

基于连续体模型的人群疏散系统的边界控制

秦 伟[†], 庄 波, 崔宝同

(江南大学 物联网工程学院, 江苏 无锡 214122)

摘 要: 研究一类存在扰动的一维人群疏散系统的边界控制问题. 以走廊中的人群动态为例, 基于数量守恒定律建立人群动态模型; 由非线性偏微分方程描述系统模型, 并直接在分布参数的范畴内, 设计 Robin、Neumann、Dirichlet 三种边界控制律, 用于控制行人在疏散过程中的移动方式, 避免拥堵的产生; 利用李雅普诺夫方法对边界控制律作用下的人群疏散系统稳定性给出详细证明, 并通过一个仿真实例验证边界控制律的有效性. 研究成果可以应用到生活中单入口单出口场所的人群动态管理.

关键词: 人群疏散系统; 分布参数系统; 边界控制; 连续体模型

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Boundary control of the crowd evacuation system based on continuum model

QIN Wei[†], ZHUANG Bo, CUI Bao-tong

(School of IoT Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: This article pertains to the study of boundary control of a disturbed crowd evacuation system in one dimensional space. Based on the conservation law of mass, a continuum model is developed to represent the crowd evacuation dynamics in the corridor. The model is described by a nonlinear partial differential equation. In order to control the movement of the pedestrians during evacuation and avoid jams, Robin, Neumann and Dirichlet boundary control laws are designed in a distributed framework. The stability of the crowd evacuation system under the boundary control is proved by using the Lyapunov method. Finally, an example is given to illustrate the efficiency of the boundary control law. The research results can be applied to managing the crowd dynamic in the places with single-entrance single-exit.

Keywords: crowd evacuation system; distributed parameter system; boundary control; continuum model

0 引 言

在现实生活中, 会有很多场所出现人群的聚集, 如体育场、地铁站、机场等. 如何进行人群管理以确保行人的人身安全以及良好的舒适度体验是值得研究的课题. 1993 年在伦敦举行的人群安全工程会议^[1]指出了人群管理的重要性, 物理学家、社会学家、心理学家、计算机科学家以及交通学家都在各自的领域开始了深入的研究.

人群管理的首要任务是对人群动态进行建模, 由于研究对象相互之间存在着各种不确定关系, 且包含个体数量巨大, 很难建立一个通用的模型. 因此, 学者们从不同角度建立了多种模型来描述不同场合的人群动态, 如连续体模型、社会力模型^[2]、元胞自动机模

型^[3]、多智能体模型^[4]、博弈论模型^[5]等.

基于连续体模型对人群动态进行建模控制是将人群作为一个集合来研究, 用局部平均密度、平均速度和平均流量来描述人群动态, 属于宏观层面的人群动态研究. 基于连续体模型的人群动态研究开始于 2001 年, Hoogendoorn 等^[6]建立了一个同时适用于车辆交通和行人交通的连续体模型; Hughes^[7]基于 3 个假设建立了第一个行人交通连续体模型; Huang 等^[8]证明了 Hughes 的模型满足反应动态平衡原理, 即行人总是选择瞬间移动耗散最小的路线来通往目的地, 并提出了一个有效的模型求解方法; Appert-Rolland 等^[9]将车辆交通中的 Aw-Rascle 宏观模型推广到了双向多人行道的行人交通中; Hänseler 等^[10]综合车辆

收稿日期: 2017-06-08; 修回日期: 2017-09-11.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61174021, 61473136); 江苏省研究生科研与实践创新计划项目(KYCX17-1460).

责任编委: 吴淮宁.

作者简介: 秦伟(1982—), 男, 博士生, 从事分布参数系统、人群动态系统的控制理论与应用的研究; 崔宝同(1960—), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统控制理论与应用等研究.

[†]通讯作者. E-mail: weiqin@vip.jiangnan.edu.cn

交通中的连续方法与信元传输的方法来预测人群动态中的移动时间与浓度; Twarogowska等^[11]从数值分析的角度对一些连续体模型进行对比分析. 以上研究都集中在不同情况下人群动态的建模上, 对人群动态控制策略的研究很少. Wadoo等^[12]为一类一维人群动态模型设计了扩散、对流、对流-扩散3种状态反馈控制律; Wadoo^[13]用滑模控制方法对一类一维人群动态系统进行鲁棒性控制; Dong等^[14]为一类二维人群动态系统设计了扩散、对流-扩散两种状态反馈控制律; Qin等^[15]为一类由扩散模型描述行人移动速度与密度关系的一维人群动态模型设计了状态反馈控制律, 成功解决了控制饱和问题, 并将结果推广到二维空间.

本文基于数量守恒定律建立存在扰动的人群动态模型, 并用偏微分方程进行描述, 因此属于分布参数系统的范畴^[16-18]. 目前, 对分布参数系统的研究往往用降阶的方法, 将偏微分方程化为常微分方程来处理. 忽略系统的无穷维特性, 往往会产生错误, 即使降阶得到的有限维系统在控制器的作用下是稳定的, 也不能保证原无穷维系统一定稳定. 因此, 本文直接在无穷维的范畴对基于连续模型的人群疏散系统进行边界控制. 研究成果可以用于生活中单入口单出口场所的人群疏散, 比如走廊中的人群疏散, 景区中索桥、玻璃栈道等场所的游人管理. 最后, 通过一个仿真实例验证了边界控制律的有效性.

1 系统建模

目前, 许多已有文献选用著名的LWR模型来描述一维空间中的人群动态, 其模型表示如下:

$$\rho_t(x, t) + q_x(x, t) = 0. \quad (1)$$

其中: $x \in [0, L]$ 表示空间位置, $t \in [0, \infty)$ 表示时间. $H^2(0, L)$ 为Sobolev空间, 空间中的向量函数在 L_2 范数的定义下直到二阶导数是平方可积的. 本文之后的内容将在Sobolev空间中进行讨论. $\rho(x, t) \in H^2$ 表示人群密度, $v(x, t)$ 表示人群移动速度, $q(x, t)$ 表示人群流量, 且人群流量、速度与密度之间有如下关系:

$$q(x, t) = \rho(x, t)v(x, t).$$

模型(1)是基于数量守恒定律建立的, 它反映了某个区间内行人数量的变化等于由入口进入的行人数量减去由出口离开的行人数量. 以走廊中的行人疏散为例, 如图1所示, 一段时间内, 0到L之间行人数量的变化等于由0点进入的人数减去L点离开的人数.

在实际生活中, 走廊的两侧往往有很多房间, 在



图1 走廊中的行人疏散

行人疏散的过程中, 会有人从房间进入走廊, 也会有人从走廊进入房间, 这都会对疏散造成扰动, 如图2所示.

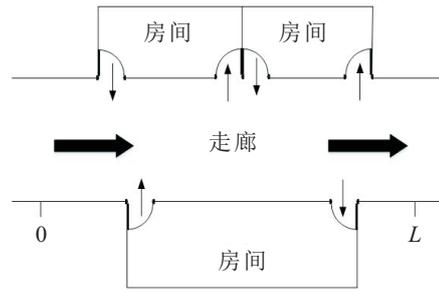


图2 存在扰动的走廊行人疏散

定义疏散过程中从走廊进入房间与从房间进入走廊的行人均为扰动行人. 定义 $\bar{\beta}(0, L, t)$ 为单位时间内扰动行人数量的净差值, 即单位时间内从房间进入走廊的人数减去从走廊进入房间的人数, 因此它的取值可正可负. 基于以上定义, 由图2所示的人群疏散系统可以简化为如图3所示.

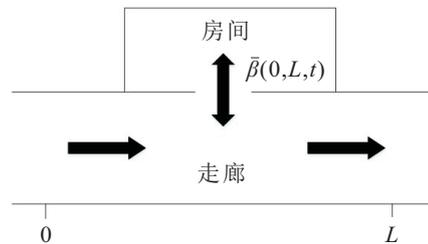


图3 简化的走廊行人疏散

基于数量守恒定律, 对图3所示的人群疏散动态建立如下模型:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \rho(x, t) dx = q(0, t) - q(L, t) + \bar{\beta}(0, L, t). \quad (2)$$

为了研究方便, 引入 $\beta(x, t)$ 表示扰动行人密度的净差值, 满足

$$\bar{\beta}(0, L, t) = \int_0^L \beta(x, t) dx.$$

通过相应变换, 方程(2)可以简化为

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = \beta(x, t). \quad (3)$$

诸多学者从不同角度建立模型来描述人群移动速度与密度之间的关系, 如 Greenshield 模型、Greenberg 模型、Underwood 模型、Drew 模型和 Pipes

Munjaj 模型等,关于这些模型的详细介绍可以参考 Kachroo 的著作^[19]. 本文选用扩散模型^[20]来表示人群移动速度与密度之间的关系,模型表示如下:

$$v(x, t) = v_f \left[1 - \frac{\rho(x, t)}{\rho_m} \right] - \frac{D\rho_x(x, t)}{\rho(x, t)}. \quad (4)$$

其中: v_f 表示自由移动速度,即当人群密度趋于 0 时,行人可以达到的最大移动速度; ρ_m 表示人群的最大密度; $D > 0$ 表示扩散系数.

注 1 扩散已经被许多文献证明是一个非常有用的概念,因为它可以使数学模型更贴切地描述实际动态. 本文之所以选择扩散模型(4)来描述人群移动速度与密度之间的关系,是因为模型中的扩散项可以反映这样一个现实:在人群疏散的过程中,行人会根据前方的人群密度来实时地调整其移动速度,当前方出现拥堵时,行人会提前降低其移动速度,而不是保持原来移动速度加入拥堵行列,造成移动速度的突然降低.

假设 1 $\beta(x, t) = \mu\rho(x, t)$. 其中: $x \in [0, L], t \in [0, \infty), \mu$ 为常数.

将扩散模型(4)代入模型(3)中,结合假设 1 得到所要研究的人群疏散系统模型如下:

$$\begin{aligned} \rho_t(x, t) + v_f\rho_x(x, t) - \frac{2v_f}{\rho_m}\rho(x, t)\rho_x(x, t) - \\ D\rho_{xx}(x, t) - \mu\rho(x, t) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

初始条件为

$$\rho(x, t_0) = \rho_0(x); \quad (6)$$

边界条件为

$$\begin{cases} a\rho(0, t) + b\rho_x(0, t) = u_0(t), \\ c\rho(L, t) + d\rho_x(L, t) = u_L(t). \end{cases} \quad (7)$$

其中: $u_0(t)$ 与 $u_L(t)$ 分别为 0 边界与 L 边界的控制输入, a, b, c, d 均为常数.

注 2 当 $\beta(x, t)$ 为常数或对密度 $\rho(x, t)$ 有已知的依赖关系时,可以利用特征值法对系统(5)~(7)进行求解^[21]. 限于篇幅,本文不再对系统解的适定性进行验证,假设系统的解满足适定性.

2 边界控制

本节主要通过设计相应的边界控制律,使人群疏散系统(5)~(7)实现指数稳定.

引理 1 (Poincaré 不等式)^[22] 对于任意的 $\rho(x, t) \in C^1[0, L]$, 以下不等式成立:

$$\int_0^L \rho^2(x, t) dx \leq 2L\rho^2(L, t) + 4L^2 \int_0^L \rho_x^2(x, t) dx.$$

证明

$$\int_0^L \rho^2(x, t) dx =$$

$$\begin{aligned} x\rho^2(x, t)|_0^L - 2 \int_0^L x\rho(x, t)\rho_x(x, t) dx = \\ L\rho^2(L, t) - 2 \int_0^L x\rho(x, t)\rho_x(x, t) dx \leq \\ L\rho^2(L, t) + \frac{1}{2} \int_0^L \rho^2(x, t) dx + \\ 2 \int_0^L x^2\rho_x^2(x, t) dx. \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L \rho^2(x, t) dx \leq \\ L\rho^2(L, t) + 2 \int_0^L x^2\rho_x^2(x, t) dx \leq \\ L\rho^2(L, t) + 2L^2 \int_0^L \rho_x^2(x, t) dx, \quad x \in [0, L]. \end{aligned}$$

因此,有

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho^2(x, t) dx \leq \\ 2L\rho^2(L, t) + 4L^2 \int_0^L \rho_x^2(x, t) dx. \quad \square \end{aligned}$$

定理 1 假设 $b, d \neq 0$, 设计边界控制律为

$$\begin{cases} u_0(t) = \left(a + \frac{bv_f}{2D} + \frac{bk_1}{D} \right) \rho(0, t) - \\ \quad \frac{2bv_f}{3D\rho_m} \rho^2(0, t), \\ u_L(t) = \left(c + \frac{dv_f}{2D} - \frac{dk_2}{D} - \frac{d}{2L} \right) \rho(L, t) - \\ \quad \frac{2dv_f}{3D\rho_m} \rho^2(L, t), \end{cases} \quad (8)$$

其中 k_1, k_2 为大于 0 的常数. 只要 $-\frac{D}{2L^2} + 2\mu < 0$, 则人群疏散系统(5)~(7)在边界控制律(8)的作用下可以实现指数稳定.

证明 定义 L_2 范数为

$$\|\rho\|_2 = \left[\int_0^L \rho^2(x, t) dx \right]^{1/2}.$$

构造 Lyapunov 泛函

$$W(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho^2(x, t) dx,$$

并对时间 t 求导,得

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) = & \int_0^L \rho(x, t)\rho_t(x, t) dx = \\ & \int_0^L \rho(x, t) \left[D\rho_{xx}(x, t) - v_f\rho_x(x, t) + \right. \\ & \left. \frac{2v_f}{\rho_m}\rho(x, t)\rho_x(x, t) + \mu\rho(x, t) \right] dx = \\ & D \int_0^L \rho(x, t)\rho_{xx}(x, t) dx - v_f \int_0^L \rho(x, t)\rho_x(x, t) dx + \\ & \frac{2v_f}{3\rho_m} \int_0^L [\rho^3(x, t)]_x dx + \mu \int_0^L \rho^2(x, t) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

由分部积分法可得

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) = & D\rho(x, t)\rho_x(x, t)|_0^L - D \int_0^L \rho_x^2(x, t) dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2v_f}{3\rho_m} \rho^3(x,t)|_0^L - \frac{v_f}{2} \rho^2(x,t)|_0^L + \mu \int_0^L \rho^2(x,t) dx = \\ & D\rho(L,t)\rho_x(L,t) - D\rho(0,t)\rho_x(0,t) - \\ & D \int_0^L \rho_x^2(x,t) dx + \frac{2v_f}{3\rho_m} \rho^3(L,t) - \\ & \frac{2v_f}{3\rho_m} \rho^3(0,t) - \frac{v_f}{2} \rho^2(L,t) + \\ & \frac{v_f}{2} \rho^2(0,t) + \mu \int_0^L \rho^2(x,t) dx. \end{aligned} \tag{10}$$

由边界条件(7)可得

$$\begin{cases} \rho_x(0,t) = \frac{1}{b}[u_0(t) - a\rho(0,t)], \\ \rho_x(L,t) = \frac{1}{d}[u_L(t) - c\rho(L,t)]. \end{cases} \tag{11}$$

将式(11)代入(10),得

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) = & \frac{D}{d} \rho(L,t)[u_L(t) - c\rho(L,t)] - \\ & \frac{D}{b} \rho(0,t)[u_0(t) - a\rho(0,t)] - \\ & D \int_0^L \rho_x^2(x,t) dx + \frac{2v_f}{3\rho_m} \rho^3(L,t) - \\ & \frac{2v_f}{3\rho_m} \rho^3(0,t) - \frac{v_f}{2} \rho^2(L,t) + \\ & \frac{v_f}{2} \rho^2(0,t) + \mu \int_0^L \rho^2(x,t) dx = \\ & -D \int_0^L \rho_x^2(x,t) dx + \mu \int_0^L \rho^2(x,t) dx + \\ & \rho(L,t) \left[\frac{D}{d} u_L(t) - \frac{cD}{d} \rho(L,t) + \right. \\ & \left. \frac{2v_f}{3\rho_m} \rho^2(L,t) - \frac{v_f}{2} \rho(L,t) \right] - \\ & \rho(0,t) \left[\frac{D}{b} u_0(t) - \frac{aD}{b} \rho(0,t) + \right. \\ & \left. \frac{2v_f}{3\rho_m} \rho^2(0,t) - \frac{v_f}{2} \rho(0,t) \right]. \end{aligned} \tag{12}$$

由引理1可得

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) \leq & \left(-\frac{D}{4L^2} + \mu \right) \int_0^L \rho^2(x,t) dx + \\ & \rho(L,t) \left[\frac{D}{d} u_L(t) - \frac{cD}{d} \rho(L,t) + \right. \\ & \left. \frac{2v_f}{3\rho_m} \rho^2(L,t) - \frac{v_f}{2} \rho(L,t) + \frac{D}{2L} \rho(L,t) \right] - \\ & \rho(0,t) \left[\frac{D}{b} u_0(t) - \frac{aD}{b} \rho(0,t) + \right. \\ & \left. \frac{2v_f}{3\rho_m} \rho^2(0,t) - \frac{v_f}{2} \rho(0,t) \right]. \end{aligned} \tag{13}$$

将控制律(8)代入(13),得

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) \leq & \left(-\frac{D}{4L^2} + \mu \right) \int_0^L \rho^2(x,t) dx - \\ & k_1 \rho^2(0,t) - k_2 \rho^2(L,t) \leq \\ & \left(-\frac{D}{4L^2} + \mu \right) \int_0^L \rho^2(x,t) dx = \\ & \left(-\frac{D}{2L^2} + 2\mu \right) W(t). \end{aligned} \tag{14}$$

因此,只要 $-\frac{D}{2L^2} + 2\mu < 0$, 人群疏散系统(5)~(7)在边界控制律(8)的作用下就可以实现指数稳定. \square

注3 在定理1中,如果 $a, c \neq 0$, 则边界控制律(8)为Robin边界控制律,其中 $\rho(0,t)$ 和 $\rho(L,t)$ 为测量变量.

注4 在定理1中,如果 $a = c = 0$, 则边界条件(7)变为

$$\begin{cases} b\rho_x(0,t) = u_0(t), \\ d\rho_x(L,t) = u_L(t). \end{cases} \tag{15}$$

综上,本文的研究对象变为Neumann边界控制问题,设计边界控制律为

$$\begin{cases} u_0(t) = \\ \left(\frac{bv_f}{2D} + \frac{bk_1}{D} \right) \rho(0,t) - \frac{2bv_f}{3D\rho_m} \rho^2(0,t), \\ u_L(t) = \\ \left(\frac{dv_f}{2D} - \frac{dk_2}{D} - \frac{d}{2L} \right) \rho(L,t) - \frac{2dv_f}{3D\rho_m} \rho^2(L,t), \end{cases} \tag{16}$$

其中 k_1, k_2 为大于0的常数. 仿照定理1的证明,可以很容易得到:只要 $-\frac{D}{2L^2} + 2\mu < 0$, 则人群疏散系统(5)、(6)和(15)在Neumann边界控制律(16)的作用下是指数稳定的. 其中: $\rho_x(0,t)$ 和 $\rho_x(L,t)$ 是控制输入, $\rho(0,t)$ 和 $\rho(L,t)$ 是测量变量.

注5 如果Neumann边界控制律(16)是可逆的, 则通过可逆变换可以很容易得到Dirichlet边界控制律,但是式(16)是不可逆的. 因此,若要得到Dirichlet边界控制律,则需将Neumann边界控制律重新设计为可逆的.

假设 $a = c = 0$, 由式(13)可得

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) \leq & \left(-\frac{D}{4L^2} + \mu \right) \int_0^L \rho^2(x,t) dx + \\ & \rho(L,t) \left[\frac{D}{d} u_L(t) + \frac{2v_f}{3\rho_m} \rho^2(L,t) + \frac{D}{2L} \rho(L,t) \right] - \\ & \rho(0,t) \left[\frac{D}{b} u_0(t) + \frac{2v_f}{3\rho_m} \rho^2(0,t) - \frac{v_f}{2} \rho(0,t) \right] \leq \\ & \left(-\frac{D}{4L^2} + \mu \right) \int_0^L \rho^2(x,t) dx + \\ & \rho(L,t) \left[\frac{D}{d} u_L(t) + \frac{v_f^2}{9\rho_m^2} \rho(L,t) + \frac{D}{2L} \rho(L,t) + \right. \\ & \left. \rho^3(L,t) \right] - \rho(0,t) \left[\frac{D}{b} u_0(t) - \frac{v_f}{2} \rho(0,t) - \right. \\ & \left. \frac{v_f^2}{9\rho_m^2} \rho(0,t) - \rho^3(0,t) \right] - \left[\frac{v_f}{3\rho_m} \rho(L,t) - \right. \\ & \left. \rho^2(L,t) \right]^2 - \left[\frac{v_f}{3\rho_m} \rho(0,t) + \rho^2(0,t) \right]^2. \end{aligned} \tag{17}$$

构造控制律

$$\begin{cases} u_0(t) = \\ \left(\frac{bv_f}{2D} + \frac{bv_f^2}{9D\rho_m^2} + \frac{bk_1}{D} \right) \rho(0,t) + \frac{b}{D} \rho^3(0,t), \\ u_L(t) = \\ \left(-\frac{dv_f^2}{9D\rho_m^2} - \frac{dk_2}{D} - \frac{d}{2L} \right) \rho(L,t) - \frac{d}{D} \rho^3(L,t), \end{cases} \quad (18)$$

其中 k_1, k_2 为大于0的常数. 将控制律(18)代入(17)

$$\begin{aligned} \rho(0,t) &= \sqrt[3]{\frac{D}{2}\rho_x(0,t) + \sqrt{\frac{D^2}{4}\rho_x^2(0,t) + \left(\frac{v_f}{6} + \frac{v_f^2}{27\rho_m^2} + \frac{k_1}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{D}{2}\rho_x(0,t) - \sqrt{\frac{D^2}{4}\rho_x^2(0,t) + \left(\frac{v_f}{6} + \frac{v_f^2}{27\rho_m^2} + \frac{k_1}{3}\right)^3}}, \\ \rho(L,t) &= \sqrt[3]{-\frac{D}{2}\rho_x(L,t) + \sqrt{\frac{D^2}{4}\rho_x^2(L,t) + \left(\frac{v_f^2}{27\rho_m^2} + \frac{k_2}{3} + \frac{D}{6L}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{D}{2}\rho_x(L,t) - \sqrt{\frac{D^2}{4}\rho_x^2(L,t) + \left(\frac{v_f^2}{27\rho_m^2} + \frac{k_2}{3} + \frac{D}{6L}\right)^3}}. \end{aligned}$$

其中: $\rho(0,t)$ 和 $\rho(L,t)$ 是控制输入, $\rho_x(0,t)$ 和 $\rho_x(L,t)$ 是测量变量.

3 数值仿真

本节通过一个实例来验证边界控制律(8)的有效性,选用的方法为Lax-Friedrichs仿真方法^[23]. 假设人群疏散系统(5)~(7)初始密度满足高斯分布

$$\rho(x, 0) = G \exp(-(x - \delta)^2).$$

其中: G 为最大密度值, δ 为高斯分布的中心. 数值仿真主要参数取值如下:

$$\begin{aligned} G &= 10, \delta = 2, L = 4, \rho_m = 10, D = 1, v_f = 4, \\ a &= 1, b = -1, c = 1, d = 1, k_1 = 4, k_2 = 4, \end{aligned}$$

空间离散步长为0.08,时间离散步长为0.001 25.

图4为未加控制的人群疏散系统的三维密度演化图. 从图4可以看出,未施加边界控制的人群疏散系统也是稳定的,且人群朝着出口 $x = 4$ 移动.

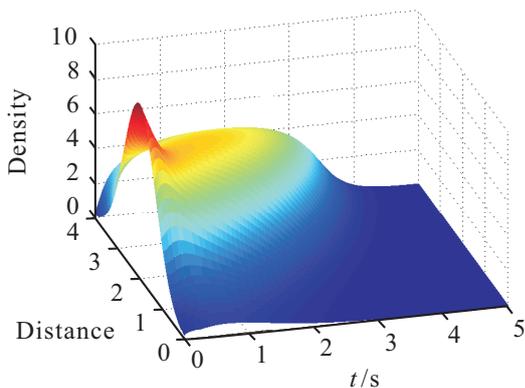


图4 未加控制的人群疏散系统密度演化

得

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &\leq \left(-\frac{D}{4L^2} + \mu \right) \int_0^L \rho^2(x,t) dx = \\ &\quad \left(-\frac{D}{2L^2} + 2\mu \right) W(t). \end{aligned}$$

因此,只要 $-\frac{D}{2L^2} + 2\mu < 0$, 则人群疏散系统(5)、(6)和(15)在Neumann边界控制律(18)的作用下是指数稳定的.

由于Neumann边界控制律(18)是可逆的,可以利用可逆变换得到Dirichlet边界控制律

图5为边界控制律作用下的人群疏散系统的三维密度演化图. 对比图4可以看出,在边界控制律(8)的作用下,可以用更短的时间完成疏散任务.

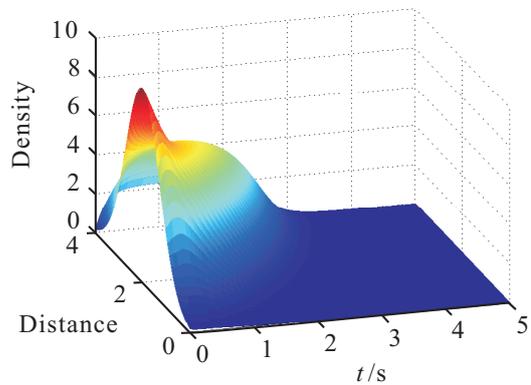


图5 边界控制下的人群疏散系统密度演化

为了更明显地演示控制律的作用,选取空间中 $x = 2$ 和 $x = 4$ 两点分别做未加控制与边界控制下的二维密度演化图,如图6和图7所示.

由图6可知,未施加边界控制时,在 $x = 2$ 点处的人口密度大约在3.8s之后变为0,在出口处人群的最大密度约为3.8,大约在4.6s之后变为0. 由图7可知,在施加边界控制的情况下,在 $x = 2$ 点处的人口密度大约需要2.6s之后变为0,出口处人群的最大密度约为2.2,大约在3.5s之后变为0. 对比图6与图7,可以明显地看到在边界控制律(8)的作用下,可以用更短的时间完成疏散任务,且出口处的人群密度更低. 这意味着更小的几率发生拥堵、踩踏等事件,保证了行人的人身安全及良好的舒适度体验.

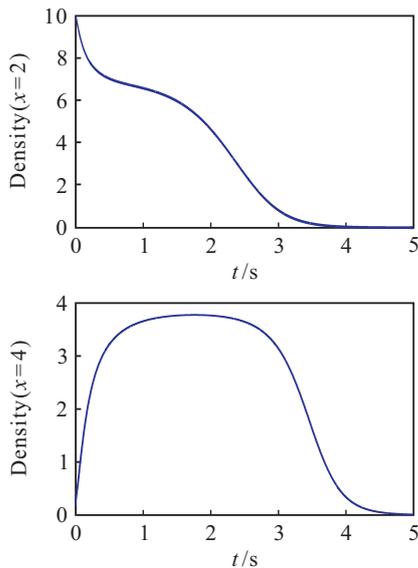


图6 未加控制的人群疏散系统在 $x=2$ 和 $x=4$ 处密度随时间的变化

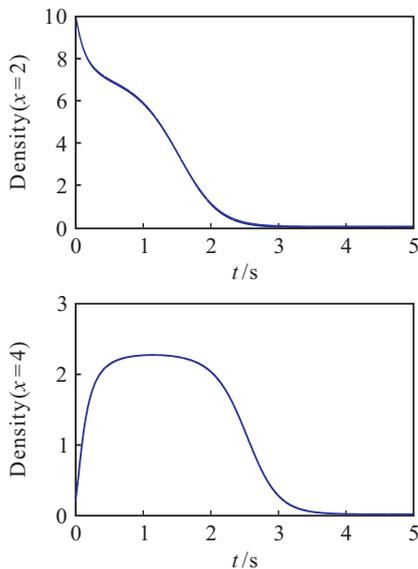


图7 边界控制下的人群疏散系统在 $x=2$ 和 $x=4$ 处密度随时间的变化

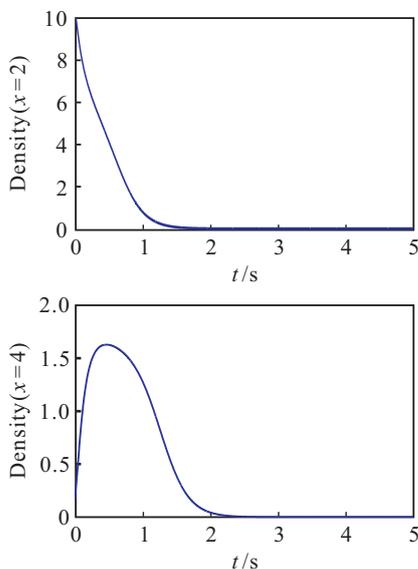


图8 当 $\mu = -0.5$ 时,边界控制下的人群疏散系统在 $x=2$ 和 $x=4$ 处密度随时间的变化

图8为 $\mu = -0.5$ 时边界控制下的人群疏散系统在 $x=2$ 和 $x=4$ 处的密度变化. 可以看出,在 $x=2$ 点处人口密度大约需要 1.5 s 之后变为 0, 整个疏散过程大约需要 2.2 s. 说明在疏散过程中,有行人从走廊进入两侧的房间,因此可以用更短的时间将走廊中的行人疏散完毕.

当 $\mu \geq 0.6$ 时,不加控制的人群疏散系统变的不稳定,而 $\mu \in [0.6, 0.75]$ 时,边界控制下的人群疏散系统依然保持稳定. 由以上对比可以看出,边界控制律(8)对人群疏散系统(5)~(7)的控制取得了良好的效果.

4 结论

本文基于数量守恒定律建立了一维人群动态模型,设计了 Robin、Neumann、Dirichlet 三种边界控制律以保证疏散的平稳进行,并对边界控制律作用下的人群疏散系统稳定性进行了详细的推导证明. 最后,通过一个仿真实例验证了边界控制律的有效性. 相对于已有状态反馈控制的研究成果,边界控制只需要在疏散通道的入口、出口施加控制即可,更容易应用于实际的人群疏散问题.

本文主要集中于理论上的研究,以期对实践起到一定的指导作用. 实际生活中,人群疏散控制的具体实施还会受到信号传递时间延迟等因素的影响,这将是下一步的研究内容.

参考文献(References)

- [1] Smith R A, Dickie J F. Engineering for crowd safety[C]. Proc of the Int Conf on Engineering for Crowd Safety. Amsterdam: Elsevier, 1993: 17-18.
- [2] Wang Q L, Chen Y, Dong H R, et al. A new collision avoidance model for pedestrian dynamics[J]. Chinese Physics B, 2015, 24(3): 453-462.
- [3] Guo R Y, Huang H J, Wong S C. Route choice in pedestrian evacuation under conditions of good and zero visibility: Experimental and simulation results[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2012, 46(6): 669-686.
- [4] Wagner N, Agrawal V. An agent-based simulation system for concert venue crowd evacuation modeling in the presence of a fire disaster[J]. Expert Systems with Applications, 2014, 41(6): 2807-2815.
- [5] Lachapelle A, Wolfram M. On a mean field game approach modeling congestion and aversion in pedestrian crowds[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2011, 45(10): 1572-1589.
- [6] Hoogendoorn S P, Bovy P H L. Generic gas-kinetic traffic systems modeling with applications to vehicular traffic

- flow[J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2001, 35(4): 317-336.
- [7] Hughes R L. A continuum theory for the flow of pedestrians[J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2002, 36(6): 507-535.
- [8] Huang L, Wong S C, Zhang M P, et al. Revisiting hughes' dynamic continuum model for pedestrian flow and the development of an efficient solution algorithm[J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2009, 43(1): 127-141.
- [9] Appert-Rolland C, Degond P, Motsch S. Two-way multi-lane traffic model for pedestrians in corridors[J]. *Networks and Heterogeneous Media*, 2011, 6(3): 351-381.
- [10] Hänseler F S, Bierlaire M, Farooq B, et al. A macroscopic loading model for time-varying pedestrian flows in public walking areas[J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2014, 69: 60-80.
- [11] Twarogowska M, Goatin P, Duvigneau R. Comparative study of macroscopic pedestrian models[J]. *Transportation Research Procedia*, 2014, 2: 477-485.
- [12] Wadoo S A, Kachroo P. Feedback control of crowd evacuation in one dimension[J]. *IEEE Trans on Intelligent Transportation Systems*, 2010, 11(1): 182-193.
- [13] Wadoo S A. Sliding mode control of crowd dynamics[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 2013, 21(3): 1008-1015.
- [14] Dong H R, Yang X X, Chen Y, et al. Pedestrian evacuation in two-dimension via state feedback control[C]. *American Control Conf. Washington: IEEE*, 2013: 302-306.
- [15] Qin W, Cui B T, Lou X Y. Feedback control design of crowd evacuation system based on the diffusion model[C]. *The 29th Chinese Control and Decision Conf. Chongqing: IEEE*, 2017: 2519-2524.
- [16] 高存臣, 刘振, 徐瑞萍. 一类具有连续分布时滞的分布参数系统的反馈控制[J]. *控制与决策*, 2013, 28(3): 445-450.
(Gao C C, Liu Z, Xu R P. Feedback control for a class of distributed parameter systems with continuous distributed time-delay[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(3): 445-450.)
- [17] 江正仙, 崔宝同, 楼旭阳, 等. 基于防碰撞的移动SAN对分布参数系统的控制[J]. *控制与决策*, 2014, 29(12): 2242-2246.
(Jiang Z X, Cui B T, Lou X Y, et al. Controlling distributed parameter systems utilizing mobile sensor-actuator networks with guaranteed collision avoidance[J]. *Control and Decision*, 2014, 29(12): 2242-2246.)
- [18] 傅勤. 非正则分布参数系统的迭代学习控制[J]. *控制与决策*, 2016, 31(1): 114-122.
(Fu Q. Iterative learning control for irregular distributed parameter systems[J]. *Control and Decision*, 2016, 31(1): 114-122.)
- [19] Kachroo P, Özbay K. *Feedback ramp metering in intelligent transportation systems*[M]. New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003: 38-43.
- [20] Musha T, Higuchi H. Traffic current fluctuation and the burgers equation[J]. *Japanese J of Applied Physics*, 1978, 17(5): 811.
- [21] Haberman R. *Mathematical models: Mechanical vibrations, population dynamics, and traffic flow*[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1997: 385-389.
- [22] Krstic M, Smyshlyaev A. *Boundary control of PDEs: A course on backstepping designs*[M]. Pennsylvania: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008: 17.
- [23] Leveque R J. *Finite volume methods for hyperbolic problems*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002: 227-252.

(责任编辑: 齐 霖)