

基于扩张状态观测器的动态抗饱和补偿器设计方法

刘 晨¹, 董朝阳^{1†}, 王 青², 冉茂鹏²

(1. 北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191;

2. 北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

摘 要: 针对一类受外界扰动以及执行器饱和影响的不确定非线性系统, 提出一种基于扩张状态观测器的动态抗饱和补偿器设计方法. 首先通过将系统的不确定项以及外部扰动作为扩张状态, 设计线性扩张状态观测器 (ESO) 对系统的总扰动进行估计; 然后, 在控制器中引入对扩张状态的估计值, 对系统的总扰动进行补偿, 设计了动态抗饱和补偿器, 将控制器、观测器以及动态抗饱和补偿器的参数求解问题转化为基于 LMI 不等式组约束的优化问题, 确保系统具有尽可能大的收敛域; 最后通过数值仿真验证所提出设计方法的有效性.

关键词: 抗饱和; 非线性系统; 扩张状态观测器; 收敛域

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Dynamic anti-windup compensator design based on ESOs

LIU Chen¹, DONG Chao-yang^{1†}, WANG Qing², RAN Mao-peng²

(1. School of Aeronautical Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China; 2. School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: A dynamic anti-windup compensator design method is proposed for a class of nonlinear systems subject to actuator saturation and external disturbance based on extended state observers (ESOs). Uncertainty and external disturbance of the system are treated as extended state, and the corresponding ESO is designed to estimate the total disturbance. Then, total disturbance is compensated in the controller by introducing the estimate of extend state, and a dynamic anti-windup compensator design method is presented. The problem of parameter tuning of the controller, observer and dynamic anti-windup compensator is translated into the problem of optimization with linear matrix inequalities constraint, which maximizes the estimate of domain of attraction. A numerical example is given to illuztrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: anti-windup; nonlinear system; extended state observer; domain of attraction

0 引 言

在实际的控制系统中, 执行器无法传输任意大的控制信号, 当控制信号过大时, 执行器的输出将受到影响, 从而引起系统性能下降, 该现象被称为执行器的饱和问题. 执行器饱和将会造成控制性能下降甚至引起系统失稳. 为解决这一问题, 设计抗饱和和补偿器对饱和和约束引起的偏差进行补偿, 成为一种行之有效的抗饱和控制策略^[1-2]. 文献[3]针对一类具有时延以及输入饱和约束的线性微分包含系统, 提出一种抗饱和和补偿器设计方法, 并对系统收敛域进行了估计; 文献[4]针对一类线性变参数系统, 设计了一种基于增益调度的抗饱和和补偿器, 在确保系统鲁棒性能的同

时降低了抗饱和和补偿器设计的保守性; 文献[5]将进行抗饱和和补偿后的闭环系统视为带有输入死区的线性系统, 设计了一种切换抗饱和和补偿器, 有效地扩大了系统收敛域范围. 在非线性系统抗饱和控制方面, 文献[6]针对一类输入受限且可线性化的非线性系统设计了抗饱和控制器; 文献[7]针对一类具有执行器饱和的非线性控制系统, 提出了一种双环动态抗饱和和补偿器设计方法, 有效改善了系统的控制性能. 同时, 智能控制方法^[8-9]以及自适应控制方法^[10-11]均成为目前非线性系统抗饱和控制的有效手段, 通过对外部扰动以及饱和约束的在线估计, 在控制器中完成了相应的补偿. 然而, 由于模糊系统以及神经网络系统等

收稿日期: 2017-06-16; 修回日期: 2017-08-28.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61374012, 61403028); 航空科学基金项目(2016ZA51011).

责任编委: 赵军.

作者简介: 刘晨(1990—), 男, 博士生, 从事飞行器导航、制导与控制的研究; 董朝阳(1966—), 男, 教授, 博士, 从事飞行器总体设计、电气系统综合等研究.

†通讯作者. E-mail: dongchaoyang@buaa.edu.cn

结构较为复杂,难以在实际工程中应用;自适应控制方法需要进行在线的参数估计与调整,在一定程度上增加了实际系统应用的难度.综合上述分析,非线性系统的抗饱和控制问题仍然是当前研究的重要方向.

另一方面,外部扰动、系统参数以及结构带来的不确定性几乎存在于所有的控制系统中.对于受到扰动的不确定非线性系统,自抗扰控制策略具有良好的控制效果.将系统中的未知项及外界干扰处理成系统的扩张状态,使用扩张状态观测器对其进行观测并消除未知项及干扰的影响.扩张状态观测器不依赖于系统的精确模型,且结构简单、易于实现,因此自抗扰控制在理论分析与实际工程中均有较为广泛的应用^[12-14].文献[15]提出一种参数化的线性自抗扰控制器,降低了控制器参数整定的难度;文献[16]针对一类子系统间具有耦合且受外部干扰影响的复杂关联系统,提出一类基于扩张状态观测器的分散模型预测控制算法,提高了系统的抗扰能力;文献[17]建立了电气比例阀控气动加载系统的动态机理模型,并对系统存在参数不确定、时延及耦合等情况提出了一种自抗扰控制方法.综上,可考虑将扩张状态观测器引入不确定饱和和非线性系统中,并基于此完成抗饱和控制策略的设计.

本文针对一类受到外部扰动的不确定非线性系统抗饱和控制策略进行研究,提出一种基于扩张状态观测器的动态抗饱和和补偿器设计方法,使系统具有尽可能大的收敛域.首先,通过设计扩张状态观测器,对非线性系统的不可测状态、未知非线性动态以及外部干扰进行估计;然后,分别对控制器及动态抗饱和和补偿器进行设计和稳定性分析,同时将控制器、观测器以及抗饱和和补偿器的参数求解问题转化为基于LMI不等式组约束的优化问题,确保系统具有尽可能大的收敛域;最后,通过仿真结果验证本文所提出控制策略的有效性和优越性.与文献[18]中提出的抗饱和和补偿器相比,本文所提出的方法能够使系统具有更大的收敛域;同时,相比于文献[8]和文献[10],本文所提出的控制策略结构较为简单,且易于调参,能够更好地应用于实际工程.

1 问题描述

考虑具有如下形式的非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = f(x_1, \dots, x_n) + d + \text{bsat}(u), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 为系统状态, f 为未知的连续可导函数, d 为外部扰动.同时,考虑系统的控制输入受饱和和约束的情况.

假设1 d 和 \dot{d} 均有界,且有 $|d| \leq d_0, b > d_0$ ^[18].

假设1是针对系统(1)而提出的.在本文中,考虑系统受到的干扰是有界的.若假设1中的条件 $b > d_0$ 不成立,则系统是不可控的.在假设1成立的情况下,根据自抗扰控制策略,可以将未知非线性动态 f 以及外部干扰 d 扩张为新的状态^[13],即

$$x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n) + d. \quad (2)$$

引入扩张状态后的系统表示如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = x_{n+1} + \text{bsat}(u), \\ \dot{x}_{n+1} = h. \end{cases} \quad (3)$$

从而可设计具有如下形式的线性扩张状态观测器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \alpha_1(x_1 - \hat{x}_1), \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} = \hat{x}_n + \alpha_{n-1}(x_1 - \hat{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_n = \hat{x}_{n+1} + \alpha_n(x_1 - \hat{x}_1) + \text{bsat}(u), \\ \dot{\hat{x}}_{n+1} = \alpha_{n+1}(x_1 - \hat{x}_1), \end{cases} \quad (4)$$

对系统的不可测状态、非线性动态以及外部扰动进行观测.其中

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}] = \left[\frac{l_1}{\varepsilon}, \frac{l_2}{\varepsilon^2}, \dots, \frac{l_{n+1}}{\varepsilon^{n+1}} \right].$$

引入观测器增益向量 $L = [l_1, l_2, \dots, l_{n+1}]^T$, L 应能确保多项式 $s^{n+1} + l_1 s^n + \dots + l_n s + l_{n+1}$ 满足Hurwitz稳定条件.本文的目标是基于式(4)所示的扩张状态观测器,针对一类不确定非线性系统(1)设计控制器以及动态抗饱和和补偿器,并调节观测器及抗饱和和补偿器的参数,使系统在受到饱和和约束的情况下具有尽可能大的收敛域.

2 动态抗饱和和补偿器设计

在控制输入受饱和和约束的情况下,引入变量 $q = \text{sat}(u) - u$,构造具有如下形式的动态抗饱和和补偿器:

$$\begin{cases} \dot{x}_a = A_a x_a + B_a q, \\ \zeta = C_a x_a + D_a q. \end{cases} \quad (5)$$

其中: $x_a \in \mathbf{R}^{m \times 1}$ 为抗饱和和观测器状态; $A_a \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $B_a \in \mathbf{R}^{m \times 1}$, $C_a \in \mathbf{R}^{1 \times m}$, $D_a \in \mathbf{R}^{1 \times 1}$ 为待设计矩阵; ζ 为抗饱和和补偿器的输出.

设计状态反馈控制器

$$u = \frac{1}{b}(K\hat{x} - \hat{x}_{n+1} + \zeta). \quad (6)$$

其中: $K \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ 为状态反馈增益阵, $\hat{x} = [\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n]^T$ 为系统状态的观测值, \hat{x}_{n+1} 为扩张状态的观测值.

本节后续将对系统稳定性进行分析, 同时完成控制器、观测器以及动态抗饱和补偿器的参数设计.

首先, 将进行状态扩张后的系统 (3) 写成如下矩阵形式:

$$\dot{x} = Ax + B_1x_{n+1} + B_2\text{sat}(u). \quad (7)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n,$$

同时, 定义观测误差为

$$\eta_i = \frac{x_i - \hat{x}_i}{\varepsilon^{n+1-i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (8)$$

可得到误差动态的矩阵形式

$$\varepsilon\dot{\eta} = (A_0 + LB_3)\eta + B_4\varepsilon h. \quad (9)$$

其中

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_{n+1} \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(n+1) \times (n+1)},$$

$$B_3^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n+1}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n+1}.$$

从而, 闭环系统动态可以描述为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} x_{n+1} + \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{sat}(u) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_a \end{bmatrix} q, \\ \varepsilon\dot{\eta} = (A_0 + LB_3)\eta + B_4\varepsilon h, \\ u = \frac{1}{b}(K\hat{x} + C_a x_a - \hat{x}_{n+1} + D_a q). \end{cases} \quad (10)$$

由于在系统 (1) 中, 非线性项 f 连续且可导, 扩张

状态 x_{n+1} 及其导数 h 对系统状态 x 具有如下的数值关系:

$$|x_{n+1}| \leq C_1 \|x\| + d_0,$$

$$|h| \leq C_2 \|x\| + C_3,$$

其中 C_1, C_2 和 C_3 为正常数. 为方便后续的证明, 定义对角矩阵 $T = \text{diag}\{\varepsilon^n, \varepsilon^{n-1}, \dots, \varepsilon\}$, 以及向量 $T_1 = [-B_1KT \ B_1], T_2 = [-KT \ 1], T_3 = [K - KT \ 1]$; 同时引入下列常数:

$$C_4 = \frac{b - d_0}{\|T_3\| + C_1},$$

$$\bar{C}_4 = \left(C_2 + \frac{C_3}{C_4}\right)^2 + \left(C_1 + \frac{d_0}{C_4}\right)^2,$$

并给出如下引理.

引理 1 如果 u 和 ω 均为集合 $\mathcal{H} = \{u \in \mathbf{R}; \omega \in \mathbf{R}; -1 \leq u - \omega \leq 1\}$ 中的元素, 则对于任意的常数 W , 饱和和非线性项 q 满足下述不等式^[19]:

$$qW(q + \omega) \leq 0. \quad (11)$$

在上述分析及引理的基础上, 得到如下结论.

定理 1 若假设 1 成立, 且存在正定矩阵 $P \in \mathbf{R}^{(n+1) \times (n+1)}, M \in \mathbf{R}^{n \times n}, N \in \mathbf{R}^{m \times m}$, 矩阵 $Q \in \mathbf{R}^{(n+1) \times 1}, F \in \mathbf{R}^{1 \times m}, K \in \mathbf{R}^{1 \times n}, A_a \in \mathbf{R}^{m \times n}, J \in \mathbf{R}^{m \times 1}, Q_1 \in \mathbf{R}^{(n+1) \times (n+1)}, Z_1 \in \mathbf{R}^{1 \times n}, Z_2 = [Z_{21} \ 0] \in \mathbf{R}^{1 \times (n+1)}, Z_3 \in \mathbf{R}^{1 \times m}$ 及正常数 E, R, U, γ , 常数 H 满足

$$\begin{bmatrix} P & 0 & 0 & T_2^T + Z_2^T \\ * & M & 0 & M^T K^T - Z_1^T \\ * & * & N & F^T - Z_3^T \\ * & * & * & b^2 \gamma \end{bmatrix} \geq 0; \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_{11} & T_1^T & 0 & \frac{1}{b} Z_2^T & 0 & P B_4 \\ * & \psi_{22} & B_1 F & \psi_{24} & B_1 U & 0 \\ * & * & \psi_{33} & J - \frac{1}{b} Z_3^T & 0 & 0 \\ * & * & * & -2\left(E + \frac{1}{b} H\right) & \frac{1}{b} U & 0 \\ * & * & * & * & -U & 0 \\ * & * & * & * & * & -R \end{bmatrix} < 0; \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & R \\ U & 1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} P & I \\ I & Q_1 \end{bmatrix} \geq 0; \quad (14)$$

$$Q_1 - \frac{U}{C_4} I \leq 0, \quad M - \frac{U}{C_4} I \leq 0, \quad N - \frac{U}{C_4} I \leq 0. \quad (15)$$

其中

$$\psi_{11} = \frac{1}{\varepsilon}(P A_0 + A_0^T P + Q B_3 + B_3^T Q^T) + P,$$

$$\psi_{22} = M A^T + A M + M K^T B T_1^+ B_1 K M + M,$$

$$\psi_{33} = NA_a^T + A_a N + N,$$

$$\psi_{24} = B_1 H + B_2 E - \frac{1}{b} Z_1^T.$$

所设计的观测器(4)、抗饱和和补偿器(5)及控制器(6)中的参数可分别选择如下: $L = P^{-1}Q, B_a = E^{-1}J, C_a = FN^{-1}, D_a = E^{-1}H$, 并能够确保系统(1)以

$$\chi = \{x \in \mathbf{R}^n; \eta \in \mathbf{R}^{n+1}; x^T X x + x_a^T Y x_a + \eta^T P \eta \leq \gamma^{-1}\} \quad (16)$$

所示范围中任意一点作为初始状态时, 闭环系统均收敛到原点.

证明 首先, 根据引理1, 选择如式(6)所示的 u 以及具有如下形式的 ω :

$$\omega = \frac{1}{b}(G_1 x + G_3 x_a - G_2 \tilde{\eta} - x_{n+1} + D_a q). \quad (17)$$

其中: $\tilde{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]^T, G_1 \in \mathbf{R}^{1 \times n}, G_2 \in \mathbf{R}^{1 \times n}, G_3 \in \mathbf{R}^{1 \times m}$. 从而得到

$$u - \omega = \frac{1}{b}[(K - G_1)x + (C_a - G_3)x_a + \tilde{G}_2 \eta], \quad (18)$$

$$\tilde{G}_2 = [G_2 - K T \quad 1].$$

则如式(16)所示的集合包含在多面体集 \mathcal{H} 中的等价条件为

$$x^T X x + x_a^T Y x_a + \eta^T P \eta \leq \gamma^{-1} \|u - \omega\|^2. \quad (19)$$

将式(19)展开可得

$$[\eta^T \quad x^T \quad x_a^T] \begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & \Upsilon_{12} & \Upsilon_{13} \\ * & \Upsilon_{22} & \Upsilon_{23} \\ * & * & \Upsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ x \\ x_a \end{bmatrix} \geq 0. \quad (20)$$

其中

$$\Upsilon_{11} = P + G_2^T \tilde{G}_2,$$

$$\Upsilon_{12} = -b^{-2} \gamma^{-1} G_2^T (K - G_1),$$

$$\Upsilon_{13} = -b^{-2} \gamma^{-1} \tilde{G}_2^T (C_a - G_3),$$

$$\Upsilon_{22} = X - b^{-2} \gamma^{-1} (K - G_1)^T (K - G_1),$$

$$\Upsilon_{23} = -b^{-2} \gamma^{-1} (K - G_1)^T (C_a - G_3),$$

$$\Upsilon_{33} = Y - b^{-2} \gamma^{-1} (C_a - G_3)^T (C_a - G_3).$$

运用 Shur 补定理, 将式(20)写成 LMI 形式, 即

$$\begin{bmatrix} P & 0 & 0 & \tilde{G}_2^T \\ * & X & 0 & K^T - G_1^T \\ * & * & Y & C_a^T - G_3^T \\ * & * & * & b^2 \gamma \end{bmatrix} \geq 0. \quad (21)$$

用对角阵 $\text{diag}\{I, X^{-1}, Y^{-1}, I\}$ 对式(21)进行恒等变换, 并引入如下变量: $M = X^{-1}, N = Y^{-1}, F = C_a Y^{-1}, Z_1 = X^{-1} G_1, Z_2 = [G_2 \quad 0], Z_3 = Y^{-1} G_3$, 从而可知定理条件(12)能够确保式(19)成立.

然后, 结合引理1以及 ω 的表达式(17), 可以得到

$$\begin{aligned} qW(q + \omega) &= \\ qW\left(q + \frac{1}{b}(G_1 x + G_3 x_a - \tilde{G}_2 \eta - x_{n+1} + D_a q)\right) &= \\ q\left(W + \frac{1}{b} W D_a\right)q + qW \frac{1}{b} G_1 x + \\ qW \frac{1}{b} G_3 x_a - qW \frac{1}{b} G_2 \tilde{\eta} - qW \frac{1}{b} x_{n+1}. \end{aligned} \quad (22)$$

由于对任意 $\|[\eta \quad x \quad x_a]^{-1}\| \geq C_4$, 有如下关系:

$$\begin{aligned} |x_{n+1}| &\leq C_1 \|x\| + d_0 \leq \\ C_1 \left\| \begin{bmatrix} \eta \\ x \\ x_a \end{bmatrix} \right\| + d_0 &\leq \left(C_1 + \frac{d_0}{C_4}\right) \left\| \begin{bmatrix} \eta \\ x \\ x_a \end{bmatrix} \right\|, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} |h| &\leq C_2 \|x\| + C_3 \leq C_2 \left\| \begin{bmatrix} \eta \\ x \\ x_a \end{bmatrix} \right\| + C_3 \leq \\ \left(C_2 + \frac{C_3}{C_4}\right) &\left\| \begin{bmatrix} \eta \\ x \\ x_a \end{bmatrix} \right\|. \end{aligned} \quad (24)$$

对于任意常数 R_1, R 及 $\|[\eta \quad x \quad x_a]^{-1}\| \geq C_4$, 有

$$\begin{aligned} \eta^T P \eta + x^T X x + x_a^T Y x_a - h^T R h - x_{n+1}^T R_1 x_{n+1} &\geq \\ \lambda_{\min}(P) \|\eta\|^2 + \lambda_{\min}(X) \|x\|^2 + \lambda_{\min}(Y) \|x_a\|^2 - \\ R(C_2 \|x\| + C_3)^2 - R_1(C_1 \|x\| + d_0)^2 &\geq \\ \min\{\lambda_{\min}(P), \lambda_{\min}(X), \lambda_{\min}(Y)\} \times \\ (\|\eta\|^2 + \|x\|^2 + \|x_a\|^2) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(R\left(C_2 + \frac{C_3}{C_4}\right)^2 + R_1\left(C_1 + \frac{d_0}{C_4}\right)^2\right) &\left\| \begin{bmatrix} \eta \\ x \\ x_a \end{bmatrix} \right\|^2 \geq \\ \left(\min\{\lambda_{\min}(P), \lambda_{\min}(X), \lambda_{\min}(Y)\} - \right. \\ \left. R\left(C_2 + \frac{C_3}{C_4}\right)^2 - R_1\left(C_1 + \frac{d_0}{C_4}\right)^2\right) &\left\| \begin{bmatrix} \eta \\ x \\ x_a \end{bmatrix} \right\|^2. \end{aligned} \quad (25)$$

引入变量 $U = R_1^{-1}$, 由式(14)可推导出 $\mathcal{Q}_1 \leq P^{-1}, R_1 \leq R$. 结合式(15), 可以得到 $\lambda_{\min}(P) \geq R_1 \bar{C}_4, \lambda_{\min}(X) \geq R_1 \bar{C}_4, \lambda_{\min}(Y) \geq R_1 \bar{C}_4$; 由式(25)可得

$$\begin{aligned} \eta^T P \eta + x^T X x + x_a^T Y x_a - h^T R h - x_{n+1}^T R_1 x_{n+1} &\geq \\ \left(\min\{\lambda_{\min}(P), \lambda_{\min}(X), \lambda_{\min}(Y)\} - \right. \\ \left. R_1 \bar{C}_4\right) &\left\| \begin{bmatrix} \eta \\ x \\ x_a \end{bmatrix} \right\|^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

为系统选取Lyapunov函数

$$V = \eta^T P \eta + x^T X x + x_a^T Y x_a. \quad (27)$$

结合引理1以及式(26),可知使Lyapunov函数 $\dot{V} < 0$ 的充分条件为

$$\begin{aligned} \dot{V} - 2qW(q + \omega) + \eta^T P \eta + x^T X x + \\ x_a^T Y x_a - h^T R h - x_{n+1}^T R_1 x_{n+1} < 0. \end{aligned} \quad (28)$$

将式(28)展开可得

$$\begin{bmatrix} \psi_{11} & T_1^T X & 0 & \frac{1}{b} W Z_2^T & 0 & P B_4 \\ * & \Phi_{22} & X B_1 C_a & \Phi_{24} & X B_1 & 0 \\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} & 0 & 0 \\ * & * & * & \Phi_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -R_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & -R \end{bmatrix} < 0. \quad (29)$$

其中

$$\Phi_{22} = A^T X + X A + K^T B_1^T X + X B_1 K + X,$$

$$\Phi_{33} = A_a^T Y + Y A_a + Y,$$

$$\Phi_{24} = X B_1 D_a + X B_2 - \frac{1}{b} W G_1^T,$$

$$\Phi_{34} = Y B_a - \frac{1}{b} W G_3^T,$$

$$\Phi_{44} = -2\left(W + \frac{1}{b} W D_a\right).$$

利用对角阵 $\text{diag}\{I, X^{-1}, Y^{-1}, W^{-1}, R_1^{-1}, 1\}$ 对式(29)进行恒等变换,并引入下述变量进行替换: $Q = PL, E = W^{-1}, H = W^{-1}D_a, J = W^{-1}B_a, Z_1 = G_1M, Z_3 = G_3N$,可知式(13)能够确保式(28)成立.因此,若式(12)~(15)成立,则对于任意 $\|[\eta \ x \ x_a]^{-1}\| \geq C_4 \geq 0$,均有 $\dot{V} < 0$.

另外,针对 $\|[\eta \ x \ x_a]^{-1}\| \leq C_4$ 的情况,有

$$\begin{aligned} |K\hat{x} - \hat{x}_{n+1}| = \\ |Kx - KT\tilde{\eta} + \eta_{n+1} - x_{n+1}| \leq \\ \|T_3\| \left\| \begin{bmatrix} \eta \\ x \\ x_a \end{bmatrix} \right\| + C_1 \|x\| + d_0 \leq \\ (\|T_3\| + C_1) \left\| \begin{bmatrix} \eta \\ x \\ x_a \end{bmatrix} \right\| + d_0 \leq b, \end{aligned} \quad (30)$$

即执行器工作在线性区域.此时,若式(13)成立,则可确保 $A + B_1K$ 以及 $A_0 + LB_3$ 均满足Hurwitz稳定条件,保证了闭环系统渐近稳定^[20].

综上所述,若不等式(12)~(15)成立,则初始状态

位于式(16)所示的范围内时,闭环系统渐近稳定.□

注1 在本文所提出的抗饱和控制策略中,控制器增益和观测器增益是分别进行设计的,观测器增益可以通过定理1的结论进行选择;控制器增益 K 的选择应使 $A + B_1K$ 满足Hurwitz稳定条件,可通过极点配置方法^[21]对 K 进行设置.

注2 为扩大所估计收敛域的范围,可选择具有如下形式的优化指标对定理1的结论进行优化^[22]:

$$\min \gamma + \text{trace}(P) + \text{trace}(X) + \text{trace}(Y) < 0. \quad (31)$$

引入如下所示的LMI:

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & M \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} Y & I \\ I & M \end{bmatrix} \geq 0, \quad (32)$$

其中 $X \in R^{n \times n}$ 及 $Y \in R^{m \times m}$ 均为正定矩阵.由式(32)可得

$$X \geq M^{-1} = X, Y \geq N^{-1} = Y,$$

从而有

$$\text{trace}(X) \geq \text{trace}(X), \text{trace}(Y) \geq \text{trace}(Y).$$

故优化指标式(31)可转化为

$$\min \gamma + \text{trace}(P) + \text{trace}(X) + \text{trace}(Y) < 0. \quad (33)$$

因此,使收敛域最大的观测器增益及抗饱和补偿器增益选取问题,可转化为以式(31)为优化指标,且受式(12)~(15)以及(32)约束的优化问题.

注3 在实际的系统中,观测器的增益应为有界的.可针对上述结论中的矩阵 $Q = [Q_1, Q_2, \dots, Q_{n+1}]^T$ 引入约束条件

$$|Q_i| \leq \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1. \quad (34)$$

由 $L = P^{-1}Q$ 可知,上述条件可以防止观测器增益过大.同时,该约束可直接加入基于LMI约束的优化中.

3 数值仿真

考虑如下的非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{24}(x_1 + x_2) + \frac{1}{12} \left(\sin\left(\frac{x_1}{2}\right) \cos\left(\frac{x_2}{3}\right) + \right. \\ \left. \cos\left(\frac{x_1}{3}\right) \sin\left(\frac{x_2}{2}\right) \right) + \frac{1}{20} \sin(\pi t) + 3\text{sat}(u), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (35)$$

其中

$$f = -\frac{1}{24}(x_1 + x_2) + \frac{1}{12} \left(\sin\left(\frac{x_1}{2}\right) \cos\left(\frac{x_2}{3}\right) + \cos\left(\frac{x_1}{3}\right) \sin\left(\frac{x_2}{2}\right) \right),$$

$$d = \frac{1}{20} \sin(\pi t), \quad b = 3.$$

定义扩张状态 $x_3 = f + d$.直接计算可得

$$|f| \leq C_1 \|x\| = 0.1179 \|x\|,$$

$$|h| \leq 0.1242 \|x\| + 0.3889.$$

同时选取状态反馈增益 $K = [-3 \ -2]$ 以及 $\varepsilon = 0.01$, 设置约束条件 $|Q_i| \leq 1, i = 1, 2, 3$, 求解优化问题可得

$$P = \begin{bmatrix} 0.9026 & -0.0012 & -0.5527 \\ -0.0012 & 0.4731 & -0.1066 \\ -0.5527 & -0.1066 & 1.1193 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 1.3032 & 0.2763 \\ 0.2763 & 0.6215 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.9563 & 0.1294 \\ 0.1294 & 0.3567 \end{bmatrix},$$

$$L = [0.8903 \ 2.0425 \ 0.5530]^T,$$

$$A_a = \begin{bmatrix} -0.1730 & 0.0963 \\ -2.0562 & -0.3537 \end{bmatrix},$$

$$B_a = [-0.009 \ -0.131]^T,$$

$$C_a = [0.7386 \ -0.0453],$$

$$D_a = -2.6853, \ \gamma = 0.6639.$$

假设系统初始状态为 $x_1 = 0.4904, x_2 = -1.409$; 观测器的初始状态设置为 $\hat{x}_1 = 0.4904, \hat{x}_2 = -1.409, \hat{x}_3 = 0.0031$; 动态抗饱和和补偿器的初始状态选择为 $x_a = [0 \ 0]^T$, 得到仿真结果如图1~图3所示。

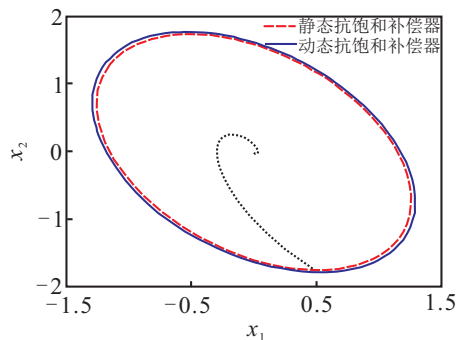


图1 系统收敛域

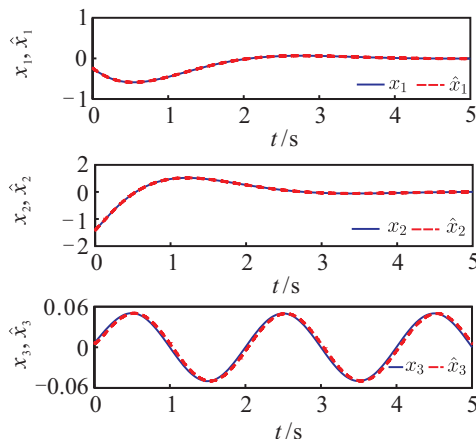


图2 系统状态及观测器估计值

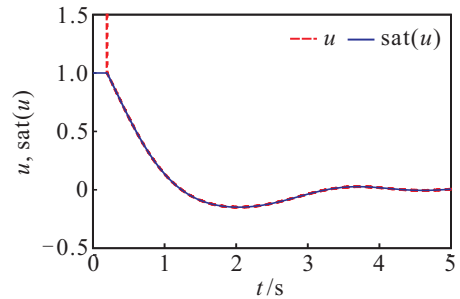


图3 系统控制量 u 和 $\text{sat}(u)$

由图1可知,相比文献[18]中的静态抗饱和和补偿器,本文所设计的动态抗饱和和补偿器能够使系统具有更大的收敛域.图2显示了所设计的扩张状态观测器能够有效地对系统的状态及未知非线性和外部扰动进行观测.同时,在图3中可以看到系统的控制量受到饱和的影响大大降低,从而验证了本文所提出动态抗饱和和补偿器的有效性.

4 结论

本文针对一类受到外界扰动的不确定非线性系统抗饱和和补偿器设计问题,提出了一种基于扩张状态观测器的动态抗饱和和补偿器设计方法,将控制器、观测器以及抗饱和和补偿器的参数求解问题转化为基于LMI不等式组约束的优化问题.仿真结果表明了本文所提出方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] Ran Maopeng, Wang Qing, Dong Chaoyang. Stabilization of a class of nonlinear systems with actuator saturation via active disturbance rejection control[J]. Automatica, 2016, 63: 302-310.
- [2] Liu Sheng, Zhou Liming. Static anti-windup synthesis for a class of linear systems subject to actuator amplitude and rate saturation[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(7): 1003-1006.
- [3] Cai Xiushan, Huang Jun, Liu Leipo, et al. Stability analysis of linear time-delay differential inclusion systems subject to input saturation[J]. IET Control Theory and Applications, 2010, 4(11): 2592-2602.
- [4] Forni F, Galeani S. Gain-scheduled, model-based anti-windup for LPV systems[J]. Automatica, 2010, 46(1): 222-225.
- [5] Li Yuanlong, Lin Zongli. A switching anti-windup design based on partitioning of the input space[J]. System & Control Letters, 2016, 88: 39-46.
- [6] Herrmann G, Menon P, Turner M, et al. Anti-windup synthesis for nonlinear dynamic inversion control schemes[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2010, 20(13): 1465-1482.
- [7] 彭秀艳, 贾书丽, 张彪. 一类具有执行器饱和的非线

- 性系统抗饱和方法研究[J]. 自动化学报, 2016, 42(5): 798-804.
(Peng X Y, Jia S L, Zhang B. An anti-saturation method for a class of nonlinear systems with actuator saturation[J]. Acta Automatica Sinica, 2016, 42(5): 798-804.)
- [8] Wang Huanqing, Chen Bing, Liu Xiaoping, et al. Robust adaptive fuzzy tracking control for pure-feedback stochastic nonlinear systems with input constraints[J]. IEEE Trans on Cybernetics, 2013, 43(6): 2093-2104.
- [9] Zhou Qi, Wang Lijie, Wu Chengwei, et al. Adaptive fuzzy control for nonstrict-feedback systems with input saturation and output constraint[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2017, 47(1): 1-12.
- [10] Chen Mou, Ge Shuzhi Sam, Ren Beibei. Adaptive tracking control of uncertain MIMO nonlinear systems with input constraints[J]. Automatica, 2011, 47(3): 452-465.
- [11] Zhai Dihua, Xia Yuanqing. Adaptive control for teleoperation system with varying time delays and input saturation constraints[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2016, 63(11): 6921-6929.
- [12] Xia Yuanqing, Zhu Zheng, Fu Mengyin. Back-stepping sliding mode control for missile systems based on an extended state observer[J]. IET Control Theory and Applications, 2011, 5(1): 93-102.
- [13] Han Jingqing. From PID to active disturbance rejection control[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2009, 56(3): 900-906.
- [14] Huang Yi, Xue Wenchao. Active disturbance rejection control: Methodology and theoretical analysis[J]. ISA Trans, 2014, 53(4): 963-976.
- [15] Gao Zhiqiang. Scaling and bandwidth-parameterization based controller tuning[C]. Proc of the American Control Conf. Denver, 2003, 6: 4989-4996.
- [16] 刘安东, 张荣超, 俞立, 等. 基于扩张状态观测器的分散模型预测控制[J]. 控制与决策, 2016, 31(6): 1093-1098.
(Liu A D, Zhang R C, Yu L, et al. Extended state observer-based decentralized model predictive control[J]. Control and Decision, 2016, 31(6): 1093-1098.)
- [17] 刘福才, 贾晓菁, 刘林, 等. 气动加载系统的建模及非线性自抗扰控制[J]. 控制与决策, 2017, 32(5): 906-912.
(Liu F C, Jia X J, Liu L, et al. Pneumatic loading system modeling and nonlinear active disturbance rejection control[J]. Control and Decision, 2017, 32(5): 906-912.)
- [18] Ran Maopeng, Wang Qing, Dong Chaoyang. Anti-windup design for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation and external disturbance[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2016, 26(15): 3421-3438.
- [19] Tarbouriech S, Prieur C, Silva J. Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(8): 1364-1371.
- [20] Freidovich L, Khalil H. Performance recovery of feedback-linearization-based designs[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(10): 2324-2334.
- [21] Chilali M, Gahinet P. Design with pole placement constraints: An LMI approach[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(3): 358-367.
- [22] Tarbouriech S, Garcia G, Silva J, et al. Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators[M]. London: Springer, 2011.

(责任编辑: 孙艺红)