes B) = (CA) \otimes B = A \otimes (CB), \quad (4)$$

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = (A_1 A_2) \otimes (B_1 B_2). \quad (5)$$

定义4^[18] 一个 m 阶矩阵 A 和一个 n 阶矩阵 B 的Kronecker和定义为

$$A \oplus B = A \otimes I_n + I_m \otimes B, \quad (6)$$

其中 I_n 和 I_m 分别表示 m 阶和 n 阶的单位矩阵。

2 模型假设

假设某温贮备系统包含两个部件和单一维修台.其中:一个部件工作,另一个部件温贮备;维修台始终处于完好状态,可进行维修和保养工作,且维修工作具有优先权,对故障部件采取先到先服务的原则进行维修.下面对问题做进一步假设。

1) 系统部件技术性能水平划分为 $n+1$ 个,令系统部件所处性能水平为 i ,则可将其分为以下3种类型:当 $1 \leq i \leq m$ 时,部件处于完好状态;当 $m+1 \leq i \leq n$ 时,部件处于劣化状态;当 $i = n+1$ 时,部件处于故障状态。

2) 当系统贮备部件处于劣化状态且维修台恰好空闲时,维修台会对处于水平 j 的劣化部件进行保养.若此时工作部件故障,则维修台会立即停止保养工作而对故障部件进行维修,转换时间忽略不计,此时处于水平 j^* 的被保养部件立即转入系统工作, $1 \leq j^* \leq j$,且令 O_1 表示 $1 \leq j^* \leq m$ 的概率, O_2 表示 $m+1 \leq j^* \leq n$ 的概率。

3) 令 p_{ij} 、 p_{ij}^* 分别表示工作部件和贮备部件在系统使用过程中由水平 i 、 i^* 下降到水平 j 、 j^* 的概率.其中: $1 \leq i, i^* \leq n, 1 \leq j, j^* \leq n+1$;当 $i \geq j, i^* \geq j^*$ 时, $p_{ij} = p_{ij}^* = 0$ 。

4) 系统内工作部件、贮备部件在不同性能水平的逗留时间、维修台的保养时间以及维修时间相互独立。

5) 系统内工作部件在不同性能水平的逗留时间服从连续 PH 分布, 有 f_i 阶不可约表示 (α_i, T_i) ; 系统内贮备部件在不同性能水平的逗留时间也服从连续 PH 分布, 有 f_{i^*} 阶不可约表示 (α_{i^*}, T_{i^*}) 。

6) 维修台的保养时间和维修时间均服从不同的 PH 分布。保养时间有 l 阶不可约表示 (β, S) ; 维修时间有 k 阶不可约表示 (γ, S) 。

3 模型构建

3.1 系统状态空间

假设在某一时刻, 系统工作部件处于水平 i 的 x 位相, 贮备部件处于水平 i^* 的 y 位相, 维修台进行保养和维修工作的位相分别表示为 $V(t)$ 、 $J(t)$ 。根据系统部件状态以及维修台工作模式, 可将系统划分为如下 6 个不同状态:

$$\Omega = \{H_0, H_1, H_2, H_3, H_4, H_5\},$$

具体含义如下:

$H_0 = \{i, x, i^*, y\}$, 表示系统工作部件和贮备部件均处于完好状态, 系统正常运行, 维修台处于空闲状态, 其中 $1 \leq i, i^* \leq m, 1 \leq x \leq f_i, 1 \leq y \leq f_{i^*}$;

$H_1 = \{i, x, i^*, y, v(t)\}$, 表示工作部件处于完好状态, 系统正常运行, 贮备部件处于劣化状态, 维修台对其进行保养工作, 其中 $1 \leq i \leq m, 1 \leq x \leq f_i, m + 1 \leq i^* \leq n, 1 \leq y \leq f_{i^*}, 1 \leq v(t) \leq l$;

$H_2 = \{i, x, i^*, j(t)\}$, 表示工作部件处于完好状态, 系统正常运行, 贮备部件故障, 维修台对其进行维修工作, 其中 $1 \leq i \leq m, 1 \leq x \leq f_i, i^* = n + 1, 1 \leq j(t) \leq k$;

$H_3 = \{i, x, i^*, y, v(t)\}$, 表示系统工作部件和贮备部件均处于劣化状态, 系统正常运行, 维修台对贮备部件进行保养, 其中 $m + 1 \leq i \leq i^* \leq n, 1 \leq x \leq f_i, 1 \leq y \leq f_{i^*}, 1 \leq v(t) \leq l$;

$H_4 = \{i, x, i^*, j(t)\}$, 表示工作部件处于劣化状态, 系统正常运行, 贮备部件故障, 维修台对其进行维修, 其中 $m + 1 \leq i \leq n, 1 \leq x \leq f_i, i^* = n + 1, 1 \leq j(t) \leq k$;

$H_5 = \{i, i^*, j(t)\}$, 表示系统停机, 两部件均故障, 维修台按照先到先服务的原则对部件进行维修, 其中 $i = i^* = n + 1, 1 \leq j(t) \leq k$ 。

3.2 系统状态转移矩阵

根据系统状态空间划分, 为便于表示系统状态转移, 可将 p_{ij} 、 p_{ij}^* 根据系统部件不同状态表示如下:

$$P = (p_{ij}) = \begin{bmatrix} P_1 & P_{12} & P_{1(n+1)} \\ & P_2 & P_{2(n+1)} \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$P^* = (p_{ij}^*) = \begin{bmatrix} P_1^* & P_{12}^* & P_{1(n+1)}^* \\ & P_2^* & P_{2(n+1)}^* \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

其中: P_1 、 P_2 分别表示工作部件在完好状态、劣化状态内部转移的概率矩阵, P_{12} 表示工作部件从完好状态向劣化状态转移的概率矩阵, $P_{1(n+1)}$ 、 $P_{2(n+1)}$ 分别表示工作部件从完好状态、劣化状态向故障态转移的概率矩阵; P^* 同理亦然。

下面根据系统状态空间对其状态转移情况进行说明。

H_0 内部转移分析: 该转移包括工作部件自身转移和贮备部件的自身转移。系统两部件均处于完好状态, 各部件内部转移均存在两种情况。以工作部件为例, 其在水平 i ($1 \leq i \leq m$) 的内部转移, 转移矩阵为 $\text{diag}(T_1, \dots, T_m)$; 从水平 i 进入水平 j ($1 \leq i < j \leq m$) 的转移, 矩阵为 $\text{diag}(T_1^0, \dots, T_m^0)P_1 \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ 。贮备部件同理亦然。故 H_0 内部转移矩阵为

$$\begin{aligned} & \{\text{diag}(T_1, \dots, T_m) + \\ & \text{diag}(T_1^0, \dots, T_m^0)P_1 \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)\} \oplus \\ & \{\text{diag}(T_{1^*}, \dots, T_{m^*}) + \\ & \text{diag}(T_{1^*}^0, \dots, T_{m^*}^0)P_1^* \text{diag}(\alpha_{1^*}, \dots, \alpha_{m^*})\}, \end{aligned}$$

阶数为 $d_1 d_1^*$ 。其中: $d_1 = \sum_{i=1}^m f_i, d_1^* = \sum_{i^*=1}^{m^*} f_{i^*}$ 。

同理可得:

H_1 内部转移矩阵为

$$\begin{aligned} & \{\text{diag}(T_1, \dots, T_m) + \\ & \text{diag}(T_1^0, \dots, T_m^0)P_1 \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)\} \otimes \\ & I_{(n-m)l} + I_{d_1} \otimes S \otimes I_{(n-m)}, \end{aligned}$$

阶数为 $d_1(n-m)l$;

H_2 内部转移矩阵为

$$\begin{aligned} & \{\text{diag}(T_1, \dots, T_m) + \\ & \text{diag}(T_1^0, \dots, T_m^0)P_1 \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)\} \otimes \\ & I_k + I_{d_1} \otimes U, \end{aligned}$$

阶数为 $d_1 k$;

H_3 内部转移矩阵为

$$\begin{aligned} & \{\text{diag}(T_{m+1}, \dots, T_n) + \\ & \text{diag}(T_{m+1}^0, \dots, T_n^0)P_2 \text{diag}(\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)\} \otimes \\ & I_{(n-m)l} + I_{d_2} \otimes S \otimes I_{(n-m)}, \end{aligned}$$

表1 系统部件各性能水平停留时间PH表示

i	工作部件		贮备部件	
	α_i	T_i	α_i	T_i
1	(1, 0, 0)	$\begin{bmatrix} -7.1 & 0.5 & 0.1 \\ 0.25 & -7.0 & 0.15 \\ 0.51 & 0 & -5.5 \end{bmatrix}$	(1, 0, 0)	$\begin{bmatrix} -7.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.25 & -7.1 & 0.16 \\ 0.5 & 0 & -5.7 \end{bmatrix}$
2	(0.2, 0.235, 0.565)	$\begin{bmatrix} -0.11 & 0.012 & 0.015 \\ 5.167 & -26.46 & 1.88 \\ 0.13 & 0.081 & -0.943 \end{bmatrix}$	(0.235, 0.21, 0.555)	$\begin{bmatrix} -0.15 & 0.013 & 0.011 \\ 5.267 & -24.46 & 1.78 \\ 0.1 & 0.071 & -0.983 \end{bmatrix}$
3	(0.209, 0.565, 0.226)	$\begin{bmatrix} -49.5 & 7.26 & 0.602 \\ 0.101 & -1.754 & 0.105 \\ 0.013 & 0.011 & -0.195 \end{bmatrix}$	(0.219, 0.555, 0.226)	$\begin{bmatrix} -50.5 & 8.26 & 0.502 \\ 0.111 & -1.965 & 0.112 \\ 0.01 & 0.01 & -0.19 \end{bmatrix}$
4	(0.66, 0.301, 0.309)	$\begin{bmatrix} -1.346 & 1.035 & 0.267 \\ 0 & -1.346 & 1.329 \\ 0 & 0 & -1.346 \end{bmatrix}$	(0.651, 0.332, 0.017)	$\begin{bmatrix} -1.363 & 1.135 & 0.2 \\ 0 & -1.363 & 1.335 \\ 0 & 0 & -1.363 \end{bmatrix}$
5	(0.006, 0.093, 0.901)	$\begin{bmatrix} -2.689 & 0 & 0 \\ 2.445 & -2.68 & 0 \\ 0.897 & 1.63 & -2.698 \end{bmatrix}$	(0.008, 0.089, 0.903)	$\begin{bmatrix} -2.864 & 0 & 0 \\ 2.454 & -2.75 & 0 \\ 0.878 & 1.63 & -2.387 \end{bmatrix}$
6	(0.025, 0.953, 0.022)	$\begin{bmatrix} -4.375 & 0 & 0.015 \\ 2.575 & -4.339 & 1.76 \\ 0.093 & 0 & -4.452 \end{bmatrix}$	(0.028, 0.943, 0.028)	$\begin{bmatrix} -4.451 & 0 & 0.042 \\ 2.768 & -4.921 & 1.76 \\ 0.079 & 0 & -4.359 \end{bmatrix}$
7	(0.001, 0, 0.999)	$\begin{bmatrix} -1.687 & 0 & 1.687 \\ 1.687 & -1.687 & 0 \\ 0 & 1.683 & -1.683 \end{bmatrix}$	(0.001, 0, 0.999)	$\begin{bmatrix} -1.656 & 0 & 1.656 \\ 1.656 & -1.656 & 0 \\ 0 & 1.654 & -1.654 \end{bmatrix}$
8	(0.001, 0.999, 0)	$\begin{bmatrix} -3.355 & 0 & 0 \\ 0 & -3.365 & 3.328 \\ 3.354 & 0 & -3.354 \end{bmatrix}$	(0.001, 0.999, 0)	$\begin{bmatrix} -3.358 & 0 & 0 \\ 0 & -3.412 & 3.387 \\ 3.347 & 0 & -3.445 \end{bmatrix}$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 0.033 & 0 & 0 \\ 0.81 & 0.12 & 0.04 & 0.03 \\ 0 & 0.9167 & 0.04 & 0.0433 \\ 0 & 0 & 0.955 & 0.045 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$O_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

将上述数据代入状态转移矩阵即可得到稳态概率向量 π , 求出系统可靠性指标如下: 系统稳态可用度 $A = 0.9898$, 系统故障率 $r_{sf} = 0.015$, 系统平均故障间隔时间 $MTBF = 9.5954$, 维修台忙期稳态概率 $P_j = 0.9939$.

在 t 时刻, 系统可靠度函数 $R(t)$ 与时间的关系如图1所示.

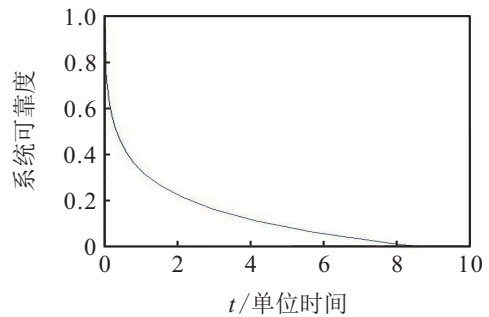


图1 系统可靠度与时间的关系

由算例所得可靠性指标的相关数据可以看出, 当假设系统部件各性能水平的停留时间、维修台保养时间和维修时间服从一般分布, 用PH分布拟合表示是可行的, 所得数据均满足系统可靠性相关指标要求, 有效扩大了模型的适用范围.

5.2 维修台工作速率对系统可靠性的影响

为了更清晰地演示维修台工作速率对系统可靠性的影响, 利用指数分布作为PH分布的特例, 将维修台工作速率划分为保养速率和维修速率讨论如下.

1) 设维修台保养时间服从参数为 λ 的指数分布, 研究保养速率对系统可靠性的影响. 根据PH分布自

身特性可将保养时间表示为如下PH分布形式: $\beta = (1), S = (-\lambda)$. 从而可以得出保养速率的变化对系统稳态可用度、系统故障率、平均故障间隔时间和维修台忙期稳态概率的影响,如图2~图5所示.

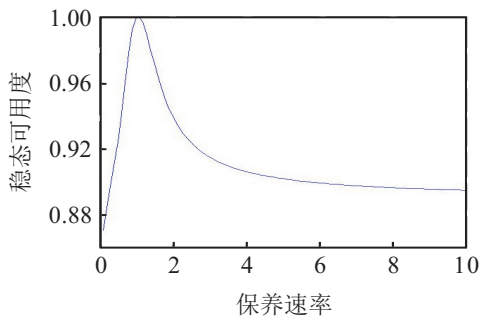


图2 保养速率对稳态可用度的影响

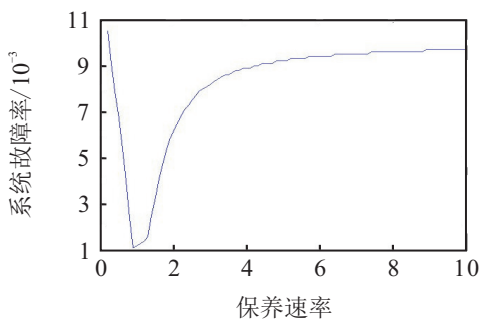


图3 保养速率对系统故障率的影响

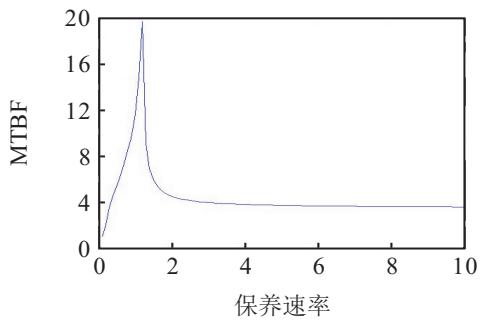


图4 保养速率对MTBF的影响

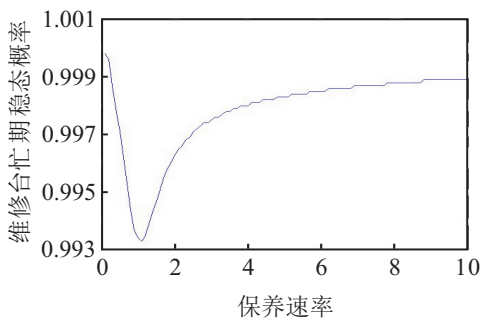


图5 保养速率对维修台忙期稳态概率的影响

由图2~图5可知,随着保养速率的增长,系统可靠性并不会随之持续提升,而是经历起伏后逐渐趋于平稳. 在保养速率前期增长的过程中,可以看出保养速率在一定区间内可使系统可靠性整体达到最优状态,因此选择合适的保养速率在工程应用中对装备可靠性提升有着一定的实践价值.

2) 设维修台维修时间服从参数为 μ 的指数分布, 研究维修速率对系统可靠性的影响. 将维修时间表示为如下PH分布形式: $\gamma = (1), U = -(\mu)$. 从而可以得出维修速率的变化对系统稳态可用度、系统故障率、平均故障间隔时间和维修台忙期稳态概率的影响,如图6~图9所示.

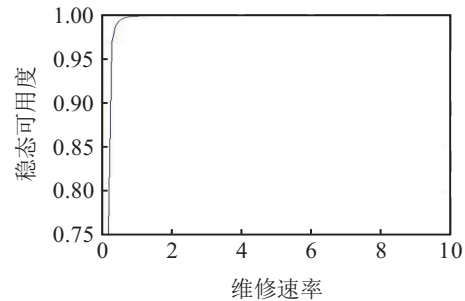


图6 维修速率对稳态可用度的影响

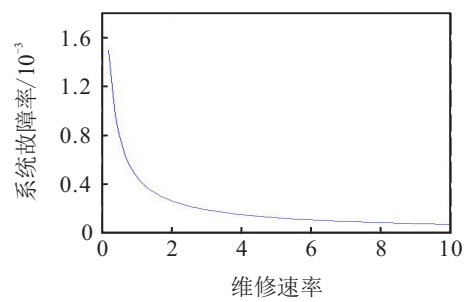


图7 维修速率对系统故障率的影响

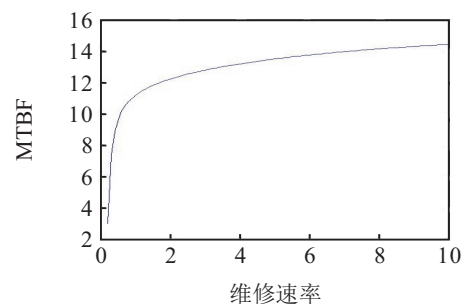


图8 维修速率对MTBF的影响

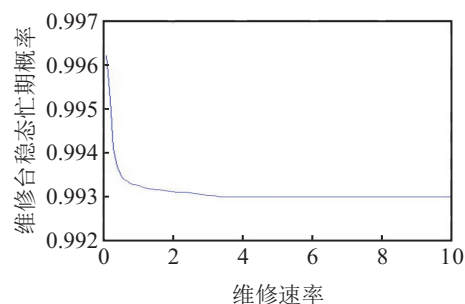


图9 维修速率对维修台忙期稳态概率的影响

由图6~图9可知,随着维修速率的增长,系统可靠性随之提升并逐渐趋于平稳,维修速率过高并不能对系统可靠性的提升产生明显影响. 为了节约维修资源,降低维修成本,同时使系统可靠性得到大幅度提升,在工程中应用该模型能够对维修速率的合理选

择起到一定的借鉴作用。

6 结论

本文采用可近似拟合任意分布的PH分布,构建了考虑维修优先权的多状态温贮备系统可靠性模型,保持了指数分布等典型分布易于解析的特性,得出了系统稳态可用度、系统故障率、平均故障间隔时间等一系列可靠性指标,最后利用算例验证了PH分布的适用性,演示了系统可靠性函数随时间的变化趋势,并讨论了维修台工作速率对系统故障率、稳态可用度、维修台忙期稳态概率和平均故障间隔时间的影响。所构建的模型对选择合理、经济的维修台工作速率具有一定的借鉴意义,具有较广泛的应用价值。

参考文献(References)

- [1] Gregory L, Xing L D, Dai Y S. Heterogeneous 1-out-of- N warm standby systems with dynamic uneven backups[J]. IEEE Trans on Reliability, 2015, 64(4): 1325-1339.
- [2] Suprasad V A, Hoang P, Ravindra B Misra. Reliability characteristics of k -out-of- n warm standby systems[J]. IEEE Trans on Reliability, 2012, 61(4): 1007-1018.
- [3] Gregory L, Xing L D, Dai Y S. Reliability of non-coherent warm standby systems with reworking[J]. IEEE Trans on Reliability, 2015, 64(1): 444-453.
- [4] Jau-Chuan K, Chia-Huang W. Multi-server machine repair model with standbys and synchronous multiple vacation[J]. Computers & Industrial Engineering, 2012, 62(10): 296-305.
- [5] Barton R M, Damon W W. Reliability in a multi-state system[C]. The 6th Annual Southeastern Symposium on Systems Theory. Louisiana: IEEE, 1974: 359-363.
- [6] Wang Y. Risk assessment of stochastic spinning reserve of a wind-integrated multi-state generating system based on a cross-entropy method[J]. IET Generation, Transmission & Distribution, 2017, 11(2): 330-338.
- [7] Hao Z P, Guo J B, Zeng S K. Fully bayesian reliability assessment of multi-state systems with overlapping data[J]. J of Systems Engineering and Electronics, 2017, 28(1): 187-198.
- [8] Ourania C, Nikolaos L, Sonia M. Multi-state reliability systems under discrete time semi-Markovian hypothesis[J]. IEEE Trans on Reliability, 2011, 60(1): 80-87.
- [9] Reetu Malik S C. A parallel system with priority to preventive maintenance subject to maximum operation and repair times[J]. American J of Mathematics and Statistics, 2013, 3(6): 436-444.
- [10] Kit Nam F L, Zhang Y L, Kin K L. Analysis for a two-dissimilar-component cold standby repairable system with repair priority[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2011, 96(6): 1542-1551.
- [11] Erik P, Alena P, Michael V. Model of maintenance planning based on trend of machines failures with two priorities[J]. World J of Engineering and Technology, 2015, 3: 205-210.
- [12] Li Y, Meng X Y. Reliability analysis of a warm standby repairable system with priority in use[J]. Applied Mathematical Modelling, 2011, 35(3): 4295-4303.
- [13] Neuts M F, Meier K S. On the use of phase type distributions in reliability modelling of systems with two components[J]. OR Spektrum, 1981, 2(2): 227-234.
- [14] Valentina K. A retrial queueing system with renewal input and Phase type service time distribution[J]. Information Technologies and Mathematical Modelling, 2016, 638: 140-150.
- [15] Andras H, Marco S, Miklos T. Phase type and matrix exponential distribution in stochastic modeling[J]. Principles of Performance and Reliability Modeling and Evaluation, 2016, 35(3): 3-25.
- [16] Heungseob K, Pansoo K. Reliability models for a nonrepairable system with heterogeneous components having a phase-type time-to-failure distribution[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2017, 159(10): 37-46.
- [17] Qi-Ming H. Fundamentals of matrix-analytic methods[M]. London: Springer, 2013: 10-22.
- [18] Edward K. An introduction to stochastic processes[M]. Beijing: China Machine Press, 2006: 264-273.

(责任编辑: 齐 霖)