第 33 卷 第 12 期　　控　制　与　决　策　　Vol.33 No.12
2018年 12月　　Control and Decision　　Dec. 2018

文章编号: 1001-0920(2018)12-2227-07　　DOI: 10.13195/j.kzyjc.2017.0948

灰色异构数据信息下的随机多准则决策方法

罗　党, 刘　敏†

(华北水利水电大学 数学与统计学院，郑州 450046)

摘　要: 针对准则值为灰色异构数据的随机多准则决策问题,提出一种基于核和灰度的灰色随机多准则决策方法. 首先给出扩展灰数的灰度和灰色异构数据集的定义;然后,遵循信息充分利用原则,结合灰色异构数据共有的特性,定义灰色异构数据的核向量和灰度向量,进而构造一致性系数几何平面模长排序法和相对折衷距离排序法. 实例分析表明了所提出方法的有效性和合理性.

关键词: 灰色异构数据；一致性系数；几何平面模长，相对折衷距离；多准则决策

中图分类号: N941.5　　**文献标志码:** A

Stochastic multiple criteria decision-making method with grey heterogeneous data information

LUO Dang, LIU Min†

(School of Mathematics and Statistics，North China University of Water Resource and Electric Power，Zhengzhou 450046，China)

Abstract: A grey stochastic multiple criteria decision-making method based on the kernel and degree of greyness of grey heterogeneous data is proposed for the stochastic multiple criteria decision problem with criterion value as grey heterogeneous data. The definitions of greyness of the extended grey number and grey heterogeneous data sets are given. Then, the kernel vector and greyness vector of grey heterogeneous data are defined according to the principle of information utilization and combining with the common characteristics of grey heterogeneous data. Furthermore, the consistency coefficient geometric plane die length sorting method and the relative compromise distance sorting method are constructed. An illustrative example illustrates the effectiveness and rationality of the proposed approach.

Keywords: grey heterogeneous data；consistency coefficient；geometry plane die length；relative compromise distance；multiple criteria decision making

0 引　言

作为现代决策科学的一个重要组成部分,多准则决策理论和方法已在诸多领域中得到了广泛应用. 在实际决策中,决策信息通常具有模糊、随机或灰色等不确定性. 目前,针对单一不确定性多准则决策问题的研究已有很多,二重或多重不确定性多准则决策问题的研究也取得了一些进展,如模糊随机多准则决策问题[1]、灰色模糊多准则决策问题[2] 和灰色随机多准则决策问题[3] 等.

灰色随机多准则决策问题同时具有灰色性和随机性两种特征,其研究成果还比较匮乏. 文献[4-6]对准则值为实数或三参数灰数的灰色随机多准则决策问题进行了深入研究;文献[7] 研究了准则值为区间灰数直觉模糊数、状态概率为灰数的多准则决策问题;文献[8-9] 针对准则权系数不完全确定、准则值为区间灰数的随机多准则决策问题,分别提出了基于期望可能度和前景理论的决策方法;文献[10]利用后悔理论与TOPSIS相结合的方法解决了准则值为扩展灰数、自然状态概率为区间数的多准则决策问题;文献[11-12]针对准则值为扩展灰数的不确定多准则决策问题,分别提出了基于Hausdroff距离、Hurwicz准则的灰色随机多准则决策方法. 上述方法均是在灰

收稿日期: 2017-07-15；**修回日期:** 2017-09-13.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71271086)；河南省高等学校重点科研项目(18A630030)；河南省科技攻关计划项目(182102310014)；河南省研究生教育优质课程项目.

责任编委: 李登峰.

作者简介: 罗党(1958−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论与决策分析等研究；刘敏(1991−), 女, 硕士生, 从事灰色系统理论与决策分析的研究.

†通讯作者. E-mail: liumin2015sx@163.com.

色同构数据信息下进行的,而对于决策信息为灰色异构数据信息(两种或多种不同类型灰数构成的数据信息)的随机多准则决策问题尚未出现,是一个值得关注的研究课题.

在决策过程中,如何对备选方案进行排序是决策问题的关键. 近年来,许多学者对其进行了研究,提出了可能度排序法[13]、优劣级排序法[4]、相对核排序法[14]、优劣解距离法[10]和多准则妥协解排序法[15]等. 为了使决策结果更加科学合理,一般采用备选方案与正负理想方案之间的差异性进行决策,而优劣解距离法和多准则妥协解排序法是两种典型的多准则折衷方法. 但是,由优劣解距离法得到的最好方案并不总是接近理想方案,由多准则妥协解排序法得到的往往是带有优先级的折衷方案,且只能用于选择最优方案,而不能用于方案排序.

由于实际生活的复杂性和人类认知水平的有限性,人们往往会遇到获取的灰数信息以区间灰数和扩展灰数两种形式表述的情况. 为此,本文针对准则值为由区间灰数和扩展灰数构成的灰色异构数据信息的随机多准则决策问题,给出扩展灰数的灰度和灰色异构数据集的定义;在认真研究灰色系统理论知识的基础上,根据灰色异构数据共同的信息特征,定义了灰色异构数据信息的核向量和灰度向量. 为有效综合决策信息和进行备选方案优劣排序,分别构建核、灰度的一致性系数几何平面模长的非线性优化模型和综合折衷距离最小化的优化模型,提出一种灰色异构数据信息下的随机多准则决策方法. 最后,通过实例分析验证了所提出方法的有效性和合理性.

1 基础知识

定义1[16] 只知道取值范围而不知道确切值的数称为灰数. 其中既有下界$\underline{a}$,又有上界$\bar{a}$的灰数称为区间灰数,记为$\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}](\underline{a} \leqslant \bar{a})$. $\mu(\otimes) = \bar{a} - \underline{a}$为灰数$\otimes$取值的测度,$\Omega'$为信息论域,$\mu(\Omega')$为信息论域测度,称$g^\circ = \dfrac{\mu(\otimes)}{\mu(\Omega')}$为灰数$\otimes$的灰度;在缺乏灰数$\otimes$取值分布信息的情况下,称$\hat{\otimes} = \dfrac{\bar{a} + \underline{a}}{2}$为灰数$\otimes$的核.

定义2[17] 设$\otimes^{\pm} = \bigcup\limits_{i=1}^{l} [\underline{c}_i, \bar{c}_i]([\underline{c}_i, \bar{c}_i] \bigcap [\underline{c}_j, \bar{c}_j] = \oslash(i \neq j), \underline{c}_i \leqslant \bar{c}_i, i, j = 1, 2, \cdots, l)$,则称$\otimes^{\pm}$为扩展灰数. 其中任一区间灰数$\otimes_i \in [\bar{c}_i, \underline{c}_i] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{l} [\underline{c}_i, \bar{c}_i]$,满足$\bar{c}_{i-1} \leqslant \underline{c}_i \leqslant \bar{c}_{i-1} \leqslant \underline{c}_{i+1}$,$\otimes^- = \inf\limits_{\underline{c}_i \in \otimes^{\pm}} \underline{c}_i$,$\otimes^+ = \sup\limits_{\bar{c}_i \in \otimes^{\pm}} \bar{c}_i$分别称为$\otimes^{\pm}$的下界和上界.

定义3 设扩展灰数$\otimes^{\pm} = \bigcup\limits_{i=1}^{l} [\underline{c}_i, \bar{c}_i]$的论域为$\Omega$,$\mu(\otimes_i)$和$\mu(\Omega)$分别为区间灰数$\otimes_i \in [\underline{c}_i, \bar{c}_i](i = 1, 2, \cdots, l)$和扩展灰数在$\Omega$上的测度,则:

1) 当$\otimes^{\pm}$的概率分布未知时,称$\hat{\otimes}^{\pm} = \sum\limits_{i=1}^{l} \dfrac{\hat{\otimes}_i}{l}$为扩展灰数的核,其中$\hat{\otimes}_i$为区间灰数$\otimes_i \in [\underline{c}_i, \bar{c}_i]$的核,称$g^{\circ\pm} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{l} \mu(\otimes_i)}{\mu(\Omega)}$为扩展灰数的灰度.

2) 当$\otimes^{\pm}$的概率分布已知时,称$\hat{\otimes}^{\pm} = \sum\limits_{i=1}^{l} w_i \hat{\otimes}_i$为扩展灰数$\otimes^{\pm}$的核,称$g^{\circ\pm} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{l} w_i \mu(\otimes_i)}{\mu(\Omega)}$为扩展灰数$\otimes^{\pm}$的灰度. 其中:$\hat{\otimes}_i$为区间灰数$\otimes_i \in [\underline{c}_i, \bar{c}_i]$的核,$w_i$为区间灰数$\otimes_i \in [\underline{c}_i, \bar{c}_i]$的已知信息权重.

显然,当$w_i = \dfrac{\hat{\otimes}_i}{\hat{\otimes}^{\pm}}$时,核

$$\hat{\otimes}^{\pm} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{l} (\hat{\otimes}_i)^2}{\hat{\otimes}^{\pm}},$$

灰度

$$g^{\circ\pm} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{l} \hat{\otimes}_i \mu(\otimes_i)}{\hat{\otimes}^{\pm} \mu(\Omega)};$$

当$w_i = 1 - \dfrac{\mu(\otimes_i)}{\mu(\Omega)}$时,核

$$\hat{\otimes}^{\pm} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{l} \hat{\otimes}_i (\mu(\Omega) - \mu(\otimes_i))}{\mu(\Omega)},$$

灰度

$$g^{\circ\pm} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{l} \mu(\otimes_i)(\mu(\Omega) - \mu(\otimes_i))}{\mu^2(\Omega)}.$$

因此,扩展灰数的核与灰度可根据分段区间灰数的已知信息程度来确定.

定义4 称由区间灰数和扩展灰数组成的集合为灰色异构数据集,称由区间灰数和扩展灰数构成的向量为灰色异构数据向量.

定义5 设灰色异构数据集中灰色异构数据的核为$\hat{\hat{\otimes}}$,灰度为$\bar{g}^\circ$,则称$\hat{\hat{\otimes}}_{\bar{g}^\circ}$为灰色异构数据的简化形式.

定理1 由灰色异构数据的核、灰度构成的简化形式所包含的信息量与灰色异构数据包含的信息量相等.

证明 当灰色异构数据的核和灰度已知,即区间灰数的核$\hat{\otimes} = \dfrac{\underline{a} + \bar{a}}{2}$,$g^\circ = \dfrac{\bar{a} + \underline{a}}{\mu(\Omega)}$已知时,联立两式

得到

$$\underline{a}=\frac{2\hat{\hat{\otimes}}-g^{\circ}\mu(\Omega)}{2},\ \bar{a}=\frac{2\hat{\hat{\otimes}}+g^{\circ}\mu(\Omega)}{2},$$

也即扩展灰数的$\hat{\hat{\otimes}}$和$\bar{g}^{\circ}$已知. 可以据其确定每个灰数$\otimes_i$的位置, 同时根据测度$\mu(\otimes_i)$计算出每个灰数的上下界, 因此可得$\otimes^{\pm}=\bigcup\limits_{i=1}^{l}[\underline{c}_i,\bar{c}_i]$. 反之, 由定义1～定义3可得证. 综上所述, 由灰色异构数据的核、灰度构成的简化形式所包含的信息量与灰色异构数据包含的信息量相等. □

2　决策方法

2.1　问题描述

考虑某一灰色随机多准则决策问题, 其方案集为$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$, 准则集为$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_p,b_{p+1},b_{p+2},\cdots,b_m\}$且彼此独立. $\omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m\}$为准则权系数, 且$\sum\limits_{j=1}^{m}=1,\omega_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,m$. 由于环境的复杂性和不确定性, 存在$s$种可能的自然状态, 记第$t$个状态下的概率为$p_t$, 状态集合记为$\theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_s\}$. 方案$A_i$在准则$b_j(j=1,2,\cdots,p)$下的值为区间灰数的灰色随机变量$a_{ijt}$, 且在第$t$个状态下的准则值为区间灰数$a_{ijt}(\otimes)\in[\underline{a}_{ijt},\bar{a}_{ijt}]$; 方案$A_i$在准则$b_j(j=p+1,p+2,\cdots,m)$下的值为扩展灰色随机变量$c_{ijt}$, 且在第$t$个状态下的准则值为扩展灰数$c_{ijt}(\otimes^{\pm})=\bigcup\limits_{k=1}^{l}[\underline{c}_{ijt}^{k},\bar{c}_{ijt}^{k}]([\underline{c}_{ijt}^{k},\bar{c}_{ijt}^{k}]\bigcap[\underline{c}_{ijt}^{k'},\bar{c}_{ijt}^{k'}]=\varnothing,\ k\neq k',\ \underline{c}_{ijt}^{k}\leqslant\bar{c}_{ijt}^{k},\ k=1,2,\cdots,l)$, 从而可以得到异构数据信息下的综合决策矩阵$R=(a(\otimes)\quad c(\otimes^{\pm}))$, $a(\otimes)=(a_{ijt}(\otimes))_{n\times p\times s}$, $c(\otimes^{\pm})=(c_{ijt}(\otimes^{\pm}))_{n\times(m-p)\times s}$.

常用的评价指标的准则有两种: 一种是效益型准则, 其值越大越好; 一种是成本型准则, 其值越小越好. 为了消除量纲影响, 使各准则具有可比性, 对综合决策矩阵进行规范化处理, 得到决策矩阵$U=(u(\otimes)\quad v(\otimes^{\pm}))$, $u(\otimes)=(u_{ijt}(\otimes))_{n\times p\times s}$, $v(\otimes^{\pm})=(v_{ijt}(\otimes^{\pm}))_{n\times(m-p)\times s}$.

针对区间灰数, 设$\Omega_j'=[\varphi_{1j},\varphi_{2j}]$为准则$b_j$的论域, $j=1,2,\cdots,p$, 则:

效益型

$$\underline{u}_{ijt}=\frac{\underline{u}_{ijt}-\varphi_{1j}}{\varphi_{2j}-\varphi_{1j}},\ \bar{u}_{ijt}=\frac{\bar{u}_{ijt}-\varphi_{1j}}{\varphi_{2j}-\varphi_{1j}};\tag{1}$$

成本型

$$\underline{u}_{ijt}=\frac{\varphi_{2j}-\bar{u}_{ijt}}{\varphi_{2j}-\varphi_{1j}},\ \bar{u}_{ijt}=\frac{\varphi_{2j}-\underline{u}_{ijt}}{\varphi_{2j}-\varphi_{1j}}.\tag{2}$$

针对扩展灰数, 设$\Omega_j=[\phi_{1j},\phi_{2j}]$为准则$b_j$的论域, $j=p+1,p+2,\cdots,m$, 则:

效益型

$$\underline{v}_{ijt}^{k}=\frac{\underline{c}_{ijt}^{k}-\phi_{1j}}{\phi_{2j}-\phi_{1j}},\ \bar{v}_{ijt}^{k}=\frac{\bar{c}_{ijt}^{k}-\phi_{1j}}{\phi_{2j}-\phi_{1j}};\tag{3}$$

成本型

$$\underline{v}_{ijt}^{k}=\frac{\underline{c}_{ijt}^{k}-\phi_{1j}}{\phi_{2j}-\phi_{1j}},\ \bar{v}_{ijt}^{k}=\frac{\bar{c}_{ijt}^{k}-\phi_{1j}}{\phi_{2j}-\phi_{1j}}.\tag{4}$$

灰色异构数据虽然具有不同的数据类型和灰信息特征, 但均同属“灰数”范畴, 都具有“核”和“灰度”这一基本的共同属性, 因此, 为了有效融合灰色异构数据信息和充分利用决策信息, 结合定理1, 将灰色异构数据向量进行如下定义.

定义6　设向量

$$\{u_{i1t}(\otimes),\cdots,u_{ipt}(\otimes),v_{i(p+1)t}(\otimes^{\pm}),\cdots,v_{imt}(\otimes^{\pm})\}.$$

其中: $u_{ijt}(\otimes)(j=1,2,\cdots,p)$为区间灰数, $v_{ijt}(\otimes^{\pm})(j=p+1,p+2,\cdots,m)$为扩展灰数. 则称由区间灰数及扩展灰数的核构成的向量为核向量, 由灰度构成的向量为灰度向量, 并记为

$$\hat{\hat{\otimes}}_{it}=\{\hat{\otimes}_{i1t},\cdots,\hat{\otimes}_{ipt},\hat{\hat{\otimes}}_{i(p+1)t}^{\pm},\cdots,\hat{\hat{\otimes}}_{imt}^{\pm}\},\tag{5}$$

$$\bar{g}_{it}^{\circ}=\{g_{i1t}^{\circ},\cdots,g_{ipt}^{\circ},g_{i(p+1)t}^{\circ\pm},\cdots,g_{imt}^{\circ\pm}\}.\tag{6}$$

根据式(5)和(6), 结合已知自然状态概率, 得到无风险的灰色异构数据核向量

$$\hat{\hat{\otimes}}_{i}=\{\hat{\otimes}_{i1},\cdots,\hat{\otimes}_{ip},\hat{\hat{\otimes}}_{i(p+1)}^{\pm},\cdots,\hat{\hat{\otimes}}_{im}^{\pm}\},$$

灰度向量

$$\bar{g}_{i}^{\circ}=\{g_{i1}^{\circ},\cdots,g_{ip}^{\circ},g_{i(p+1)}^{\circ\pm},g_{im}^{\circ\pm}\}.$$

定义7　称

$$\hat{\hat{\otimes}}^{+}=\{\hat{\hat{\otimes}}_1^{+},\hat{\hat{\otimes}}_2^{+},\cdots,\hat{\hat{\otimes}}_m^{+}\},$$

$$\bar{g}^{\circ-}=\{\bar{g}_1^{\circ+},\bar{g}_2^{\circ+},\cdots,\bar{g}_m^{\circ+}\}$$

为核正理想向量和灰度正理想向量;

$$\hat{\hat{\otimes}}^{-}=\{\hat{\hat{\otimes}}_1^{-},\hat{\hat{\otimes}}_2^{-},\cdots,\hat{\hat{\otimes}}_m^{-}\},$$

$$\bar{g}^{\circ-}=\{\bar{g}_1^{\circ-},\bar{g}_2^{\circ-},\cdots,\bar{g}_m^{\circ-}\}$$

为核负理想向量和灰度负理想向量. 其中

$$\hat{\hat{\otimes}}_j^{+}=\begin{cases}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\hat{\otimes}_{ij},\ j=1,2,\cdots,p;\\ \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\hat{\hat{\otimes}}_{ij}^{\pm},\ j=p+1,p+2,\cdots,m.\end{cases}$$

$$\hat{\hat{\otimes}}_j^{-}=\begin{cases}\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\hat{\otimes}_{ij},\ j=1,2,\cdots,p;\\ \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\hat{\hat{\otimes}}_{ij}^{\pm},\ j=p+1,p+2,\cdots,m.\end{cases}$$

$$\bar{g}_j^{\circ+}=\begin{cases}\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}g_{ij}^{\circ},\ j=1,2,\cdots,p;\\ \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}g_{ij}^{\circ\pm},\ j=p+1,p+2,\cdots,m.\end{cases}$$

$$\bar{g}_j^{\circ-}=\begin{cases}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}g_{ij}^{\circ},\ j=1,2,\cdots,p;\\ \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}g_{ij}^{\circ\pm},j=p+1,p+2,\cdots,m.\end{cases}$$

定义8 称

$$d_i^+(\hat{\hat{\otimes}})=\sqrt{\sum_{j=1}^{p}(\hat{\otimes}_{ij}-\hat{\hat{\otimes}}_j^+)^2\omega_j+\sum_{j=p+1}^{m}(\hat{\otimes}_{ij}^{\pm}-\hat{\hat{\otimes}}_j^+)^2\omega_j},$$

$$d_i^-(\hat{\hat{\otimes}})=\sqrt{\sum_{j=1}^{p}(\hat{\otimes}_{ij}-\hat{\hat{\otimes}}_j^-)^2\omega_j+\sum_{j=p+1}^{m}(\hat{\otimes}_{ij}^{\pm}-\hat{\hat{\otimes}}_j^-)^2\omega_j}\quad(7)$$

分别为备选方案A_i的核向量与核正、负理想向量的加权距离. 同理,可得备选方案A_i的灰度向量与灰度正、负理想向量的加权距离分别为

$$d_i^+(\bar{g}^\circ)=\sqrt{\sum_{j=1}^{p}(g_{ij}^\circ-\bar{g}_j^{\circ+})^2\omega_j+\sum_{j=p+1}^{m}(g_{ij}^{\circ\pm}-\bar{g}_j^{\circ+})^2\omega_j},$$

$$d_i^-(\bar{g}^\circ)=\sqrt{\sum_{j=1}^{p}(g_{ij}^\circ-\bar{g}_j^{\circ-})^2\omega_j+\sum_{j=p+1}^{m}(g_{ij}^{\circ\pm}-\bar{g}_j^{\circ-})^2\omega_j}.\quad(8)$$

在定义8中,$d_i^+(\hat{\hat{\otimes}})$、$d_i^-(\hat{\hat{\otimes}})$分别为备选方案$A_i$的核向量与核正、负理想向量的加权距离,$d_i^+(\bar{g}^\circ)$、$d_i^-(\bar{g}^\circ)$分别为备选方案$A_i$的灰度向量与灰度正、负理想向量的加权距离. 在决策评价备选方案时,最优方案一般要求同时接近正理想方案,而远离负理想方案,但是这种情况通常很难实现. 因此,为了有效综合决策信息和进行决策优劣方案排序,综合考虑正、负加权距离,采用几何平面模长法和相对折衷距离法对备选方案进行排序.

2.2 几何平面模长排序法

定义9 设$d_i^+(\hat{\hat{\otimes}})$为备选方案$A_i$的核向量与核正理想向量的距离,$d_i^-(\hat{\hat{\otimes}})$为备选方案$A_i$的核向量与核负理想向量的距离,令$f(\gamma_i(\hat{\hat{\otimes}}))=[(1-\gamma_i)d_i^-(\hat{\hat{\otimes}})]^2+[\gamma_i d_i^+(\hat{\hat{\otimes}})]^2$,则称

$$\gamma_i(\hat{\hat{\otimes}})=\frac{[d_i^-(\hat{\hat{\otimes}})]^2}{[d_i^+(\hat{\hat{\otimes}})]^2+[d_i^-(\hat{\hat{\otimes}})]^2}\quad(9)$$

为核一致性系数,且一致性系数越大,表明备选方案A_i的核向量与核正理想向量之间的距离越小. 同理可知,灰度一致性系数为

$$\gamma_i(\bar{g}^\circ)=\frac{[d_i^-(\bar{g}^\circ)]^2}{[d_i^+(\bar{g}^\circ)]^2+[d_i^-(\bar{g}^\circ)]^2}.\quad(10)$$

在式(9)中,$d_i^+(\hat{\hat{\otimes}})$越小,备选方案$A_i$的核向量越接近核正理想向量;$d_i^-(\hat{\hat{\otimes}})$越大,备选方案$A_i$的核向量越远离核负理想向量. 在式(10)中,$d_i^+(\bar{g}^\circ)$越小,备选方案$A_i$的核向量越接近核正理想向量;$d_i^-(\bar{g}^\circ)$越大,备选方案$A_i$的灰度向量越远离灰度负理想向量. 因此,为了有效综合决策信息和区分优劣方案,将$(\gamma_i(\hat{\hat{\otimes}}),\gamma_i(\bar{g}^\circ))$视为几何平面中的点,$(\gamma_i(\hat{\hat{\otimes}}),\gamma_i(\bar{g}^\circ))$的模长越大时,表明$\gamma_i(\hat{\hat{\otimes}})$、$\gamma_i(\bar{g}^\circ)$两者综合一致性系数越大,因此有如下定义.

定义10 令$\gamma_i(\hat{\hat{\otimes}})$、$\gamma_i(\bar{g}^\circ)$分别为备选方案的核一致性系数、灰度一致性系数,则

$$L_i=\sqrt{\gamma_i^2(\hat{\hat{\otimes}})+\gamma_i^2(\bar{g}^\circ)}\quad(11)$$

称为备选方案A_i的空间几何平面模长.

由于各备选方案是公平竞争的,可利用多目标规划方法构建优化模型. 对于每个备选方案而言,其几何平面模长越大越好. 因此,构建几何平面模长最大化的非线性优化模型为

$$M_1:\begin{cases}\max\ L=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\gamma_i^2(\hat{\hat{\otimes}})+\gamma_i^2(\bar{g}^\circ)};\\ \text{s.t. } 0\leqslant\underline{\omega}_j\leqslant\omega_j\leqslant\bar{\omega}_j\leqslant 1,\\ \qquad\sum_{j=1}^{m}\omega_j=1.\end{cases}\quad(12)$$

求解模型M_1,得到准则权系数$\omega^*=\{\omega_1^*,\omega_2^*,\cdots,\omega_m^*\}$,从而计算得到各备选方案的几何平面模长. 几何平面模长越大,表明灰数的核越大,灰度越小,备选方案越优.

2.3 相对折衷距离排序法

令r为大多数准则策略的决策机制系数,$r>0.5$表明根据大多数人的意见决策,$r=0.5$表明根据赞同情况决策,$r<0.5$表明根据拒绝情况进行决策. 于是有如下定义.

定义11 设$d_i^+(\hat{\hat{\otimes}})$、$d_i^-(\hat{\hat{\otimes}})$为备选方案$A_i$的核向量与核正、负理想向量的加权距离,$d_i^+(\bar{g}^\circ)$、$d_i^-(\bar{g}^\circ)$为备选方案$A_i$的灰度向量与灰度正、负理想向量的加权距离,称

$$Q_i(\hat{\hat{\otimes}})=r\times\frac{d_i^+(\hat{\hat{\otimes}})-\min_i d_i^+(\hat{\hat{\otimes}}}{\max_i d_i^+(\hat{\hat{\otimes}})-\min_i d_i^+(\hat{\hat{\otimes}})}+(1-r)\times\frac{d_i^-(\hat{\hat{\otimes}})-\min_i d_i^-(\hat{\hat{\otimes}})}{\max_i d_i^-(\hat{\hat{\otimes}})-\min_i d_i^-(\hat{\hat{\otimes}})}\quad(13)$$

为备选方案A_i的核向量与核理想向量的折衷距离;称

$$Q_i(\bar{g}^\circ)=r\times\frac{d_i^+(\bar{g}^\circ)-\min_i d_i^+(\bar{g}^\circ)}{\max_i d_i^+(\bar{g}^\circ)-\min_i d_i^+(\bar{g}^\circ)}+(1-r)\times\frac{d_i^-(\bar{g}^\circ)-\min_i d_i^-(\bar{g}^\circ)}{\max_i d_i^-(\bar{g}^\circ)-\min_i d_i^-(\bar{g}^\circ)}\quad(14)$$

为备选方案A_i的灰度向量与灰度理想向量的折衷距离.

灰数是由灰数的核和灰度两个因素决定的,当折衷距离越小时,该方案较接近正理想方案,灰数的核越大,灰度越小. 因而,针对式(13)和(14),构建核、灰数综合折衷距离最小化的优化模型如下:

$$M_2:\begin{cases}\min\ D=\sum\limits_{i=1}^{n}Q_i(\hat{\hat{\otimes}});\\ \text{s.t. }\ 0\leqslant\underline{\omega}_j\leqslant\omega_j\leqslant\bar{\omega}_j\leqslant1,\\ \qquad\sum\limits_{j=1}^{m}\omega_j=1.\end{cases}\tag{15}$$

$$M_3:\begin{cases}\min\ D=\sum\limits_{i=1}^{n}Q_i(\bar{g}^{\circ});\\ \text{s.t. }\ 0\leqslant\underline{\omega}_j\leqslant\omega_j\leqslant\bar{\omega}_j\leqslant1,\\ \qquad\sum\limits_{j=1}^{m}\omega_j=1.\end{cases}\tag{16}$$

求解模型M_2和M_3,得到准则权系数

$$\omega^*(\hat{\hat{\otimes}})=\{\omega_1^*(\hat{\hat{\otimes}}),\omega_2^*(\hat{\hat{\otimes}}),\cdots,\omega_m^*(\hat{\hat{\otimes}})\},$$

$$\omega^*(\bar{g}^{\circ})=\{\omega_1^*(\bar{g}^{\circ}),\omega_2^*(\bar{g}^{\circ}),\cdots,\omega_m^*(\bar{g}^{\circ})\}.$$

因此,可以分别计算得到各备选方案核、灰度的折衷距离$Q_i(\hat{\hat{\otimes}})$和$Q_i(\bar{g}^{\circ})$.

定义12 设$Q_i(\hat{\hat{\otimes}})$、$Q_i(\bar{g}^{\circ})$分别为备选方案A_i的核向量与核理想向量、灰度向量与灰度理想向量的折衷距离,则称

$$\delta_i=\frac{Q_i(\hat{\hat{\otimes}})}{1+Q_i(\bar{g}^{\circ})}\tag{17}$$

为备选方案A_i的相对折衷距离.

2.4 决策步骤

灰色异构数据信息下的随机多准则决策方法的步骤如下:

Step 1: 根据实际的决策信息选取准则论域,并由式(1)～(4)对初始综合决策矩阵进行规范化处理;

Step 2: 由式(5)和(6)构建核向量、灰度向量;

Step 3: 计算无风险下的综合决策矩阵,并由定义7确定核及灰度的正、负理想向量;

Step 4: 由式(7)～(12)构造核和灰度的一致性系数空间几何平面模长排序法,以及由式(13)～(17)构造方案相对折衷距离排序法.

3 实例分析

河南地处我国中东部的中纬度地区,存在着自南向北由亚热带向暖温带气候过渡、自西向东由平原向丘陵地理过渡的两个过渡性特征,造成干旱险情发生频繁. 干旱严重时会导致旱灾发生,而旱灾直接影响到区域工农业生产及人民生活,造成农作物受灾、减产或绝收,甚至直接影响区域社会与经济的发展,所以防旱工作已成为河南省抗旱减灾工作的头等大事. 为提前做好抗旱减灾能力的防御工作,分析河南区域干旱风险,现从河南省气象局、河南省水资源公报以及河南省统计年鉴获取2009～2016年信阳、新乡和开封(分别用A_1, A_2, A_3表示)3个地区夏季的降水量、气温、地下水资源量和土壤相对含水量4个分析指标的相关数据, 见表1. 由于气象变化和人为因素的影响,各备选方案的准则值存在着3种可能的自然状态: 低、中、高(分别用s_1、s_2、s_3表示),经统计分析知其概率$p_1=0.4$, $p_2=0.37$, $p_3=0.23$. 因环境的复杂性和信息获取的局限性,决策者主观给出不完全确定信息形式的准则系数空间为: $H=\{0.1\leqslant\omega_1\leqslant0.2,\ 0.2\leqslant\omega_2\leqslant0.26,\ 0.2\leqslant\omega_3\leqslant0.35,\ 0.3\leqslant\omega_4\leqslant0.44,\ \omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4=1\}$. 由于准则间的差异性,评价信息中降水量和气温以区间灰数的形式给出,而地下水资源量和相对含水量则以扩展灰数的形式给出.

表1 不同状态下3个地区的相关数据

状态	地区	降水量/mm	气温/°C	地下水资源量/(亿m^3)	相对含水量/%
s_1	A_1	[163, 186]	[29, 38]	[5.50, 6.00]$\bigcup$[6.30, 6.87]	[36, 42]$\bigcup$[45, 48]
	A_2	[168, 180]	[26, 37]	[9.60, 9.80]$\bigcup$[10.00, 10.15]	[30, 34]$\bigcup$[36, 52]
	A_3	[201, 210]	[23, 36]	[14.40, 14.80]$\bigcup$[15.00, 15.40]	[48, 53]$\bigcup$[55, 58]
s_2	A_1	[117, 143]	[28, 38]	[5.97, 6.34]$\bigcup$[7.50, 9.00]	[37, 45]$\bigcup$[47, 49]
	A_2	[130, 145]	[27, 34]	[10.30, 11.89]$\bigcup$[12.00, 12.56]	[31, 33]$\bigcup$[35, 38]
	A_3	[198, 205]	[28, 36]	[13.53, 14.78]$\bigcup$[14.81, 15.67]	[50, 52]$\bigcup$[53, 57]
s_3	A_1	[145, 166]	[25, 38]	[5.08, 6.00]$\bigcup$[6.12, 6.34]	[30, 37]$\bigcup$[39, 43]
	A_2	[143, 154]	[24, 37]	[9.56, 9.60]$\bigcup$[9.70, 10.06]	[20, 29]$\bigcup$[31, 40]
	A_3	[250, 170]	[23, 35]	[14.62, 18.00]$\bigcup$[23.00, 26.00]	[42, 53]$\bigcup$[56,60]

首先,根据2009～2016年夏季实际的极端降水量、温度、地下水资源量和相对含水量,分别取其论域为[0,300]、[15,40]、[2,35]和[0,100],则由式(1)～(4)得到规范化综合异构信息决策矩阵$U(\otimes)$,并由式(5)和(6)构建备选方案的(扩展灰数的两分段的已知信息程度相同)核向量$\hat{\hat{\otimes}}_{it}(i=1,2,3;\ t=1,2,3)$,灰度向量$\bar{g}^{\circ}_{it}(i=1,2,3;\ t=1,2,3)$.

根据已知自然状态概率得到无风险的决策核矩阵、灰度矩阵分别为

$$U_{3\times4}(\hat{\hat{\otimes}})=\begin{bmatrix}0.5122 & 0.2858 & 0.1326 & 0.4213\\ 0.5154 & 0.3640 & 0.2581 & 0.3477\\ 0.6451 & 0.3876 & 0.4270 & 0.5314\end{bmatrix},$$

$$U_{3\times4}(\bar{g}^{\circ})=\begin{bmatrix}0.0788 & 0.4116 & 0.0419 & 0.0983\\ 0.0429 & 0.3392 & 0.0311 & 0.1399\\ 0.0360 & 0.4368 & 0.0778 & 0.0887\end{bmatrix}.$$

由定义8确定正、负理想方案核向量分别为

$$\hat{\hat{\otimes}}^{+}=\{0.6451,0.3876,0.4270,0.5314\},$$

$$\hat{\hat{\otimes}}^{-}=\{0.5122,0.2858,0.1359,0.3577\};$$

灰度向量

$$\bar{g}^{\circ+}=\{0.0360,0.3992,0.0311,0.0887\},$$

$$\bar{g}^{\circ-}=\{0.0788,0.4368,0.0778,0.1399\}.$$

采用几何平面模长排序法: 由式(7)～(12)构建关于备选方案核、灰度的一致性系数空间几何模长平面非线性优化模型,通过Lingo13.0软件求得准则权系数为$\omega^{*}=\{0.20,0.26,0.24,0.3\}$,从而得到备选方案的空间几何模长$L_1=0.5091$, $L_2=0.7063$, $L_3=1.0462$. 由于L_i的值越大,备选方案越优,可得方案的优劣顺序为$A_3\succ A_2\succ A_1$,即A_3地区发生夏季干旱的可能性最小.

采用折衷距离排序法: 由式(13)～(16)构建核、灰度的综合折衷距离最小化的优化模型(取$r=0.6$),利用软件求解得到准则权系数为

$$\omega^{*}(\hat{\hat{\otimes}})=\{0.20,0.26,0.2,0.34\},$$

$$\omega^{*}(\bar{g}^{\circ})=\{0.18,0.24,0.2,0.38\};$$

由此可以得到核、灰度的折衷距离为

$$Q_1(\hat{\hat{\otimes}})=0.1163,\ Q_2(\hat{\hat{\otimes}})=0.1134,$$

$$Q_3(\hat{\hat{\otimes}})=0.0745;$$

$$Q_1(\bar{g}^{\circ})=0.0205,\ Q_1(\bar{g}^{\circ})=0.0353,$$

$$Q_1(\bar{g}^{\circ})=0.0244;$$

由式(17)得到备选方案与理想方案的相对距离为$\delta_1=0.1140$, $\delta_2=0.1095$, $\delta_3=0.0727$. 由于δ_i的值越小,备选方案越优,可得备选方案的优劣顺序为$A_3\succ A_2\succ A_1$,即A_3地区发生夏季干旱的可能性最小.

综上所述,采用几何平面模长排序法和折衷距离排序法,得到的排序结果一致,从而表明了本文所提出方法的有效性. 为进一步说明本文方法的合理性,采用文献[14]中排序方法进行备选方案排序. 通过求解规划模型得到综合准则权系数为$\omega=\{0.2,0.26,0.24,0.3\}$,从而得到相对核为

$$\delta(\hat{\otimes}_1)=0.2889,\ \delta(\hat{\otimes}_2)=0.3133,\ \delta(\hat{\otimes}_3)=0.4340.$$

由于δ_i的值越大,备选方案越优,可得备选方案的优劣顺序为$A_3\succ A_2\succ A_1$,即A_3地区发生夏季干旱的可能性最小. 在实际情况中,A_3地区境内河流众多,致使地下水资源量充足,在农作物需要水分时能及时得到供给,而A_1地区在2009～2016年期间夏季气温偏高,水分蒸发较快,不利于农作物在缺水时急需供给,即A_1地区相对而言发生夏季干旱的可能性较大一些. 当干旱严重时可形成旱灾,直接影响到区域工农业生产及人民生活,甚至影响到区域社会与经济的发展. 因此,为了区域人民的生活及社会的发展,必须提前做好防旱工作.

4 结 论

本文对决策信息为灰色异构数据信息的随机多准则决策问题进行了深入研究. 在灰色异构数据集及其核向量与灰度向量概念的基础上,分别构建了一致性系数空间几何平面模长最大化和综合折衷距离最小化的非线性优化模型. 实例分析验证了该方法的有效性和合理性. 该方法简洁合理,不仅考虑了不同灰数表征类型的信息特征,使得决策结果更为科学合理,而且丰富了灰色系统决策理论,为灰色异构数据信息下的随机多准则决策问题提供了一种新思路. 另外,本文模型可扩展到灰色异构数据信息为不同类型的灰数中的两种或多种共存时的情形,但当涉及到三参数区间灰数时,重心问题需要着重考虑. 本文只考虑了同准则下同类型的异构数据情形,而未考虑同准则下不同类型共存的复杂决策问题,这有待于进一步研究.

参考文献(References)

[1] 陈振颂, 李延来. 基于前景M-V准则的正态三角模糊随机多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2014, 29(7): 1239-1249.
(Chen Z S, Li Y L. Approach for normal triangular fuzzy stochastic multiple attribute decision making based on prospect mean-variance rule[J]. Control and Decision,

2014, 29(7): 1239-1249.)

[2] Liao M S, Liang G S, Chen C Y. Fuzzy grey relation method for multiple criteria decision-making problems[J]. Quality & Quantity, 2013, 47(6): 3065-3077.

[3] 王丹丹. 基于灰数的随机决策方法及应用研究[D]. 长沙: 中南大学商学院, 2013: 14-15.
(Wang D D. Grey number-based stochastic decision-making method with its application[D]. Changsha: School of Business, Central South University, 2013: 14-15.)

[4] 王坚强, 任世昶, 陈晓红. 灰色随机多准则决策的优劣势排序法[J]. 控制与决策, 2009, 24(5): 701-705.
(Wang J Q, Ren S C, Chen X H. Superiority and inferiority ranking method for grey stochastic multi-criteria decision-making[J]. Control and Decision, 2009, 24(5): 701-705.)

[5] 童玉娟, 王志国. 概率为区间灰数的多目标风险型决策方法[J]. 中国西部科技, 2008, 7(5): 37-38.
(Tong Y J, Wang Z G. A risk-based multi-objection decision-making method when the probability is interval grey number[J]. Science and Technology of West China, 2008, 7(5): 37-38.)

[6] 李存斌, 赵坤, 祁之强. 三参数区间灰数信息下风险型多准则决策方法[J]. 自动化学报, 2015, 41(7): 1306-1314.
(Li C B, Zhao K, Qi Z Q. A risky multi-criteria decision-making method with three-parameter interval grey number[J]. Acta Automatica Sinica, 2015, 41(7): 1306-1314.)

[7] 李存斌, 张建业, 谷云东, 等. 一种基于前景理论和改进TOPSIS的模糊随机多准则决策方法及其应用[J]. 运筹与管理, 2015, 24(2): 92-100.
(Li C B, Zhang J Y, Gu Y D, et al. Method for fuzzy-stochastic multi-criteria decision-making based on propect theory and improved TOPSIS with its application[J]. Operations Research and Management Science, 2015, 24(2): 92-100.)

[8] Wang J Q, Zhang H Y, Ren S C. Grey stochastic multi-criteria decision-making approach based on expected probability degree[J]. Scientia Iranica, 2013, 20(3): 873-878.

[9] 王坚强, 周玲. 基于前景理论的灰色随机多准则决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(9): 1658-1664.
(Wang J Q, Zhou L. Grey-stochastic multi-criteria decision-making approach based on prospect theory[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2010, 30(9): 1658-1664.)

[10] Zhou H, Wang J Q, Zhang H Y. Grey stochastic multi-criteria decision-making based on regret theory and TOPSIS[J]. Int J of Machine Learning & Cybernetics, 2017, 8: 651-664.

[11] Fu S. A grey stochastic multi-criteria decision-making method based on hausdorff distance[J]. Computer Science and Information Technology, 2015, 3(6): 227-232.

[12] 周欢, 王坚强, 王丹丹, 等. 基于Hurwicz的概率不确定的灰色随机多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2015, 30(3): 556-560.
(Zhou H, Wang J Q, Wang D D, et al. Grey stochastic multi-criteria decision-making approach based on Hurwicz with uncertain probability[J]. Control and Decision, 2015, 30(3): 556-560.)

[13] 冯向前, 谭倩云, 钱钢. 犹豫模糊语言的可能度排序方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(4): 640-646.
(Feng X Q, Tan Q Y, Qian G. Possibility degree methods for ranking hesitant fuzzy linguistic sets[J]. Control and Decision, 2016, 31(4): 640-646.)

[14] 郭三党, 刘思峰, 方志耕. 基于核和灰度的区间灰数多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(6): 1042-1046.
(Guo S D, Liu S F, Fang Z G. Multi-attribute decision making model based on kernel and degree ofgreyness of interval grey numbers[J]. Control and Decision, 2016, 31(6): 1042-1046.)

[15] Madjid Tavana, Reza Kiani Mavi, Francisco J Santos-Arteaga, et al. An extended VIKOR method using stochastic data and subjective judgments[J]. Computers & Industrial Engineering, 2016, 97: 240-247.

[16] 罗党, 李诗. 基于“离合”思想的混合型灰色多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(7): 1305-1310.
(Luo D, Li S. Hybrid grey multiple attribute decision-making method based on “clutch” thought[J]. Control and Decision, 2016, 31(7): 1305-1310.)

[17] Liu S F, Yang Y J, Jeffrey Forrest. Grey data analysis: Methods, models and applications[M]. Singapore: Springer, 2017: 38-40.

(责任编辑：李君玲)