控 制 与 决 策
Control and Decision

布尔控制网络的集成集可控

徐 勇[1†], 苟志丽[1], 王金环[1], 姜凯辰[1]

(1. 河北工业大学 理学院，天津 300401)

摘 要: 本文研究了一类布尔控制网络的集成集可控性和集成集镇定性问题. 首先, 利用矩阵的半张量积理论, 给出布尔控制网络等价的代数表示. 其次, 通过自由控制序列研究布尔控制网络的集成集可控性, 并给出相应的充分必要条件. 对于布尔控制网络的集成集镇定性问题, 使其转换为集成集可控性问题, 并给出相应的判定定理. 最后, 给出数值例子说明本文结果的有效性.

关键词: 布尔控制网络；半张量积；集成集可控性；集成集镇定性

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.1837 **开放科学(资源服务)标识码(OSID):**

Ensemble set controllability of Boolean control networks

XU Yong[1†], *GOU Zhi-li*[1], *WANG Jin-huan*[1], *JIANG Kai-chen*[1]

(1. School of Science，Hebei University of Technology，Tianjin 300401，China)

Abstract: The ensemble set controllability and ensemble set stabilization of a class of Boolean control networks (BCNs) are investigated. Firstly, by using semi-tensor product of matrices, the algebraic representation of BCNs is proposed. Secondly, a necessary and sufficient condition is provided for ensuring the ensemble set controllability of BCNs by adopting the free control sequence. The ensemble set stabilization of BCNs can be transferred into ensemble set controllability and a corresponding decision theorem is obtained. Finally, a numerical example is given to show the validity of the results.

Keywords: Boolean control network；semi-tensor product；ensemble set controllability；ensemble set stabilization

0 引 言

布尔网络(BNs)最早由Kauffman提出, 用于分析遗传调控网络[1]. 尽管BNs概念简单, 但它可以捕捉基本的动态行为, 并可以提供许多实际系统的有用信息. 此后, BNs在不同理论和应用领域引起极大关注[2-3]. 在BNs中, 每个状态变量用 0 或 1 表示, 并根据布尔函数更新其状态. 在BNs上引入外部控制变量称为布尔控制网络(BCNs).

最近, Cheng提出一种新的表示和分析BNs的工具, 即矩阵的半张量积(STP)[4]. STP方法可以方便地将逻辑表达式转换为代数表达式, 进而将逻辑系统转换为代数系统并由此分析其相关性质. STP理论已经成功地应用于BNs, BCNs以及网络演化博弈[5]方面. 近些年来, 将STP理论应用于工程问题[6]也成为热点. 利用STP, BCNs理论和一般逻辑系统的控制得到迅速发展, 现已有许多结果. 如能控性和能观性[7-8], 不动点和极限环的计算[9-10], 干扰解耦问题[11-12], 最优控制问题[13-14], 稳定性与镇定性[15-16]. 此外, STP方法也被应用于其他控制问题, 如图着色[17]和非线性系统控制[18].

可控性是系统生物学中的一个重要概念, 在布尔(控制)网络的研究中引起广泛关注, 旨在确定一个类似于抑制干扰的控制序列, 以操纵生物系统从疾病状态的位置调控至健康状态的位置. 因此, 文献[19]针对BCNs在设计两种状态之间的外部控制序列时, 须避免某些禁止状态, 如不健康状态. 集可控性是一个重要概念, 其与一般可控性的不同之处在于, 可控性表示系统可控至某个固定状态, 而集可控性表示系统可控至某个集合状态. 通过研究集可控问题可将其余复杂问题简化考虑, 如文献[20]首次提出BCNs的集可控性概念, 并得到了一种通过集可控性验证可观性的方法, 其中集可控性结果为文献[19]中应用结果的推广. 文献[21]研究了混合控制下BCNs的可控性, 提出的方法是将具有网络输入控制和自由逻辑输入控制的BCNs转换为一个集可控性问题求解. 文献[22]研究了切换布尔控制网络的集

收稿日期: 2019-12-31；**修回日期:** 2020-04-02.
基金项目: 国家自然科学基金项目(11701138)，河北省自然科学基金(F2018202075).
†通讯作者. E-mail: xuyong@hebut.edu.cn.

可控性, 将集镇定问题和切换调节问题转换为集可控问题求解. 文献[23]研究了概率级联布尔网络的集镇定问题, 并给出了相应问题可解的充要条件.

由于物理和生物系统的行为对系统参数的不确定性或变化具有显著的敏感性[24-26], 这一现象促使人们研究集成控制问题, 通过设计一个控制器同时控制由误差或扰动产生的有限个系统集合, 该问题来自核磁共振光谱和成像的实际控制设计问题[27]. 由于系统参数不确定性的存在, 文献[28]提出了基于弦球面波函数的线性集成控制系统的最优控制器. 文献[29]对于BCNs函数的扰动网络状态和扰动基于规则结构进行分析讨论. 文献[30]研究了BCNs集成系统下的可控性和可达性, 并考虑当BCNs中存在未知输入时, 给出判定可控性的充分必要条件.

基于上述讨论, 本文提出具有干扰的BCNs的集可控性和集镇定性问题, 相比BCNs的集可控性和集镇定性, 在具有干扰的情况下, BCNs可能会因此产生多个系统, 用一般的方法分析其集可控性和集镇定性更复杂, 难度更大. 故提出将此问题可转换为在BCNs集成系统下分别考虑BCNs集成集可控性以及将集成集镇定性问题转换为相应的集成集可控性问题讨论, 并应用于大肠杆菌lac操纵子简化模型进行分析验证结果的有效性. 根据已有文献, BCNs在这方面结果还很少见.

本文的主要创新如下: (1)提出集成集可控性概念, 利用STP方法研究BCNs集成系统在自由控制序列下满足集可控的充分必要条件; (2)提出集成集镇定性概念, 并将集成集镇定性问题转换为相应的集成集可控性问题, 并给出相应的判定定理.

1 预备知识

首先列出与本文相关的符号[20, 30]:

(1) $\mathbb{R}^n$: n 维欧几里德空间.

(2) $\mathcal{M}_{m\times n}$: $m\times n$ 维矩阵集合.

(3) $Col(A)$: 矩阵 A 的列集合. $Col_i(A)$: 矩阵 A 的第 i 列.

(4) 若 $Col(L)\subset\Delta_m$, 矩阵 $L\in\mathcal{M}_{m\times n}$ 称为逻辑矩阵. $\mathcal{L}_{m\times n}$: $m\times n$ 维逻辑矩阵集合.

(5) 若 $L\in\mathcal{L}_{m\times n}$, 则 $L=[\delta_m^{i_1}\ \delta_m^{i_2}\cdots\delta_m^{i_n}]$, 简写为 $L=\delta_m[i_1\ i_2\cdots i_n]$.

(6) $\mathcal{D}:=\{0,1\}$, $\mathcal{D}^n:=\underbrace{\mathcal{D}\times\mathcal{D}\times\cdots\times\mathcal{D}}_{n}$.

(7) $\Delta_n:=\{\delta_n^i|i=1,2,\cdots,n\}$, δ_n^i: 单位矩阵 I_n 的第 i 列.

(8) $1_k:=\underbrace{\{1,1,\cdots,1\}^T}_{k}$.

$1_{p\times q}:=\underbrace{\{1_p,1_p,\cdots,1_p\}}_{q}$.

(9) $\mathcal{B}_{m\times n}$: $m\times n$ 维布尔矩阵集合.

(10) $M,N\in\mathcal{B}_{m\times n}$, $M+_{\mathcal{B}}N=A$ 为布尔和, 其中 $a_{i,j}=m_{i,j}\vee n_{i,j}$.

(11) $M\in\mathcal{B}_{r\times s}$, $N\in\mathcal{B}_{s\times t}$, $M\times_{\mathcal{B}}N=A$ 为布尔积, 其中 $a_{i,j}=\sum_{\mathcal{B}\ k=1}^{s}m_{i,k}\wedge n_{k,j}$.

(12) $A\in\mathcal{B}_{n\times n}$, $A^{(k)}:=\underbrace{A\times_{\mathcal{B}}A\times_{\mathcal{B}}\cdots\times_{\mathcal{B}}A}_{k}$.

(13) 矩阵 $C>0$ 表示矩阵所有元素为正数, 即 $c_{i,j}>0,\forall i,j$.

(14) $\Xi_m:=\{1,2,\cdots,2^m\}$.

(15) $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}$为矩阵集合, $\langle A\rangle:=\sum_{i=1}^{N}A_i$.

定义1 [4] 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}\in\mathcal{M}_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{p\times q}\in\mathcal{M}_{p\times q}$. 则 A 与 B 的 Kronecker 积记作 $A\otimes B$, 定义为

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B\\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{mp\times nq}.$$

定义2 [4] 给定两个矩阵 $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}$, $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{p\times q}$, $t=lcm(n,p)$ 是 $\{n,p\}$ 的最小公倍数. 矩阵 A,B 的半张量积记为

$$A\ltimes B:=(A\otimes I_{t/n})(B\otimes I_{t/p}),$$

其中 $\otimes$ 表示 Kronecker 积.

定义3 [4] 设 $A\in\mathcal{M}_{m\times r}$, $B\in\mathcal{M}_{n\times r}$. 那么, A 和 B 的 Khatri-Rao 积, 记作$A*B$, 定义如下:

$$A*B=[Col_1(A)\otimes Col_1(B),\cdots,Col_r(A)\otimes Col_r(B)].$$

注1 STP是普通矩阵乘积的推广. 在下文无混淆情况下, 可省略“$\ltimes$”.

设 x 为逻辑变量, 即 $x\in\mathcal{D}$. 用向量表示逻辑值的结构, 分别表示为 $1\sim\delta_2^1$ 和 $0\sim\delta_2^2$, 即有 $\mathcal{D}\sim\Delta_2$ 和 $\mathcal{D}^n\sim\Delta_{2^n}$, 其中 $\sim$ 表示同一事物的两种不同表示形式.

引理1 [4] 设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为一个逻辑函数, 在向量形式下$f:\mathcal{D}^n\to\mathcal{D}$, 存在唯一的逻辑矩阵$M_f\in\mathcal{L}_{2\times 2^n}$, 称为$f$ 的结构矩阵, 使得

$$f(x_1,\cdots,x_n)=M_f x_1x_2\cdots x_n=M_f\ltimes_{i=1}^{n}x_i.$$

引理2 [4] 设 $u=M\ltimes_{i=1}^{n}x_i$ 和 $v=N\ltimes_{i=1}^{n}x_i$, 其中 $x_i\in\Delta_2, i=1,2,\cdots,n$ 是逻辑变量, 用向量形式表示, 其中 $M,N\in\mathcal{L}_{2\times 2^n}$ 是逻辑矩阵. 则

$$uv=(M*N)\ltimes_{i=1}^{n}x_i,$$

其中 $*$ 是 Khatri-Rao 积.

引理3 [4] 设$X\in\mathbb{R}^{m\times 1}$和$Y\in\mathbb{R}^{n\times 1}$是两个列

向量, 则

$$Y \ltimes X = W_{[m,n]} \ltimes X \ltimes Y,$$

其中$W_{[m,n]} = \delta_{mn}[1, m+1, \cdots, (n-1)m+1, 2, m+2, \cdots, (n-1)m+2, \cdots, m, 2m, \cdots, nm] \in \mathcal{L}_{mn\times mn}$.

引理4 [4] 设 $x = \ltimes_{i=1}^n x_i$, $x_i \in \Delta_2, i = 1, 2, \cdots, n$.

$$x^2 = \Phi_n x,$$

其中 $\Phi_n = \Pi_{i=1}^n I_{2^{i-1}} \otimes [(I_2 \otimes W_{[2,2^{n-i}]})M_r] \in \mathcal{L}_{2^{2n}\times 2^n}$.

$$x_i^2 = M_r\, x_i,$$

其中 $M_r = \delta_4[1, 4]$ 为降阶矩阵.

2 主要内容

首先给出BCNs集成系统的代数表示; 其次考虑BCNs的集成集可控性问题; 最后考虑BCNs的集成集镇定性问题.

2.1 BCNs的代数表示

BCNs的集成系统表示如下:

$$\begin{cases} x_1^j(t+1) = f_1^j(u_1(t), \cdots, u_m(t), x_1^j(t), \cdots, x_n^j(t)) \\ x_2^j(t+1) = f_2^j(u_1(t), \cdots, u_m(t), x_1^j(t), \cdots, x_n^j(t)) \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_n^j(t+1) = f_n^j(u_1(t), \cdots, u_m(t), x_1^j(t), \cdots, x_n^j(t)), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $f_i^j : \mathcal{D}^{m+n} \to \mathcal{D}$ 是逻辑函数, $x_i^j \in \mathcal{D}, i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, h$ 是逻辑状态, $u_r \in \mathcal{D}, r = 1, 2, \cdots, m$ 是输入控制状态, $t = 0, 1, \cdots$ 是离散时间.

对每个逻辑函数 $f_i^j, i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, h$. 其对应结构矩阵为 $M_i^j \in \mathcal{L}_{2\times 2^{m+n}}$. 令 $x^j(t) = \ltimes_{i=1}^n x_i^j(t)$, $u(t) = \ltimes_{r=1}^m u_r(t)$, 由引理1, 则系统(1)的第 j 层的逻辑矩阵为

$$\begin{aligned} &x_i^j(t+1) = M_i^j u(t) x^j(t), \\ &i = 1, 2, \cdots, n; \quad j = 1, 2, \cdots, h. \end{aligned} \tag{2}$$

对(2)式作 Khatri-Rao 积, 则

$$x^j(t+1) = L^j u(t) x^j(t), \quad j = 1, 2, \cdots, h, \tag{3}$$

其中 $L^j = M_1^j \prod_{i=2}^n [(I_{2^{n+m}} \otimes M_i^j)\Phi_{n+m}] \in \mathcal{L}_{2^n\times 2^{n+m}}$.

2.2 BCNs的集成集可控

考虑(3)式, 即

$$x^j(t+1) = L^j u(t) x^j(t), \qquad j = 1, 2, \cdots, h,$$

其中 $L^j \in \mathcal{L}_{2^n\times 2^{n+m}}$, $L^j u(t) \in \mathcal{L}_{2^n\times 2^n}$, 将 L^j 按控制分为 2^m 块, 即$L^j = [L_1^j\, L_2^j \cdots L_{2^m}^j]$, $j = 1, 2, \cdots, h$, $L_i^j \in \mathcal{L}_{2^n\times 2^n}, i \in \Xi_m$.

令

$$\Lambda_{2^m}^j = \{L_1^j, L_2^j, \cdots, L_{2^m}^j\}, \ \ j = 1, 2, \cdots, h,$$

其中下标 2^m 表示 $\Lambda_{2^m}^j$ 中矩阵块数量.

定义

$$\begin{aligned} (\Lambda_{2^m}^j)^t &= \{L_1^j, L_2^j, \cdots, L_{2^m}^j\}^t \\ &= \{L_{i_t}^j L_{i_{t-1}}^j \cdots L_{i_1}^j | i_l \in \Xi_m, l = 1, 2, \cdots, t\}, \end{aligned}$$

其中 $L_{i_t}^j L_{i_{t-1}}^j \cdots L_{i_1}^j \in \mathcal{L}_{2^n\times 2^n}$. 此时 $(\Lambda_{2^m}^j)^t$ 中含有 2^{mt} 个矩阵块, 是维数为 $2^n \times 2^n$ 逻辑矩阵集合.

定义

$$\begin{aligned} &(\Lambda_{2^m})^t \\ &= \{\wedge_{j=1}^h L_{i_t}^j L_{i_{t-1}}^j \cdots L_{i_1}^j | i_l \in \Xi_m, l = 1, 2, \cdots, t\}, \end{aligned}$$

其中 $(\Lambda_{2^m})^t$ 是 $2^n \times 2^n$ 维矩阵集合. 因此,

令

$$\begin{aligned} M^t &= \langle (\Lambda_{2^m})^t \rangle \\ &= \sum_{\mathcal{B}\ i_l \in \Xi_m\ l=1,2,\cdots,t} \Lambda_{j=1}^h L_{i_t}^j L_{i_{t-1}}^j \cdots L_{i_1}^j, \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $M^t \in \mathcal{M}_{2^n\times 2^n}$.

令

$$C = \sum_{\mathcal{B}\ t=1}^{2^n} M^t, \tag{5}$$

其中 $C \in \mathcal{M}_{2^n\times 2^n}$, 此时称矩阵 C 为集成可控矩阵.

例1 若给出BCNs集成系统, 其对应结构矩阵为 $L^1 = \delta_2[1\ 2\ 2\ 2]$, $L^2 = \delta_2[1\ 2\ 2\ 1]$, $n = 1$, $m = 1$, $t = 1, 2$. 则

$$L_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$L_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

当 $t = 1$ 时

$$(\Lambda_2^1)^1 = \{L_1^1,\ L_2^1\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

同样可得

$$(\Lambda_2^2)^1 = \{L_1^2,\ L_2^2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

有

$$(\Lambda_2)^1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

计算可得

$$M^1 = \langle (\Lambda_2)^1 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

当 $t=2$ 时

$$(\Lambda_2^1)^2=\{L_1^1\,L_1^1,\ L_1^1\,L_2^1,\ L_2^1\,L_1^1,\ L_2^1\,L_2^1\}$$
$$=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\right\},$$

同样可得

$$(\Lambda_2^2)^2=\{L_1^2\,L_1^2,\ L_1^2\,L_2^2,\ L_2^2\,L_1^2,\ L_2^2\,L_2^2\}$$
$$=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\},$$

有

$$(\Lambda_2)^2=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\},$$

计算可得

$$M^2=\langle(\Lambda_2)^2\rangle=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},$$

故计算可得集成可控矩阵为

$$C=\sum_{\mathcal{B}\ t=1}^{2}M^t=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}.$$

首先给出系统(1)集成可控的定义.

定义4　设共同初始状态 $X_0\in\Delta_{2^n}$.

(1) 若存在一个共同的控制序列 $\{u(0),u(1),\cdots,u(t-1)\}$ 使系统(1)从共同初始状态 X_0 到共同目的状态 X_t, 称 X_t 是由 X_0 在第 t 步集成可达. 第 t 步的集成可达集为 $R_t(X_0)$. 所有的集成可达集为 $R(X_0)=\bigcup_{t=1}^{\infty}R_t(X_0)$;

(2) 若 $R(X_0)=\Delta_{2^n}$, 则系统(1)在共同初始状态 X_0 集成可控. 若系统(1)在每个 $X_0\in\Delta_{2^n}$ 均集成可控, 则系统(1)集成可控.

根据定义4和集成可控矩阵得到以下定理.

定理1　考虑具有共同自由控制序列的系统(1)集成可控, 其对应集成可控矩阵为 $C=(C_{ij})$, 则满足

(1) 系统(1)由共同初始状态 $\delta_{2^n}^j$ 到共同目的状态 $\delta_{2^n}^i$ 集成可控当且仅当$C_{ij}=1$;

(2) 系统(1)在共同初始状态 $\delta_{2^n}^j$ 集成可控当且仅当 $Col_j(C)=1_{2^n}$;

(3) 系统(1)集成可控当且仅当 $C=1_{2^n\times2^n}$.

证明　设系统(1)具有共同初始状态 $x(0)$ 和共同目的状态 $x(t)$, 且状态 $x(0)$ 在第 t 步集成可达 $x(t)$.

由第 j 层系统可得

$$x^j(t+1)=[L_1^j\,L_2^j\,\cdots\,L_{2^m}^j]u(t)x^j(t)$$
$$\in\{L_1^jx^j(t),L_2^jx^j(t),\cdots,L_{2^m}^jx^j(t)\}$$
$$\in\{L_1^j,L_2^j,\cdots,L_{2^m}^j\}x^j(t).$$

直接计算可得

$$x^j(1)=[L_1^j\,L_2^j\,\cdots\,L_{2^m}^j]u(0)x(0)$$
$$\in\{L_1^j,L_2^j,\cdots,L_{2^m}^j\}x(0),$$
$$x^j(2)=[L_1^j\,L_2^j\,\cdots\,L_{2^m}^j]u(1)x^j(1)$$
$$\in\{L_1^j,L_2^j,\cdots,L_{2^m}^j\}x^j(1)$$
$$\in\{L_1^j,L_2^j,\cdots,L_{2^m}^j\}^2x(0),$$

重复上面迭代过程, 即得

$$x(t)=x^j(t)=[L_1^j\,L_2^j\,\cdots\,L_{2^m}^j]u(t-1)x^j(t-1)$$
$$\in\{L_1^j,L_2^j,\cdots,L_{2^m}^j\}^tx(0)$$
$$\in\{L_{i_t}^jL_{i_{t-1}}^j\cdots L_{i_1}^j|i_l\in\Xi_m,l=1,2,\cdots,t\}x(0).$$

若存在指标序列 $\{i_1,i_2,\cdots,i_t\}$ 使得 $x(t)=L_{i_t}^jL_{i_{t-1}}^j\cdots L_{i_1}^jx(0)$ 成立, 则控制序列相应为 $u(0)=\delta_{2^m}^{i_1},u(1)=\delta_{2^m}^{i_2},\cdots,u(t-1)=\delta_{2^m}^{i_t}$. 其控制序列使得第 j 层系统满足从初始状态 $x(0)$ 可达目的状态 $x(t)$. 若此控制序列为系统(1)的集成控制序列, 则需对 $j=1,2,\cdots,h$ 层均满足由共同初始状态 $x(0)$ 可达共同目的状态 $x(t)$. 故可得

$$x(t)=\wedge_{j=1}^hL_{i_t}^jL_{i_{t-1}}^j\cdots L_{i_1}^jx(0).$$

即

$$1=x^T(t)\wedge_{j=1}^hL_{i_t}^jL_{i_{t-1}}^j\cdots L_{i_1}^jx(0).$$

因至少存在一种由共同控制序列使系统(1)从共同初始状态 $x(0)$ 可达共同目的状态 $x(t)$.

即

$$1=x^T(t)\sum_{\mathcal{B}\ i_l\in\Xi_m\ l=1,2,\cdots,t}\wedge_{j=1}^hL_{i_t}^jL_{i_{t-1}}^j\cdots L_{i_1}^jx(0).$$

故得

$$1=x^T(t)M^tx(0).$$

故必存在一条由共同初始状态 $x(0)$ 在第 t 步可达共同目的状态 $x(t)$ 的路径. 即

$$1=x^T(t)\sum_{\mathcal{B}\ t=1}^{2^n}M^tx(0),$$
$$1=x^T(t)Cx(0).$$

故在集成可控矩阵中必存在一条由共同初始状态 $x(0)$ 可达共同目的状态 $x(t)$ 的路径.

设共同初始状态 $x(0)=\delta_{2^n}^j$ 和共同目的状态 $x(t)=\delta_{2^n}^i$, 即存在 $1=(\delta_{2^n}^i)^TC(\delta_{2^n}^j)$ 等价于存在集成控制序列使系统(1)由共同初始状态 $x(0)=\delta_{2^n}^j$ 到共同目的状态 $x(t)=\delta_{2^n}^i$ 集成可控.

同理可证(2)和(3)成立. 证明成立. □

现在提出系统(1)的初始集族和目的集族, 并引入指标列向量将集族化为指标矩阵表示.

给定一个每层 n 个结点的BCNs集成系统. 首先考虑第 j 层 n 个结点的BCNs. $N=\{1,2,\cdots,2^n\}$ 为状态集, 令 $s\in 2^N$, s 是给定的状态集合, 引入指标列向量 $V(s)=[(V(s))_1,(V(s))_2,\cdots,(V(s))_{2^n}]\in\mathbb{R}^{2^n}$ 刻画 s 的特征, 其中

$$(V(s))_i=\begin{cases}1, & i\in s;\\ 0, & i\notin s.\end{cases}$$

第 j 层的初始集族为 ${}^jP^0$ 和目的集族为 ${}^jP^d$, 相应表示为

$$\begin{aligned}{}^jP^0&=\{s_1^0,s_2^0,\cdots,s_v^0\}\subset 2^N,\\ {}^jP^d&=\{s_1^d,s_2^d,\cdots,s_w^d\}\subset 2^N.\end{aligned}$$

BCNs集成系统的初始集族为 P^0 和目的集族为 P^d, 相应表示为

$$P^0=\bigcap_{j=1}^h {}^jP^0,\ P^d=\bigcap_{j=1}^h {}^jP^d.$$

即可得

$$\begin{aligned}P^0&=\{s_1^0,s_2^0,\cdots,s_\alpha^0\}\subset 2^N,\\ P^d&=\{s_1^d,s_2^d,\cdots,s_\beta^d\}\subset 2^N.\end{aligned}\tag{6}$$

利用指标列向量将初始集族 P^0 和目的集族 P^d 定义为初始指标矩阵 J_0 和目的指标矩阵 J_d, 即

$$\begin{aligned}J_0&=[V(s_1^0)\ \ V(s_2^0)\ \ \cdots\ \ V(s_\alpha^0)]\in\mathcal{B}_{2^n\times\alpha},\\ J_d&=[V(s_1^d)\ \ V(s_2^d)\ \ \cdots\ \ V(s_\beta^d)]\in\mathcal{B}_{2^n\times\beta}.\end{aligned}\tag{7}$$

由(5)式和(7)式定义矩阵, 称为集成集可控矩阵, 即

$$C_s=J_d^T\times_{\mathcal{B}}C\times_{\mathcal{B}}J_0\in\mathcal{B}_{\beta\times\alpha}.\tag{8}$$

接下来, 给出系统(1)的集成集可控定义.

定义5 具有相同的初始集族 P^0 和目的集族 P^d 的系统(1). 满足

(1) 系统(1)由 $s_j^0\in P^0$ 到 $s_i^d\in P^d$ 集成集可控当且仅当存在 $x^0\in s_j^0$ 和 $x^d\in s_i^d$ 满足 x^0 到 x^d 可控;

(2) 系统(1)在 $s_j^0\in P^0$ 处集成集可控当且仅当对任意的 $s_i^d\in P^d$, 系统(1) 均由 s_j^0 到 s_i^d 可控;

(3) 系统(1)集成集可控当且仅当对任意的 $s_j^0\in P^0$ 均集成集可控.

注2 对于BCNs的集可控而言, 只考虑单个系统的集可控, 但本文考虑的是多个系统的集可控, 尽管两者的初始集族和目的集族是可以任意给定的, 但对于本文考虑的多个系统还需要额外保证各层系统的初始集族和目的集族是一致的. 假设 $x^0\in P^0$ 和 $x^d\in P^d$, 如果 x^0 到 x^d 是可控的但不一定 P^0 到 P^d 集可控, 但若 P^0 到 P^d 集可控一定有 x^0 到 x^d 可控.

由定义5与集成集可控矩阵得到以下定理.

定理2 具有相同的初始集族 P^0 和目的集族 P^d 的系统(1). 其相应的集成集可控矩阵为 $C_s=(C_s)_{ij}$, 则有

(1) 系统(1)由 $s_j^0\in P^0$ 到 $s_i^d\in P^d$ 集成集可控当且仅当 $(C_s)_{ij}=1$;

(2) 系统(1)在 $s_j^0\in P^0$ 处集成集可控当且仅当 $Col_j(C_s)=1_\beta$;

(3) 系统(1)集成集可控当且仅当 $C_s=1_{\beta\times\alpha}$.

证明 (充分性)由集成集可控矩阵 C_s 知

$$\begin{aligned}(C_s)_{ij}&=(J_d^T\times_{\mathcal{B}}C\times_{\mathcal{B}}J_0)_{ij}\\ &=\sum_{\mathcal{B}\ \alpha=1}^{2^n}[(J_d^T\times_{\mathcal{B}}C)_{i\alpha}\wedge(J_0)_{\alpha j}]\\ &=\sum_{\mathcal{B}\ \alpha=1}^{2^n}[\sum_{\mathcal{B}\ \beta=1}^{2^n}(J_d^T)_{i\beta}\wedge(C)_{\beta\alpha}\wedge(J_0)_{\alpha j}]\\ &=\sum_{\mathcal{B}\ \alpha=1}^{2^n}\sum_{\mathcal{B}\ \beta=1}^{2^n}[(J_d)_{\beta i}\wedge(C)_{\beta\alpha}\wedge(J_0)_{\alpha j}].\end{aligned}$$

由上可知, 若 $(C_s)_{ij}=1$ 当且仅当存在 $\alpha,\beta\in\{1,2,\cdots,2^n\}$ 满足 $(J_d)_{\beta i}=(C)_{\beta\alpha}=(J_0)_{\alpha j}=1$. 即存在 $\delta_{2^n}^\beta\in s_i^d$ 和 $\delta_{2^n}^\alpha\in s_j^0$ 满足 $\delta_{2^n}^\beta=x(t,\delta_{2^n}^\alpha,u)$. 故系统(1)由 s_j^0 到 s_i^d 集成集可控.

(必要性)考虑初始指标矩阵 J_0 和目的指标矩阵 J_d. 集成可控矩阵 C 的定义为

$$C=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&\dots&C_{1\times 2^n}\\ C_{21}&C_{22}&\dots&C_{2\times 2^n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ C_{2^n\times 1}&C_{2^n\times 2}&\dots&C_{2^n\times 2^n}\end{bmatrix}.$$

由集成集可控矩阵 C_s 的定义知

$$\begin{aligned}C_s&=J_d^T\times_{\mathcal{B}}C\times_{\mathcal{B}}J_0\\ &=\begin{bmatrix}C_{a_1b_1}&C_{a_1b_2}&\dots&C_{a_1b_\alpha}\\ C_{a_2b_1}&C_{a_2b_2}&\dots&C_{a_2b_\alpha}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ C_{a_\beta b_1}&C_{a_\beta b_2}&\dots&C_{a_\beta b_\alpha}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

因系统(1)满足由共同初始状态 $\delta_{2^n}^j$ 到共同目的状态 $\delta_{2^n}^i$ 集成集可控. 设共同初始状态 $\delta_{2^n}^j\in s_j^0,j=1,2,\cdots,\alpha$, 共同目的状态$\delta_{2^n}^i\in s_i^d,i=1,2,\cdots,\beta$, 则集成集可控矩阵从集成可控矩阵 C 中选取其相应位置, 即为 $C_{a_ib_j}$. C_s 中的元素均由选出的 $C_{a_ib_j}$ 构成, 则有 $(C_s)_{ij}=C_{a_ib_j}$. 故由集成集可控矩阵知, $(C_s)_{ij}=C_{a_ib_j}=1$, 即证.

同理可证(2)和(3)成立. 证明成立. □

例2 考虑例1中的集成可控矩阵 C.

(1)假设

$$\begin{cases} P^0 = \{s_1^0 = \{\delta_2^1\}\}; \\ P^d = \{s_1^d = \{\delta_2^1, \delta_2^2\}\}. \end{cases}$$

故有

$$J_0 = [1\ \ 0]^T; \quad J_d = [1\ \ 1]^T,$$

计算可得

$$C_s = J_d^T \times_{\mathcal{B}} C \times_{\mathcal{B}} J_0 = 1.$$

因此, 此BCNs集成系统由共同初始集族 P^0 和共同目的集族 P^d 集成集可控.

(2)假设

$$\begin{cases} P^0 = \{s_1^0 = \{\delta_2^2\}\}; \\ P^d = \{s_1^d = \{\delta_2^1\}\}. \end{cases}$$

故有

$$J_0 = [0\ \ 1]^T; \quad J_d = [1\ \ 0]^T,$$

计算可得

$$C_s = J_d^T \times_{\mathcal{B}} C \times_{\mathcal{B}} J_0 = 0.$$

因此, 此BCNs集成系统由共同初始集族 P^0 和共同目的集族 P^d 不是集成集可控.

2.3 BCNs的集成集镇定

定义6 [21] 一个集合 $\mathcal{K} \subset \Delta_{2^n}$ 称为系统(1)在 $j = 1$ 时的控制不变子集, 若对 $\forall x_0 \in \mathcal{K}$, 存在控制序列 $\{u(t), t = 0, 1, \cdots\}$ 使得 $x(t; x_0) \in \mathcal{K}$, $\forall t \geq 0$.

集合 S 表示系统(1)所有初始状态可达的公共状态集合.

定义7 一个集合 $\mathcal{K} \subset S$ 称为系统(1)的集成控制不变集, 若对 $\forall x_0 \in \mathcal{K}$, 存在共同的控制序列 $\{u(t), t = 0, 1, \cdots\}$ 使得 $x(t; x_0) \in \mathcal{K}$, $\forall t \geq 0$.

定义8 一个集合 $\mathcal{K} \subset S$ 称为系统(1)的集成全局可达集, 若对 $\forall x_0 \in S$, 存在一个 $N > 0$ 和一个共同的控制序列 $\{u(t), t = 0, 1, \cdots, N-1\}$ 使得 $x(N; x_0) \in \mathcal{K}$.

注3 定义8中的全局可达并不是指系统(1)所有状态, 而是所定义集合 S 的所有状态.

定义9 一个集合 $\mathcal{K} \subset S$ 是集成集镇定, 若对每个状态 $a \in \Delta_{2^n}$ 存在 N_a 和共同的控制序列 $\{u(t), t = 0, 1, \cdots\}$ 使得对所有 $t \geq N_a$ 有 $x(t; a) \in \mathcal{K}$.

引理5 [21] 若 P^d 是由 P^0 一步集成集可控的, 当且仅当

$$C_1 := J_d^T \times_{\mathcal{B}} M \times_{\mathcal{B}} J_0 = 1_{\beta \times \alpha}. \tag{9}$$

其中 M 由(4)式 $t = 1$得, $\alpha = |P^0|$ 和 $\beta = |P^d|$.

基于定义和引理5得到下述定理.

定理3 考虑BCNs集成系统(1), 即

(1) $\mathcal{K}$ 是集成控制不变集, 当且仅当系统由 $P^0 = \{s_i^0 | i = 1, 2, \cdots, |\mathcal{K}|\}$ 到 $P^d = \{s_1^d = \mathcal{K}\}$ 是一步集成集可控的, 其中 $s_i^0 = \{x_i \in \mathcal{K}\}$ 为单点集.

(2) $\mathcal{K}$ 是集成集镇定, 当且仅当 $\mathcal{K}$ 包含一个集成控制不变的全局可达集.

证明 第(1)部分显然成立. 证明第(2)部分.

(充分性) $\mathcal{K}$ 包含一个集成控制不变的全局可达集, 由定义7、定义8和定义9知, $\mathcal{K}$ 是集成集镇定.

(必要性)由定义9可得, 对每个 $a \in \Delta_{2^n}$ 都有 N_a 满足 $x(t; a) \in \mathcal{K}$, $t \geq N_a$. 状态集合 $a \in \Delta_{2^n}$ 是有限的, 定义 $N = max_{a \in \Delta_{2^n}} N_a < \infty$. 集 $\mathcal{K}_0 = \cup_{a \in \Delta_{2^n}} \{x(t; a) | t \geq N\} \subset \mathcal{K}$, 即 $\mathcal{K}_0$ 是 $\mathcal{K}$ 的集成控制不变的全局可达集. 证明成立. □

3 算例分析

例3 考虑大肠杆菌lac操纵子的简化模型[30-31], 其模型简化为BCNs.

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \neg u_1(t) \wedge (x_2(t) \vee x_3(t)) \\ x_2(t+1) = \neg u_1(t) \wedge u_2(t) \wedge x_1(t) \wedge \xi(t) \\ x_3(t+1) = \neg u_1(t) \wedge (u_2(t) \vee (u_3(t) \wedge x_1(t))), \end{cases} \tag{10}$$

其中 x_1, x_2 和 x_3 是状态变量, 分别代表lac mRNA, 高浓度乳糖, 中等浓度乳糖. 相应的, u_1, u_2 和 u_3 是控制变量, 分别代表细胞外葡萄糖, 高胞外乳糖, 中等胞外乳糖. 当 $u_1(t) \equiv 0$ 时, 系统(10)转换为

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \vee x_3(t) \\ x_2(t+1) = v_1(t) \wedge x_1(t) \wedge \xi(t) \\ x_3(t+1) = v_1(t) \vee (v_2(t) \wedge x_1(t)), \end{cases} \tag{11}$$

其中 v_1 和 v_2 表示高胞外乳糖和中等胞外乳糖. ξ 是外在干扰, 考虑与文献[30]中相同的情况. 干扰 ξ 是固定值, 即 $\xi(t) \equiv 1$ 和 $\xi(t) \equiv 0$. 相应的, 可以得到以下两层子系统. 即

第一层系统为

$$\begin{cases} x_1^1(t+1) = x_2^1(t) \vee x_3^1(t) \\ x_2^1(t+1) = v_1(t) \wedge x_1^1(t) \\ x_3^1(t+1) = v_1(t) \vee (v_2(t) \wedge x_1^1(t)), \end{cases} \tag{12}$$

第二层系统为

$$\begin{cases} x_1^2(t+1) = x_2^2(t) \vee x_3^2(t) \\ x_2^2(t+1) = 0 \\ x_3^2(t+1) = v_1(t) \vee (v_2(t) \wedge x_1^2(t)), \end{cases} \tag{13}$$

由逻辑变量的向量形式, 即 $x^j(t) = \ltimes_{i=1}^3 x_i^j$, $j = 1, 2$. $v(t) = \ltimes_{r=1}^2 v_r(t)$. 由此系统(12)在 $\xi(t) \equiv 1$ 下的代数形式 $x^1(t+1) = L^1 v(t) x^1(t)$, 其中

$$L^1 = \delta_8[1\,1\,1\,5\,3\,3\,3\,7\,1\,1\,1\,5\,3\,3\,3\,7\ \ 3\,3\,3\,7\,4\,4\,4\,8\,4\,4\,4\,8\,4\,4\,4\,8].$$

同样可得系统(13)在 $\xi(t) \equiv 0$ 下的代数形式

$x^2(t+1) = L^2 v(t) x^2(t)$, 其中

$$L^2 = \delta_8[3\,3\,3\,7\,3\,3\,3\,7\,3\,3\,3\,7\,3\,3\,3\,7\\ 3\,3\,3\,7\,4\,4\,4\,8\,4\,4\,4\,8\,4\,4\,4\,8].$$

根据控制 $m=2$ 可将每层系统分为 4 块, 可得

$$\begin{aligned} L_1^1 = L_2^1 &= \delta_8[1\,1\,1\,5\,3\,3\,3\,7],\\ L_3^1 &= \delta_8[3\,3\,3\,7\,4\,4\,4\,8],\\ L_4^1 &= \delta_8[4\,4\,4\,8\,4\,4\,4\,8].\\ L_1^2 = L_2^2 &= \delta_8[3\,3\,3\,7\,3\,3\,3\,7],\\ L_3^2 &= \delta_8[3\,3\,3\,7\,4\,4\,4\,8],\\ L_4^2 &= \delta_8[4\,4\,4\,8\,4\,4\,4\,8]. \end{aligned}$$

由自由控制序列考虑 $t = 2^n, n = 1, 2, \cdots, 8$. 当 $t = 1$ 时,

$$M^1 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&1&1&1&0\\ 1&1&1&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{bmatrix},$$

当 $t = 2,\ 3,\ \cdots,\ 8$ 时,

$$M^2 = M^3 = \cdots = M^8 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}.$$

则可得集成可控矩阵

$$C = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}.$$

假设共同初始集族 P^0 和目的集族 P^d 为

$$\begin{cases} P^0 = \{s_1^0 = \{\delta_8^2, \delta_8^3\}, s_2^0 = \{\delta_8^5, \delta_8^7\}\};\\ P^d = \{s_1^d = \{\delta_8^4\}, s_2^d = \{\delta_8^2, \delta_8^8\}\}. \end{cases}$$

其相应指标矩阵为

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}^T,$$

$$J_d = \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}^T.$$

则可得集成集可控矩阵

$$C_s = J_d^T \times_{\mathcal{B}} C \times_{\mathcal{B}} J_0 = \begin{bmatrix} 1&1\\ 1&1 \end{bmatrix}.$$

故系统(11)在共同初始集族 P^0 和目的集族 P^d 下集成集可控.

考虑集成集镇定问题.

(1)集 $\mathcal{K} = \{\delta_8^3, \delta_8^4, \delta_8^7, \delta_8^8\}$. 假设

$$\begin{cases} P^0 = \{\ \{\delta_8^3\},\ \{\delta_8^4\},\ \{\delta_8^7\},\ \{\delta_8^8\}\ \};\\ P^d = \{\ \{\delta_8^3,\ \delta_8^4,\ \delta_8^7,\ \delta_8^8\}\ \}. \end{cases}$$

其相应指标矩阵为

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}^T,$$

$$J_d = \begin{bmatrix} 0&0&1&1&0&0&1&1 \end{bmatrix}^T.$$

由引理5计算可得

$$C_1 := J_d^T \times_{\mathcal{B}} M \times_{\mathcal{B}} J_0 = 1_4^T.$$

则 $\mathcal{K}$ 是集成控制不变集.

(2)假设 $\hat{P}_0 = \{\ \{\delta_8^1\},\ \{\delta_8^2\}, \cdots,\ \{\delta_8^8\}\ \}$, 即$J_0 = I_8$, 计算可得

$$\hat{C}_1 = J_d^T \times_{\mathcal{B}} M \times_{\mathcal{B}} \hat{J}_0 = 1_8^T.$$

则 $\mathcal{K}$ 是集成全局可达子集.

综上, 集 $\mathcal{K}$ 满足集成集镇定.

4 结 论

本文研究了在BCNs集成系统下的集可控性和集镇定性问题. 基于矩阵的半张量积, 给出BCNs集成系统的代数表示. 基于该代数表示, 构造出集成可控矩阵并在此基础上得到集成集可控矩阵. 利用集成集可控矩阵给出了在自由控制序列下集成集可控性的充分必要条件. 同时将集成集镇定性问题转换为集成集可控性问题研究得出判定定理.

在未来的研究中, 对包括BCNs的牵制控制下的集成集可控和概率BCNs的集成集可控的课题可以进一步研究.

参考文献(References)

[1] Kauffman S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets[J]. Journal of Theoretical Biology, 1969, 22(3): 437-467.

[2] Wang L Q, Liu Y, Wu Z G, et al. Strategy optimization for static games based on STP method[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 316: 390-399.

[3] Lau K Y, Ganguli S, Tang C. Function constrains network architecture and dynamics: a case study on the yeast cell cycle Boolean network[J]. Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys, 2007, 75(5): 051907.

[4] Cheng D Z, Qi H S. Analysis and control of Boolean networks: a semi-tensor product approach[C]. Proc of 7th Asian Control Conf. Hong Kong: IEEE, 2009: 1352-1356.

[5] Zhao G D, Li H T, Duan P Y, et al. Survey on applications of semi-tensor product method in networked evolutionary games[J]. Journal of Applied Analysis and Computation, 2020, 10(1): 32-54.

[6] Li H T, Zhao G D, Meng M, et al. A survey on applications of semi-tensor product method in engineering[J]. Science China Information Sciences, 2018, 61(1): 010202.

[7] Cheng D Z , Qi H S. Controllability and observability of Boolean control networks[J]. Automatica, 2009, 45(7): 1659-1667.

[8] Liu H C, Liu Y, Li Y Y, et al. Observability of Boolean networks via STP and graph methods[J]. IET Control Theory & Applications, 2019, 13(7): 1031-1037.

[9] Cheng D Z, Qi H S. A linear representation of dynamics of Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(10): 2251-2258.

[10] Feng J E, Yao J, Cui P. Singular Boolean networks: semi-tensor product approach[J]. Science China Information Sciences, 2013, 56(11): 265-278.

[11] Yu Y Y, Feng J E, Pan J F, et al. Block decoupling of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(8): 3129-3140.

[12] Yang M, Li R, Chu T G. Controller design for disturbance decoupling of Boolean control networks[J]. Automatica, 2013, 49(1): 273-277.

[13] 邓磊, 巩蒙蒙, 朱培勇. 状态和输入受限的切换奇异布尔控制网络的最优控制(英文)[J]. 控制理论与应用, 2018, 35(3): 299-307.
(Deng L, Gong M M, Zhu P Y. Optimal control of switched singular Boolean control networks with state and input constraints[J]. Control Theory & Applications, 2018, 35(3): 299-307.)

[14] Fornasini E, Valcher M E. Optimal control of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(5): 1258-1270.

[15] 冯俊娥,贾淼. 混合值逻辑网络的集合稳定[J]. 控制与决策, 2019, 34(2): 269-273.
(Feng J E, Jia M. Set stability of mix-valued logical networks[J]. Control and Decision, 2019, 34(2): 269-273.)

[16] 李志强, 肖会敏. 布尔控制网络的输出稳定与镇定[J]. 控制理论与应用, 2017, 34(9): 1201-1207.
(Li Z Q, Xiao H M. Output stability and stabilization of Boolean control networks[J]. Control Theory & Applications, 2017, 34(9): 1201-1207.)

[17] Wang Y Z, Zhang C H, Liu Z B. A matrix approach to graph maximum stable set and coloring problems with application to multi-agent systems[J]. Automatica, 2012, 48(7): 1227-1236.

[18] Zhang L J, Zhang K Z. L_2 stability, H_∞ control of switched homogeneous nonlinear systems and their semi-tensor product of matrices representation[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2013, 23(6): 638-652.

[19] Laschov D, Margaliot M. Controllability of Boolean control networks via the Perron–Frobenius theory[J]. Automatica, 2012, 48(6): 1218-1223.

[20] Cheng D Z, Li C X, He F H. Observability of Boolean networks via set controllability approach[J]. Systems & Control Letters, 2018, 115: 22-25.

[21] Cheng D Z, Li C X, Zhang X, et al. Controllability of Boolean networks via mixed controls[J]. IEEE Control Systems Letters, 2018, 2(2): 254-259.

[22] Zhang Q L, Feng J E, Pan J F, et al. Set controllability for switched Boolean control networks[J]. Neurocomputing, 2019, 359: 476-482.

[23] 丁雪莹, 李海涛. 概率级联布尔网络的集镇定及其应用[J]. 控制理论与应用, 2019, 36(2): 271-278.
(Ding X Y, Li H T. Set stabilization of probabilistic cascading Boolean networks and its applications[J]. Control Theory & Applications, 2019, 36(2): 271-278.)

[24] Zong G D, Wang R H, Zheng W X, et al. Finite-time h_∞ control for discrete-time switched nonlinear systems with time delay[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2015, 25(6): 914-936.

[25] Ren H L, Zong G D, Li T S. Event-triggered finite-time control for networked switched linear systems with asynchronous switching[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018, 48(11): 1874-1884.

[26] Sun H B, Li Y K, Zong G D, et al. Disturbance attenuation and rejection for stochastic Markovian jump system with partially known transition probabilities[J]. Automatica, 2018, 89: 349-357.

[27] Dong X W, Hu G Q. Time-varying formation control for general linear multi-agent systems with switching directed topologies[J]. Automatica, 2016, 73: 47-55.

[28] Kou K L, Liu Y, Zhang D D, et al. Ensemble control of linear systems with parameter uncertainties[J]. International Journal of Control, 2016, 89(7): 1495-1508.

[29] Xiao Y F, Dougherty E R. The impact of function perturbations in Boolean networks[J]. Bioinformatics, 2007, 23(10): 1265-1273.

[30] Zhong J, Liu Y, Kou K L, et al. On the ensemble controllability of Boolean control networks using STP method[J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 358: 51-62.

[31] Tian H, Hou Y F. State feedback design for set stabilization of probabilistic Boolean control networks[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(8): 4358-4377.

作者简介

徐 勇 (1971−), 男, 教授, 博士, 从事非线性系统、复杂网络等研究, E-mail: xuyong@hebut.edu.cn;

苟志丽 (1995−), 女, 硕士生, 从事布尔网络的研究, E-mail: 945264556@qq.com;

王金环 (1980−), 女, 副教授, 博士, 从事多智能体系统控制、网络演化博弈等的研究, E-mail: wjhuan228@163.com;

姜凯辰 (1995−), 男, 硕士生, 从事演化博弈和系统控制的研究, E-mail: 649252901@qq.com.