

# 一类不确定非线性系统的自适应支持向量 回归建模与动态面控制

陈 强, 楼成林, 南余荣<sup>†</sup>, 陶 亮

(浙江工业大学 信息工程学院, 杭州 310013)

**摘 要:** 针对一类非线性严格反馈系统, 提出一种基于自适应支持向量回归的动态面控制方法. 首先, 将支持向量回归的核函数在核宽度以及支持向量估计值处进行一阶泰勒展开, 使其能够对核宽度和支持向量进行线性化表示; 然后, 利用支持向量回归对系统未知动态建模, 并基于建模结果设计虚拟控制器和控制器, 同时, 为提高建模精度, 在控制器设计中增加系统状态及其跟踪误差的预测变量, 并根据预测误差设计参数自适应律; 最后, 基于李雅普诺夫定理给出系统一致最终有界的分析. 仿真结果表明, 所提出的方法能有效减小建模误差并提高跟踪精度.

**关键词:** 支持向量回归; 严格反馈系统; 预测误差; 动态面控制; 参数自适应律

中图分类号: TP273

文献标志码: A

## Adaptive support vector regression modeling and dynamic surface control of a class of uncertain nonlinear systems

CHEN Qiang, LOU Cheng-lin, NAN Yu-rong<sup>†</sup>, TAO Liang

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310013, China)

**Abstract:** In this paper, a dynamic surface control scheme based on adaptive support vector regression(SVR) is proposed for a class of nonlinear strict-feedback systems. First of all, the kernel function of SVR is expended in a first-order Taylor series near the estimated kernel width and support vector, such that the widths and support vectors can be linearly expressed. Then, the unknown system dynamics is modeled by employing the developed SVR, and the virtual controllers and controllers are designed based on the modeling results. Meanwhile, in order to improve the modeling accuracy, prediction variables of system states and tracking errors are added in the controllers design, and the parametric adaptive laws are developed according to the prediction errors. Finally, the analysis of uniform ultimate boundedness of the system is given based on the Lyapunov theorem. Simulation results show that the proposed method can reduce the modeling error and improve the tracking accuracy effectively.

**Keywords:** support vector regression; strict-feedback system; prediction error; dynamic surface control; parametric adaptive law

## 0 引 言

随着现代控制理论、电机控制技术的飞速发展, 非线性系统的控制问题逐渐成为研究热点. 越来越多的非线性系统控制方法被提出, 如反步控制<sup>[1]</sup>、动态面控制<sup>[2]</sup>、滑模控制<sup>[3]</sup>、最优控制<sup>[4]</sup>、自适应控制<sup>[5]</sup>等. 其中, 反步控制设计中对每一步虚拟控制器进行反复求导, 使得控制器设计变得非常繁琐<sup>[1]</sup>. 针对这一问题, 文献[2]提出了动态面控制方法, 对虚拟

控制器进行一阶滤波, 有效避免了“微分项爆炸”问题. 此外, 实际系统中往往存在模型不确定的问题, 为解决系统模型不确定问题, 诸如模糊控制<sup>[6]</sup>、神经网络<sup>[7-8]</sup>等一系列人工智能方法被应用于控制器设计中. 然而, 因为神经网络是基于经验风险最小化的优化方法, 可能会陷入局部最优, 而且缺乏系统的方法来设计神经网络结构参数, 存在一定的局限性<sup>[9]</sup>.

相比之下, 支持向量回归将原优化问题转化为一

收稿日期: 2017-07-19; 修回日期: 2017-11-06.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61403343); 浙江省自然科学基金项目(Y17F030063); 中国博士后科学基金项目(2015M580521).

责任编辑: 陈虹.

作者简介: 陈强(1984—), 男, 副教授, 博士, 从事非线性伺服系统建模与控制的研究; 楼成林(1994—), 男, 硕士生, 从事伺服电机控制、支持向量机的研究.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: nyr@zjut.edu.com.

个二次规划问题,保证了全局解的存在性,而且其参数的设计也存在比较系统的方法<sup>[10-11]</sup>.文献[12]针对伺服系统提出了基于支持向量回归的摩擦建模方法,并结合反步法设计控制器,实现了摩擦的自适应补偿;文献[13]利用最小二乘支持向量机估计伺服系统中的未知非线性摩擦力部分,结合动态面技术设计控制器,取得了较为理想的结果;文献[14]利用基于多核最小二乘支持向量机建模的反同步方法控制不确定混沌系统,与普通最小二乘支持向量机相比降低了核函数选择不当对建模精度的影响;文献[15]中,支持向量回归(SVR)的方法被用于模型预测控制.以上几种方法都属于离线建模方法,可以有效减少计算量.但是,由于系统参数或者模型本身可能会随时间产生变化,而离线建模不能对这些变化作出相应的变化,从而导致建模误差和系统跟踪误差增大.因而在考虑某些较为复杂情况下的系统建模时,需要寻求一种在线自适应的方法.

文献[16]采用支持向量机的逼近能力估计李雅普诺夫函数的导数,通过将支持向量视为粒子并结合粒子滤波的方法来达到自适应的目的;文献[17]中的控制器对输入输出采取模糊化处理,控制决策由支持向量机完成;文献[18]采用基于增量的在线自适应SVR理论,对不符合KKT(Karush-Kuhn-Tucker)条件的数据进行重新学习,使支持向量机能够自适应调整;文献[19]设计了两个支持向量机分别逼近控制器和系统模型,利用模型反馈和跟踪误差自适应调节控制器的支持向量机参数,并根据模型估计输出和实际输出误差自适应调节系统的支持向量参数.但是,这些自适应方法仅局限于SVR的权值自适应或采用增量的方法添加样本,而忽略了核宽度和支持向量对SVR的影响,这往往使得自适应范围单一,效果有限.

本文将SVR核函数的核宽度、支持向量及权值都作为自适应参数.通过对核函数在核宽度、支持向量的估计值处泰勒展开使SVR函数线性化,且在动态面控制器设计时对状态及其误差进行预测,再利用预测的误差设计参数自适应律,并设计Lyapunov函数证明系统一致最终有界.最后通过仿真实验验证本文方法对系统跟踪精度和建模精度的改善.

## 1 预备知识

### 1.1 系统模型

考虑下面一类严格反馈系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i) + x_{i+1}, & i = 1, 2, \dots, n-1; \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n) + u; \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\bar{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T \in R^i$  为第  $i$  个等式的状态向量,且  $\bar{x}_n = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ ;  $f_i(\bar{x}_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 为未知平滑函数,且满足  $f_i(0, 0, \dots, 0) = 0$ ;  $y \in R$  为系统输出;  $u \in R$  为控制输入.

控制目标是:设计自适应控制器  $u$ ,使得系统的输出  $y$  能够快速稳定地跟踪给定的任意期望信号,且闭环系统一致最终有界.

### 1.2 $\varepsilon$ -支持向量回归

考虑训练集  $D = \{\mathbf{X}_k, y_k\}_{k=1}^N$ . 其中:  $\mathbf{X}_k$  为第  $k$  次输入数据,  $y_k$  为实际输出值,  $N$  为训练样本个数. 在  $\varepsilon$ -支持向量回归中,目标是找到函数  $F(\mathbf{X}_k)$ ,使所有的训练数据与目标值  $y_k$  之间误差小于最大容忍误差  $\varepsilon$ .  $\varepsilon$ -支持向量回归模型使用下面的训练公式训练样本:

$$F(\mathbf{X}_k) = \langle \mathbf{w}, \Phi(\mathbf{X}_k) \rangle + b. \quad (2)$$

其中:  $\Phi(\mathbf{X}_k)$  为样本到高维空间的映射,  $\mathbf{w}$  为该空间到输出空间的权值向量,  $b$  为模型的常数部分,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示内积.

$\varepsilon$ -支持向量回归模型基于Vapnik  $\varepsilon$ -不敏感函数逼近. 通过下式最小化经验风险:

$$\min_{\mathbf{w}, \Phi(\mathbf{X}_k), b} J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |y_k - F(\mathbf{X}_k)|_{\varepsilon}. \quad (3)$$

其中:  $|y_k - F(\mathbf{X}_k)|_{\varepsilon}$  为  $\varepsilon$ -约束模型,表示如下:

$$|y_k - F(\mathbf{X}_k)|_{\varepsilon} = \begin{cases} 0, & |y_k - F(\mathbf{X}_k)| \leq \varepsilon; \\ |y_k - F(\mathbf{X}_k)| - \varepsilon, & \text{else.} \end{cases} \quad (4)$$

优化问题(3)可以在原空间中表示为

$$\min_{\mathbf{w}, b, \xi, \xi^*} J_P = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{k=1}^N (\xi_k + \xi_k^*), \quad (5)$$

约束条件为

$$\begin{cases} y_i - \langle \mathbf{w}, \Phi(\mathbf{X}_k) \rangle - b \leq \varepsilon + \xi_k; \\ \langle \mathbf{w}, \Phi(\mathbf{X}_k) \rangle + b - y_k \leq \varepsilon + \xi_k^*; \\ \xi_k, \xi_k^* \geq 0, & k = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $\xi_k, \xi_k^*$  为松弛变量;  $C$  为模型复杂度与误差容忍度之间的平衡权值矩阵.

对于优化问题(5)的求解,可通过对偶形式的拉格朗日多项式将问题转化为

$$\begin{aligned} \min_{\eta, \eta^*} J_Q &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \kappa(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_j, \sigma_k) (\eta_k - \eta_k^*) + \\ &\varepsilon \sum_{k=1}^N (\eta_k + \eta_k^*) - \sum_{k=1}^N Y_k (\eta_k - \eta_k^*), \end{aligned} \quad (7)$$

约束条件为

$$0 \leq \eta_k, \eta_k^* \leq C, \sum_{k=1}^N (\eta_k - \eta_k^*) = 0, k = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

其中:  $\eta_k$  和  $\eta_k^*$  为拉格朗日乘子, 其最优值即为二次规划问题(7)的解, 对应  $(\eta_k - \eta_k^*)$  非零的数据点被称为支持向量,  $\kappa(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_j, \sigma_j) = \Phi(\mathbf{X}_k)^T \Phi(\mathbf{X}_j)$  为满足梅森条件的核函数. 本文选取高斯核函数, 即

$$\kappa(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_j, \sigma_k) = \exp\left(-\frac{(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_j)^T (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_j)}{\sigma_k^2}\right). \quad (9)$$

在二次规划问题(7)的解中, 由于支持向量机具有稀疏性, 只有少量的  $(\eta_k - \eta_k^*)$  非零, 设这些支持向量的个数为  $N_{sv}$ , 为了方便起见, 将非零的  $(\eta_k - \eta_k^*)$  记作  $\zeta_i (i = 1, 2, \dots, N_{sv})$ , 由这些支持向量决定了 SVR, 即

$$F(\mathbf{X}_k) = \sum_{i=1}^{N_{sv}} \zeta_i^* \kappa(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_i^*, \sigma_i^*) + b^*, \quad (10)$$

其中  $\zeta_i^*, b^*, \mathbf{X}_i^*, \sigma_i^*$  分别为理想的支持向量点的  $\zeta_i, b, \mathbf{X}_i, \sigma_i$  值.

本文利用支持向量回归对系统中的未知非线性进行建模估计, 因此非线性函数  $Z(\mathbf{X}_k)$  可以表示为

$$Z(\mathbf{X}_k) = \sum_{i=1}^{N_{sv}} \zeta_i^* \kappa(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_i^*, \sigma_i^*) + b^* + \varepsilon, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \quad (11)$$

其中  $\varepsilon_0$  为正常数.

式(11)可以写为向量形式

$$Z(\mathbf{X}_k) = \mathbf{W}^{*T} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{sv}^*, \boldsymbol{\sigma}_w^*) + \varepsilon. \quad (12)$$

其中

$$\mathbf{W}^* = [\zeta_1^*, \zeta_2^*, \dots, \zeta_{N_{sv}}^*, b^*]^T,$$

$$\mathbf{X}_{sv}^* = [\mathbf{X}_1^{*T}, \mathbf{X}_2^{*T}, \dots, \mathbf{X}_{N_{sv}}^{*T}]^T,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_w^* = [\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_{N_{sv}}^*]^T,$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{sv}^*, \boldsymbol{\sigma}_w^*) =$$

$$[\kappa(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_1^*, \sigma_1^*), \kappa(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_2^*, \sigma_2^*), \kappa(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_3^*, \sigma_3^*), \dots, \kappa(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{N_{sv}}^*, \sigma_{N_{sv}}^*), 1]^T.$$

### 1.3 自适应支持向量回归

在上一节的支持向量回归建模中, 需获得  $\mathbf{W}^*, \mathbf{X}_{sv}^*, \boldsymbol{\sigma}_w^*$  等多个理想值, 然而在实际训练中, 理想值往往难以获取, 因此定义  $\hat{\mathbf{W}}, \hat{\mathbf{X}}_{sv}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_w$  为估计值来分别估计  $\mathbf{W}^*, \mathbf{X}_{sv}^*, \boldsymbol{\sigma}_w^*$ , 再定义  $\tilde{\mathbf{X}}_{sv} = \mathbf{X}_{sv}^* - \hat{\mathbf{X}}_{sv}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_w = \boldsymbol{\sigma}_w^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_w$  为实际值与估计值间的误差, 其中  $\hat{\mathbf{W}}, \hat{\mathbf{X}}_{sv}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_w$  三个参数的自适应律将会在下一节中给出.

为便于设计支持向量回归的参数自适应律, 将  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{sv}^*, \boldsymbol{\sigma}_w^*)$  在  $(\hat{\mathbf{X}}_{sv}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_w)$  处进行一阶泰勒展开, 使其线性化, 即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{sv}^*, \boldsymbol{\sigma}_w^*) &= \\ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}_k, \hat{\mathbf{X}}_{sv}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_w) &+ \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{sv}^*, \boldsymbol{\sigma}_w^*)}{\partial \hat{\mathbf{X}}_{sv}} (\mathbf{X}_{sv}^* - \hat{\mathbf{X}}_{sv}) + \\ \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{sv}^*, \boldsymbol{\sigma}_w^*)}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_w} (\boldsymbol{\sigma}_w^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_w) &+ \vartheta(\cdot), \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $\vartheta(\cdot)$  表示高阶项.

利用式(13)及  $\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{X}}_{sv}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_w$  的定义, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{*T} \boldsymbol{\varphi}^* &= \tilde{\mathbf{W}}^T \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \tilde{\mathbf{W}}^T \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \tilde{\mathbf{W}}^T \boldsymbol{\varphi}'_{\hat{\mathbf{X}}_{sv}} \tilde{\mathbf{X}}_{sv} + \\ \tilde{\mathbf{W}}^T \boldsymbol{\varphi}'_{\hat{\mathbf{X}}_{sv}} \tilde{\mathbf{X}}_{sv} &+ \tilde{\mathbf{W}}^T \boldsymbol{\varphi}'_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_w} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_w + \\ \tilde{\mathbf{W}}^T \boldsymbol{\varphi}'_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_w} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_w &+ \mathbf{W}^{*T} \vartheta(\cdot). \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\boldsymbol{\varphi}^* = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{sv}^*, \boldsymbol{\sigma}_w^*), \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}_k, \hat{\mathbf{X}}_{sv}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_w),$$

$$\boldsymbol{\varphi}'_{\hat{\mathbf{X}}_{sv}} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^*}{\partial \mathbf{X}_{sv}^*} \Big|_{\hat{\mathbf{X}}_{sv}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_w}, \boldsymbol{\varphi}'_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_w} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}_w^*} \Big|_{\hat{\mathbf{X}}_{sv}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_w}.$$

具体表达形式如下:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{sv}^*, \boldsymbol{\sigma}_w^*)}{\partial \mathbf{X}_{sv}^*} \Big|_{\hat{\mathbf{X}}_{sv}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_w} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_1^*} \kappa(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_1^*, \sigma_1^*) \Big|_{\hat{\mathbf{X}}_1, \hat{\sigma}_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_{svN}^*} \kappa(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_1^*, \sigma_1^*) \Big|_{\hat{\mathbf{X}}_1, \hat{\sigma}_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_1^*} \kappa(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_N^*, \sigma_N^*) \Big|_{\hat{\mathbf{X}}_N, \hat{\sigma}_N} & \cdots & \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_{svN}^*} \kappa(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_N^*, \sigma_N^*) \Big|_{\hat{\mathbf{X}}_N, \hat{\sigma}_N} \\ \mathbf{0}_{1 \times svN} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times svN} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_{sv}^*, \boldsymbol{\sigma}_w^*)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_w^*} \Big|_{\hat{\mathbf{X}}_{sv}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_w} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \kappa(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_1^*, \sigma_1^*) \Big|_{\hat{\mathbf{X}}_1, \hat{\sigma}_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial \sigma_{wN}} \kappa(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_1^*, \sigma_1^*) \Big|_{\hat{\mathbf{X}}_1, \hat{\sigma}_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \kappa(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_N^*, \sigma_N^*) \Big|_{\hat{\mathbf{X}}_N, \hat{\sigma}_N} & \cdots & \frac{\partial}{\partial \sigma_N} \kappa(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_N^*, \sigma_N^*) \Big|_{\hat{\mathbf{X}}_N, \hat{\sigma}_N} \\ \mathbf{0}_{1 \times N} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times N} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

其中

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_{sv}^*} \kappa(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_i^*, \sigma_j^*) \right|_{\hat{\mathbf{x}}_j, \hat{\sigma}_j} = \begin{cases} \exp\left(-\frac{(\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_i)^\top (\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_i)}{\hat{\sigma}_j^2}\right) \frac{2}{\hat{\sigma}_j^2} (\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_j)^\top, & i = j; \\ \mathbf{0}_{1 \times svN}, & i \neq j; \end{cases} \\ \left. \frac{\partial}{\partial \sigma_w^*} \kappa(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_i^*, \sigma_j^*) \right|_{\hat{\mathbf{x}}_j, \hat{\sigma}_j} = \begin{cases} \exp\left(-\frac{(\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_i)^\top (\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_i)}{\hat{\sigma}_j^2}\right) \frac{2}{\hat{\sigma}_j^3} (\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_i)^\top (\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_i), & i = j; \\ \mathbf{0}_{1 \times N}, & i \neq j. \end{cases} \end{cases}$$

## 2 动态面控制器设计

**Step 1** 由系统(1)可得

$$\dot{x}_1 = f_1(\bar{x}_1) + x_2. \quad (17)$$

定义跟踪误差

$$s_1 = x_1 - y_r. \quad (18)$$

对式(18)求导并结合(17),可得

$$\dot{s}_1 = f_1(\bar{x}_1) + x_2 - \dot{y}_r. \quad (19)$$

利用式(12)估计 $f_1(\bar{x}_1)$ ,则有

$$f_1(\bar{x}_1) = \mathbf{W}_1^{*T} \boldsymbol{\varphi}_1^* + \varepsilon_{a1}. \quad (20)$$

其中: $\boldsymbol{\varphi}_1^* = \boldsymbol{\varphi}(\bar{x}_1, \mathbf{X}_{sv,1}^*, \boldsymbol{\sigma}_{w,1}^*)$ ,  $\bar{x}_1 = x_1$ ;  $\mathbf{W}_1^*$ ,  $\mathbf{X}_{sv,1}^*$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{w,1}^*$  分别为  $\mathbf{W}_1^* = [\zeta_{11}^*, \dots, \zeta_{Nsv1}^*, b_1^*]^\top$ ,  $\mathbf{X}_{sv,1}^* = [\mathbf{X}_{11}^{*T}, \mathbf{X}_{21}^{*T}, \dots, \mathbf{X}_{Nsv1}^{*T}]^\top$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{w,1}^* = [\sigma_{11}^*, \sigma_{21}^*, \dots, \sigma_{Nsv1}^*]^\top$ ;  $\varepsilon_{a1}$  为容忍误差.

设计虚拟控制器

$$x_2^d = -\lambda_1 s_1 - \hat{\mathbf{W}}_1^\top \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 + \dot{y}_r. \quad (21)$$

其中: $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 = \boldsymbol{\varphi}(\bar{x}_1, \hat{\mathbf{X}}_{sv,1}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{w,1})$ ;  $\lambda_1$  为正常数;  $\hat{\mathbf{W}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{X}}_{sv,1}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{w,1}$  分别为  $\mathbf{W}_1^*$ ,  $\mathbf{X}_{sv,1}^*$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{w,1}^*$  的估计值.

引入新的变量 $x_2^c$ ,令 $x_2^d$ 通过时间常数 $\tau_2 > 0$ 的一阶低通滤波得到 $x_2^c$ ,即

$$\tau_2 \dot{x}_2^c + x_2^c = x_2^d, \quad x_2^c(0) = x_2^d(0). \quad (22)$$

将式(18)~(20)代入(17),可得

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= -\lambda_1 s_1 + \mathbf{W}_1^{*T} \boldsymbol{\varphi}_1^* - \hat{\mathbf{W}}_1^\top \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 + \varepsilon_{a1} + \\ & s_2 + (x_2^c - x_2^d), \end{aligned} \quad (23)$$

其中 $s_2$ 的具体表达式在下一步中设计.

设计跟踪误差 $s_1$ 的预测值为 $\hat{s}_1$ ,则有

$$\dot{\hat{s}}_1 = -\lambda_1 \hat{s}_1 + \hat{s}_2 + (x_2^c - x_2^d), \quad \hat{s}_1(0) = 0. \quad (24)$$

其中: $\hat{s}_2$ 为跟踪误差 $s_2$ 的预测值,其具体表达式在下一步中设计.

定义 $v_1$ 为跟踪误差的预测误差

$$v_1 = s_1 - \hat{s}_1, \quad (25)$$

则由式(21)、(24)、(25)可得

$$\dot{v}_1 = -\lambda_1 v_1 + \mathbf{W}_1^{*T} \boldsymbol{\varphi}_1^* - \hat{\mathbf{W}}_1^\top \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 + \varepsilon_{a1} + v_2. \quad (26)$$

定义 $\hat{x}_1$ 为 $x_1$ 的预测值,对比式(17)建立以下动态方程:

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{\mathbf{W}}_1^\top \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 + x_2 + \beta_{z1} z_{1sv}, \quad \hat{x}_1(0) = x_1(0). \quad (27)$$

其中: $\beta_{z1} > 0$ 为正常数, $z_{1sv} = x_1 - \hat{x}_1$ 为状态预测误差.

利用式(17)、(18)、(27)可得

$$\dot{z}_{1sv} = \mathbf{W}_1^{*T} \boldsymbol{\varphi}_1^* - \hat{\mathbf{W}}_1^\top \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 + \varepsilon_{a1} - \beta_{z1} z_{1sv}. \quad (28)$$

参数 $\hat{\mathbf{W}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{X}}_{sv,1}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{w,1}$ 的自适应律设计为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{W}}}_1 &= \gamma_1 (v_1 + \gamma_{z1} z_{1sv}) \hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 - \gamma_1 \kappa_1 \hat{\mathbf{W}}_1, \\ \dot{\hat{\mathbf{X}}}_{sv,1} &= \gamma_{sv1} (v_1 + \gamma_{z1} z_{1sv}) \boldsymbol{\varphi}_{\hat{\mathbf{X}}_{sv,1}}^\top \hat{\mathbf{W}}_1 - \\ & \gamma_{sv1} \kappa_{sv1} \hat{\mathbf{X}}_{sv,1}, \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}_{w,1} &= \gamma_{\sigma 1} (v_1 + \gamma_{z1} z_{1sv}) \boldsymbol{\varphi}_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{w,1}}^\top \hat{\mathbf{W}}_1 - \gamma_{\sigma 1} \kappa_{\sigma 1} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{w,1}. \end{aligned} \quad (29)$$

其中: $\gamma_1, \kappa_1, \gamma_{sv1}, \kappa_{sv1}, \gamma_{\sigma 1}, \kappa_{\sigma 1}, \gamma_{z1}$ 为正常数;且有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}'_{\hat{\mathbf{X}}_{sv,1}} &= \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\bar{x}_1, \mathbf{X}_{sv,1}^*, \boldsymbol{\sigma}_{w,1}^*)}{\partial \mathbf{X}_{sv,1}^*} \Big|_{\hat{\mathbf{X}}_{sv,1}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{w,1}}, \\ \boldsymbol{\varphi}'_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{w,1}} &= \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\bar{x}_1, \mathbf{X}_{sv,1}^*, \boldsymbol{\sigma}_{w,1}^*)}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{w,1}^*} \Big|_{\hat{\mathbf{X}}_{sv,1}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{w,1}}. \end{aligned}$$

**Step i** 由系统(1)可得

$$\dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i) + x_{i+1}. \quad (30)$$

定义 $s_i = x_i - x_i^c$ ,结合式(30)可以得到

$$\dot{s}_i = f_i(\bar{x}_i) + x_{i+1} - \dot{x}_i^c. \quad (31)$$

利用式(12)估计 $f_i(\bar{x}_i)$ ,则有

$$f_i(\bar{x}_i) = \mathbf{W}_i^{*T} \boldsymbol{\varphi}_i^* + \varepsilon_{ai}. \quad (32)$$

其中: $\boldsymbol{\varphi}_i^* = \boldsymbol{\varphi}(\bar{x}_i, \mathbf{X}_{sv,i}^*, \boldsymbol{\sigma}_{w,i}^*)$ ,  $\bar{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^\top$ ;  $\mathbf{W}_i^*$ ,  $\mathbf{X}_{sv,i}^*$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{w,i}^*$  分别为  $\mathbf{W}_i^* = [\zeta_{1i}^*, \dots, \zeta_{Nsvi}^*, b_i^*]^\top$ ,  $\mathbf{X}_{sv,i}^* = [\mathbf{X}_{1i}^{*T}, \mathbf{X}_{2i}^{*T}, \dots, \mathbf{X}_{Nsvi}^{*T}]^\top$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{w,i}^* = [\sigma_{1i}^*, \sigma_{2i}^*, \dots, \sigma_{Nsvi}^*]^\top$ ;  $\varepsilon_{ai}$ 为容忍误差.

设计虚拟控制器

$$\dot{x}_{i+1}^d = -\lambda_i s_i - \hat{W}_i^T \hat{\varphi}_i - s_{i-1} + \dot{x}_i^c. \quad (33)$$

其中:  $\hat{\varphi}_i = \varphi(\bar{x}_i, \hat{X}_{sv,i}, \hat{\sigma}_{w,i})$ ;  $\lambda_i$  为正常数;  $\hat{W}_i$ ,  $\hat{X}_{sv,i}$ ,  $\hat{\sigma}_{w,i}$  分别为  $W_i^*$ ,  $X_{sv,i}^*$ ,  $\sigma_{w,i}^*$  的估计值.

引入新的变量  $x_{i+1}^c$ , 令  $x_{i+1}^d$  通过时间常数  $\tau_{i+1} > 0$  的一阶低通滤波得到  $x_{i+1}^c$ , 即

$$\tau_{i+1} \dot{x}_{i+1}^c + x_{i+1}^c = x_{i+1}^d, \quad x_{i+1}^c(0) = x_{i+1}^d(0). \quad (34)$$

将式(32)~(34)代入(31), 可得

$$\begin{aligned} \dot{s}_i = & -\lambda_i s_i + W_i^{*T} \varphi_i^* - \hat{W}_i^T \hat{\varphi}_i + \varepsilon_{ai} + s_{i+1} - \\ & s_{i-1} + (x_{i+1}^c - x_{i+1}^d). \end{aligned} \quad (35)$$

设计跟踪误差  $s_i$  的预测值为  $\hat{s}_i$ , 则有

$$\dot{\hat{s}}_i = -\lambda_i \hat{s}_i + \hat{s}_{i+1} - \hat{s}_{i-1} + (x_{i+1}^c - x_{i+1}^d), \quad s_i(0) = 0. \quad (36)$$

与 Step 1 相似, 设计跟踪误差  $s_i$  的预测误差  $v_i$ , 即

$$v_i = s_i - \hat{s}_i, \quad (37)$$

则由式(35)~(37)可得

$$\dot{v}_i = -\lambda_i v_i + W_i^{*T} \varphi_i^* - \hat{W}_i^T \hat{\varphi}_i + \varepsilon_{ai} + v_{i+1} - v_{i-1}. \quad (38)$$

定义  $\hat{x}_i$  为  $x_i$  的预测值, 对比式(30)建立以下动态方程:

$$\dot{\hat{x}}_i = \hat{W}_i^T \hat{\varphi}_i + x_{i+1} + \beta_{zi} z_{isv}, \quad \hat{x}_i(0) = x_i(0). \quad (39)$$

其中:  $\beta_{zi} > 0$  为正常数,  $z_{isv} = x_i - \hat{x}_i$  为状态预测误差.

利用式(30)、(32)、(39)可得

$$\dot{z}_{isv} = W_i^{*T} \varphi_i^* - \hat{W}_i^T \hat{\varphi}_i + \varepsilon_{ai} - \beta_{zi} z_{isv}. \quad (40)$$

参数  $\hat{W}_i$ ,  $\hat{X}_{sv,i}$ ,  $\hat{\sigma}_{w,i}$  的自适应律设计为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{W}}_i &= \gamma_i (v_i + \gamma_{zi} z_{isv}) \hat{\varphi}_i - \gamma_i \kappa_i \hat{W}_i, \\ \dot{\hat{X}}_{sv,i} &= \gamma_{svi} (v_i + \gamma_{zi} z_{isv}) \varphi_{\hat{X}_{sv,i}}^{\prime T} \hat{W}_i - \gamma_{svi} \kappa_{svi} \hat{X}_{sv,i}, \\ \dot{\hat{\sigma}}_{w,i} &= \gamma_{\sigma i} (v_i + \gamma_{zi} z_{isv}) \varphi_{\hat{\sigma}_{w,i}}^{\prime T} \hat{W}_i - \gamma_{\sigma i} \kappa_{\sigma i} \hat{\sigma}_{w,i}. \end{aligned} \quad (41)$$

其中:  $\varphi'_{\hat{X}_{sv,i}} = \frac{\partial \varphi(\bar{x}_i, X_{sv,i}^*, \sigma_{w,i}^*)}{\partial X_{sv,i}^*} \Big|_{\hat{X}_{sv,i}, \hat{\sigma}_{w,i}}$ ,  $\varphi'_{\hat{\sigma}_{w,i}} = \frac{\partial \varphi(\bar{x}_i, X_{sv,i}^*, \sigma_{w,i}^*)}{\partial \sigma_{w,i}^*} \Big|_{\hat{X}_{sv,i}, \hat{\sigma}_{w,i}}$ ;  $\gamma_i, \kappa_i, \gamma_{svi}, \kappa_{svi}, \gamma_{\sigma i}, \kappa_{\sigma i}, \gamma_{zi}$  为正常数.

**Step n** 由系统(1)可得

$$\dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n) + u. \quad (42)$$

定义  $s_n = x_n - x_n^c$ , 则  $s_n$  的导数可以表示为

$$\dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n) + u. \quad (43)$$

利用式(12)估计  $f_n(\bar{x}_n)$  部分, 即

$$\dot{s}_n = f_n(\bar{x}_n) + u - \dot{x}_n^c. \quad (44)$$

其中:  $\varphi_n^* = \varphi(\bar{x}_n, X_{sv,n}^*, \sigma_{w,n}^*)$ ,  $\bar{x}_n = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ;  $W_n^*$ ,  $X_{sv,n}^*$ ,  $\sigma_{w,n}^*$  分别为  $W_n^* = [\zeta_{1n}^*, \dots, \zeta_{N_{svn}}^*, b_n^*]^T$ ,  $X_{sv,n}^* = [X_{1n}^{*T}, X_{2n}^{*T}, \dots, X_{N_{svn}}^{*T}]^T$ ,  $\sigma_{w,n}^* = [\sigma_{1n}^*, \sigma_{2n}^*, \dots, \sigma_{N_{svn}}^*]^T$ ;  $\varepsilon_{an}$  为容忍误差.

设计控制律  $u$  为

$$u = -\lambda_n s_n - \hat{W}_n^T \hat{\varphi}_n - s_{n-1} + \dot{x}_n^c. \quad (45)$$

其中:  $\hat{\varphi}_n = \varphi(\bar{x}_n, \hat{X}_{sv,n}, \hat{\sigma}_{w,n})$ ;  $\lambda_n$  为正常数;  $\hat{W}_n$ ,  $\hat{X}_{sv,n}$ ,  $\hat{\sigma}_{w,n}$  分别为  $W_n^*$ ,  $X_{sv,n}^*$ ,  $\sigma_{w,n}^*$  的估计值.

将式(44)、(45)代入(43), 可得

$$\dot{s}_n = -\lambda_n s_n + W_n^{*T} \varphi_n^* - \hat{W}_n^T \hat{\varphi}_n + \varepsilon_{an} - s_{n-1}. \quad (46)$$

设计跟踪误差  $s_n$  的预测值为  $\hat{s}_n$ , 则有

$$\dot{\hat{s}}_n = -\lambda_n \hat{s}_n - \hat{s}_{n-1}, \quad \hat{s}_n(0) = 0. \quad (47)$$

与 Step 1 相似, 设计跟踪误差  $s_n$  的预测误差  $\hat{s}_n$ , 即

$$\dot{\hat{s}}_n = -\lambda_n \hat{s}_n - \hat{s}_{n-1}, \quad \hat{s}_n(0) = 0. \quad (48)$$

由式(46)~(48)可得

$$\dot{v}_n = -\lambda_n v_n + W_n^{*T} \varphi_n^* - \hat{W}_n^T \hat{\varphi}_n + \varepsilon_{an} - v_{n-1}. \quad (49)$$

定义  $\hat{x}_n$  为  $x_n$  的预测值, 对比式(42)建立以下动态方程:

$$\dot{\hat{x}}_n = \hat{W}_n^T \hat{\varphi}_n + u + \beta_{zn} z_{nsv}, \quad \hat{x}_n(0) = x_n(0). \quad (50)$$

其中:  $z_{nsv}$  为状态预测误差,  $\beta_{zn} > 0$  为正常数,  $z_{nsv} = x_n - \hat{x}_n$ .

利用式(42)、(44)、(50)可得

$$\dot{z}_{nsv} = W_n^{*T} \varphi_n^* - \hat{W}_n^T \hat{\varphi}_n + \varepsilon_{an} - \gamma_{zn} z_{nsv}. \quad (51)$$

参数  $\hat{W}_n$ ,  $\hat{X}_{sv,n}$ ,  $\hat{\sigma}_{w,n}$  的自适应律设计为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{W}}_n &= \gamma_n (v_n + \gamma_{zn} z_{nsv}) \hat{\varphi}_n - \gamma_n \kappa_n \hat{W}_n, \\ \dot{\hat{X}}_{sv,n} &= \gamma_{svn} (v_n + \gamma_{zn} z_{nsv}) \varphi_{\hat{X}_{sv,n}}^{\prime T} \hat{W}_n - \\ & \quad \gamma_{svn} \kappa_{svn} \hat{X}_{sv,n}, \\ \dot{\hat{\sigma}}_{w,n} &= \gamma_{\sigma n} (v_n + \gamma_{zn} z_{nsv}) \varphi_{\hat{\sigma}_{w,n}}^{\prime T} \hat{W}_n - \gamma_{\sigma n} \kappa_{\sigma n} \hat{\sigma}_{w,n}, \end{aligned} \quad (52)$$

其中  $\gamma_n, \kappa_n, \gamma_{svn}, \kappa_{svn}, \gamma_{\sigma n}, \kappa_{\sigma n}, \gamma_{zn}$  为正常数.

**注1** 对比式(30)和(39)不难看出, 若状态量  $x_i$  的预测误差  $z_{isv}$  趋于0, 则能够保证支持向量回归  $\hat{W}_i^T \hat{\varphi}_i$  逼近系统未知部分  $f_i(\bar{x}_i)$ . 同理, 对比式(35)和(36)可以看到, 若跟踪误差  $s_i$  的预测误差  $v_i$  趋于0, 则也可以保证支持向量回归建模误差趋于0.

### 3 稳定性分析

**引理1** 对于  $i = 1, 2, \dots, n$ , 有  $\tilde{W}_i, \tilde{X}_{sv,i}, \tilde{\sigma}_{w,i} \in L_\infty$ , 则  $\tilde{W}_i, \tilde{X}_{sv,i}, \tilde{\sigma}_{w,i}$  在紧集内有界. 在理想值  $W_i^*, X_{sv,i}^*, \sigma_{w,i}^*$  有界时, 根据高斯径向基的性质,  $\varsigma_i = \tilde{X}_i^T \varphi_i'^T \tilde{W}_i + \tilde{\sigma}_{w,i}^T \varphi_i'^T \tilde{W}_i + \vartheta^T(\cdot) W_i^*$  也有界.

**引理2** 在已定义的系统(21)、(35)、(46)下, 对  $i = 1, 2, \dots, n$ , 有  $|\hat{s}_i| \leq \hat{s}_{iM}$ , 其中  $\hat{s}_{iM} \geq 0$  为正常数.

**证明** 设计

$$V_s = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \hat{s}_i^2. \quad (53)$$

将式(26)、(34)、(47)代入(53), 则有

$$\dot{V}_s = \sum_{i=1}^n \hat{s}_i \dot{\hat{s}}_i = - \sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{s}_i^2 + \sum_{i=2}^n (x_i^c - x_i^d), \quad (54)$$

其中  $x_i^c - x_i^d$  部分是有界的(具体证明过程见文献[20]中引理3). 将  $x_i^c - x_i^d$  的界记为  $\rho_i$ , 则有

$$|x_i^c - x_i^d| \leq \rho_i, \quad (55)$$

其中  $\rho_i \geq 0$  为正常数.

将式(55)代入(53), 可得

$$\dot{V}_s \leq -\lambda_i \hat{s}_i^2 + \sum_{i=2}^n \rho_i, \quad (56)$$

则不等式(56)可以解得

$$0 \leq V_s(t) \leq -\frac{\sum_{i=2}^n \rho_i}{\min_i \lambda_i} + \left( V(0) - \frac{\sum_{i=2}^n \rho_i}{\min_i \lambda_i} \right) e^{-\min_i \lambda_i t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (57)$$

由式(57)可得  $V_s$  有界, 即  $\hat{s}_i$  有界, 记作  $|\hat{s}_i| \leq \hat{s}_{iM}$ ,  $\hat{s}_{iM} \geq 0$  为正常数.  $\square$

**定理1** 考虑非线性系统(1), 控制律(45), 自适应律(29)、(41)、(52), 则包括  $s_i, v_i, z_{isv}, \tilde{W}_i, \tilde{X}_{sv,i}, \tilde{\sigma}_{w,i}$  在内的闭环信号一致最终有界.

**证明** 定义下面的Lyapunov函数:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (v_i^2 + \gamma_{zi} z_{isv}^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\gamma_i} \tilde{W}_i^T \tilde{W}_i + \frac{1}{\gamma_{svi}} \tilde{X}_{sv,i}^T \tilde{X}_{sv,i} + \frac{1}{\gamma_{\sigma i}} \tilde{\sigma}_{w,i}^T \tilde{\sigma}_{w,i} \right). \quad (58)$$

假设初始条件满足  $V(0) < \rho$ ,  $\rho$  为正常数, 则上式  $V$  的导数可以写为

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^n (v_i \dot{v}_i + \gamma_{zi} z_{isv} \dot{z}_{isv}) + \\ & \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\gamma_i} \tilde{W}_i^T \dot{\tilde{W}}_i + \frac{1}{\gamma_{svi}} \tilde{X}_{sv,i}^T \dot{\tilde{X}}_{sv,i} + \right. \\ & \left. \frac{1}{\gamma_{\sigma i}} \tilde{\sigma}_{w,i}^T \dot{\tilde{\sigma}}_{w,i} \right). \end{aligned} \quad (59)$$

将式(26)、(38)、(49)和式(28)、(40)、(51)代入(59), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^n [(v_i + \gamma_{zi} z_{isv})(W_i^{*T} \varphi_i^* - \hat{W}_i^T \varphi_i + \varepsilon_{ai}) - \\ & k_i v_i^2 - \gamma_{zi}^2 z_{isv}^2] + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{\gamma_i} \tilde{W}_i^T \dot{\tilde{W}}_i + \right. \\ & \left. \frac{1}{\gamma_{svi}} \tilde{X}_{sv,i}^T \dot{\tilde{X}}_{sv,i} + \frac{1}{\gamma_{\sigma i}} \tilde{\sigma}_{w,i}^T \dot{\tilde{\sigma}}_{w,i} \right]. \end{aligned} \quad (60)$$

由引理1可知, 式(14)可以改写为

$$\begin{aligned} W_i^{*T} \varphi_i^* - \hat{W}_i^T \varphi_i = & \\ (W_i^{*T} \varphi_i^* - \hat{W}_i^T \varphi_i)^T = & \\ \tilde{W}_i^T \varphi_i + \tilde{X}_{sv,i}^T \varphi_i'^T \tilde{W}_i + \tilde{\sigma}_{w,i}^T \varphi_i'^T \tilde{W}_i + \varsigma_i, & \\ i = 1, 2, \dots, n. & \end{aligned} \quad (61)$$

将式(61)代入(60)并整理, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^n [-\lambda_i v_i^2 - \gamma_{zi}^2 z_{isv}^2] + \\ & \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{1}{\gamma_i} \tilde{W}_i^T \dot{\tilde{W}}_i + \tilde{W}_i^T (v_i + \gamma_{zi} z_{isv}) \varphi_i \right) + \right. \\ & \left( \frac{1}{\gamma_{svi}} \tilde{X}_{sv,i}^T \dot{\tilde{X}}_{sv,i} + \tilde{X}_{sv,i}^T (v_i + \right. \\ & \left. \gamma_{zi} z_{isv}) \varphi_i'^T \tilde{W}_i \right) + \\ & \left. \left( \frac{1}{\gamma_{\sigma i}} \tilde{\sigma}_{w,i}^T \dot{\tilde{\sigma}}_{w,i} + \tilde{\sigma}_{w,i}^T (v_i + \gamma_{zi} z_{isv}) \varphi_i'^T \tilde{W}_i \right) + \right. \\ & \left. (v_i + \gamma_{zi} z_{isv})(\varsigma_i + \varepsilon_i) \right]. \end{aligned} \quad (62)$$

将式(29)、(41)、(52)代入(62), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^n [-\lambda_i v_i^2 - \gamma_{zi}^2 z_{isv}^2] + \\ & \sum_{i=1}^n [k_i \tilde{W}_i^T \dot{\tilde{W}}_i + \kappa_{svi} \tilde{X}_{sv,i}^T \dot{\tilde{X}}_{sv,i} + \\ & \kappa_{\sigma i} \tilde{\sigma}_{w,i}^T \dot{\tilde{\sigma}}_{w,i} + (v_i + \gamma_{zi} z_{isv})(\varsigma_i + \varepsilon_i)]. \end{aligned} \quad (63)$$

利用  $ab \leq |a||b| \leq a^2/2 + b^2/2$  可得

$$\tilde{W}_i^T \dot{\tilde{W}}_i \leq -\frac{1}{2} \|\dot{\tilde{W}}_i\|^2 + \frac{1}{2} \|W_{Mi}\|^2, \quad (64)$$

$$\tilde{X}_{sv,i}^T \dot{\tilde{X}}_{sv,i} \leq -\frac{1}{2} \|\dot{\tilde{X}}_{sv,i}\|^2 + \frac{1}{2} \|X_{Miv}\|^2, \quad (65)$$

$$\tilde{\sigma}_{w,i}^T \dot{\tilde{\sigma}}_{w,i} \leq -\frac{1}{2} \|\dot{\tilde{\sigma}}_{w,i}\|^2 + \frac{1}{2} \|\sigma_{Miw}\|^2. \quad (66)$$

其中:  $\|W_i^*\| \leq W_{Mi}$ ;  $\|X_{sv,i}^*\| \leq X_{Miv}$ ;  $\|\sigma_{w,i}^*\| \leq \sigma_{Miw}$ ;  $W_{Mi}, X_{Miv}, \sigma_{Miw}$  为正常数.

将式(64)~(66)代入(63), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \sum_{i=1}^n \left[ \left( \lambda_i - \frac{1}{2} \right) v_i^2 - \frac{1}{4} (v_i - \gamma_{zi} z_{isv})^2 + (\varsigma_i + \right. \\ & \left. \varepsilon_i)^2 - \frac{1}{2} \gamma_{zi}^2 z_{isv}^2 - \frac{1}{2} (\kappa_i \|\tilde{W}_i\|^2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \kappa_{svi} \|\tilde{\mathbf{X}}_{sv,i}\|^2 + \kappa_{\sigma i} \|\tilde{\sigma}_{w,i}\|^2 + \\ & \kappa_i \|\mathbf{W}_{Mi}\|^2 + \kappa_{svi} \|\mathbf{X}_{Miso}\|^2 + \kappa_{\sigma i} \|\sigma_{Miw}\|^2 \end{aligned} \quad (67)$$

将式(67)整理为

$$\dot{V} \leq -\alpha V + \beta. \quad (68)$$

其中:  $0 \leq \alpha \leq \min \left\{ \left| \lambda_i - \frac{1}{2} \right|, \frac{1}{2} \kappa_i, \frac{1}{2} \kappa_{svi}, \frac{1}{2} \kappa_{\sigma i} \right\}, \beta = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{2} (\kappa_i \|\mathbf{W}_{Mi}\|^2 + \kappa_{svi} \|\mathbf{X}_{Miso}\|^2 + \kappa_{\sigma i} \|\sigma_{Miw}\|^2) + (\varepsilon_i + \varsigma_i)^2 \right]$ , 即

$$0 \leq V(t) \leq \frac{\beta}{\alpha} + \left( V(0) - \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{-\alpha t}, \forall t \geq 0. \quad (69)$$

由式(69)可知,  $V(t)$  收敛于有限的界内. 因此式(58)闭环信号  $v_i, z_{isv}, \tilde{\mathbf{W}}_i, \tilde{\mathbf{X}}_{sv,i}, \tilde{\sigma}_{w,i} (i = 1, 2, \dots, n)$  一致最终有界. 根据  $v_i$  的定义和引理2, 可得  $s_i$  也有界.  $\square$

### 4 仿真结果

为了验证所提方法的可行性及优越性, 本文分别对以下3种方法进行仿真和对比:

1) 自适应支持向量回归状态预测动态面控制.

控制律设计为(45), 即

$$u = -\lambda_n s_n - \hat{\mathbf{W}}_n^T \hat{\varphi}_n - s_{n-1} + \dot{x}_n^c. \quad (70)$$

SVR参数自适应律为(29)、(41)、(52), 即

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{W}}}_i &= \gamma_i (v_i + \gamma_{zi} z_{isv}) \hat{\varphi}_i - \gamma_i \kappa_i \hat{\mathbf{W}}_i, \\ \dot{\hat{\mathbf{X}}}_{sv,i} &= \gamma_{svi} (v_i + \gamma_{zi} z_{isv}) \varphi_{\hat{\mathbf{X}}_{sv,i}}^T \hat{\mathbf{W}}_i - \gamma_{svi} \kappa_{svi} \hat{\mathbf{X}}_{sv,i}, \\ \dot{\hat{\sigma}}_{w,i} &= \gamma_{\sigma i} (v_i + \gamma_{zi} z_{isv}) \varphi_{\hat{\sigma}_{w,i}}^T \hat{\mathbf{W}}_i - \gamma_{\sigma i} \kappa_{\sigma i} \hat{\sigma}_{w,i}, \\ & i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (71)$$

2) 普通自适应支持向量回归动态面控制.

控制律设计与1)相同, 即

$$u = -\lambda_n s_n - \hat{\mathbf{W}}_n^T \hat{\varphi}_n - s_{n-1} + \dot{x}_n^c. \quad (72)$$

SVR参数自适应律设计为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{W}}}_i &= \gamma_i s_i \varphi_i - \gamma_i \kappa_i \hat{\mathbf{W}}_i, \\ \dot{\hat{\mathbf{X}}}_{sv,i} &= \gamma_{svi} s_i \varphi_{\hat{\mathbf{X}}_{sv,i}}^T \hat{\mathbf{W}}_i - \gamma_{svi} \kappa_{svi} \hat{\mathbf{X}}_{sv,i}, \\ \dot{\hat{\sigma}}_{w,i} &= \gamma_{wi} s_i \varphi_{\hat{\sigma}_{w,i}}^T \hat{\mathbf{W}}_i - \gamma_{wi} \kappa_{wi} \hat{\sigma}_{w,i}, \\ & i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (73)$$

3) 文献[21]中的神经网络动态面控制.

控制律设计为

$$u = -\lambda_n s_n - \hat{\mathbf{W}}_{nNN}^T \hat{\theta}_n - s_{n-1} + \dot{x}_n^c. \quad (74)$$

神经网络权值更新律设计为

$$\dot{\hat{\mathbf{W}}}_{iNN} = \gamma_{iNN} (v_i + \gamma_{zi} z_{isv}) \varphi_{nn}(\bar{x}_i) -$$

$$\gamma_{iNN} \kappa_{iNN} \hat{\mathbf{W}}_{iNN}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (75)$$

仿真采用系统(1), 则系统可以写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^3 + x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_3 + u, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (76)$$

在下面各仿真实例中, 系统的初始状态为  $n = 3, f_1(\bar{x}_1) = x_1^2, f_2(\bar{x}_2) = x_1^3 + x_2, f_3(\bar{x}_3) = x_3$ , 各项参数取值如表1所示.

表1 仿真实验中各项参数的取值 ( $i = 1, 2, 3$ )

SVM参数	取值	控制器参数	取值
$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$	30, 90, 10	$\lambda_i$	20
$\gamma_{svi}, \gamma_{\sigma i}$	20, 20	$\gamma_{zi}$	1
$\kappa_i$	0.001	预测状态参数	取值
$\kappa_{svi}, \kappa_{\sigma i}$	0.001, 0.001	$\beta_{zi}$	5
系统跟踪期望信号		$y_r = \sin t$	

图1表示系统跟踪效果图. 在图1中, 方法1)的跟踪误差在  $\pm 0.008$  以内. 对比方法2)和方法3)的跟踪误差可以看出, 加入预测状态误差后的自适应支持向量机能够有效地提高系统跟踪精度.

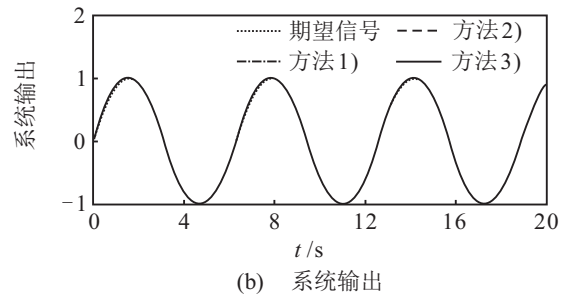
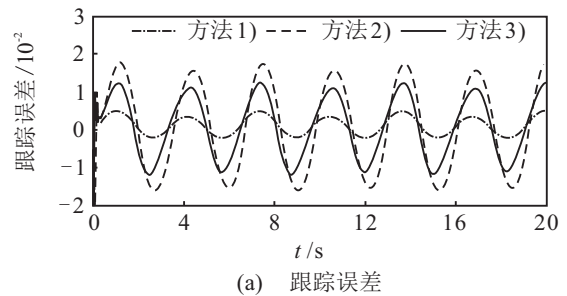


图1 系统跟踪效果

表2记录了系统跟踪误差的平均值和方差. 由表2的数据可以看出, 由于在自适应支持向量机中加入了状态预测误差, 方法1)相对于其他两种方法有较小的跟踪误差, 具备更好的跟踪效果.

表2 跟踪误差均值与方差对比

	方法1)	方法2)	方法3)
误差均值	3.004 3e-07	1.761 9e-07	2.293 6e-07
误差方差	0.0025	0.009 2	0.008 1

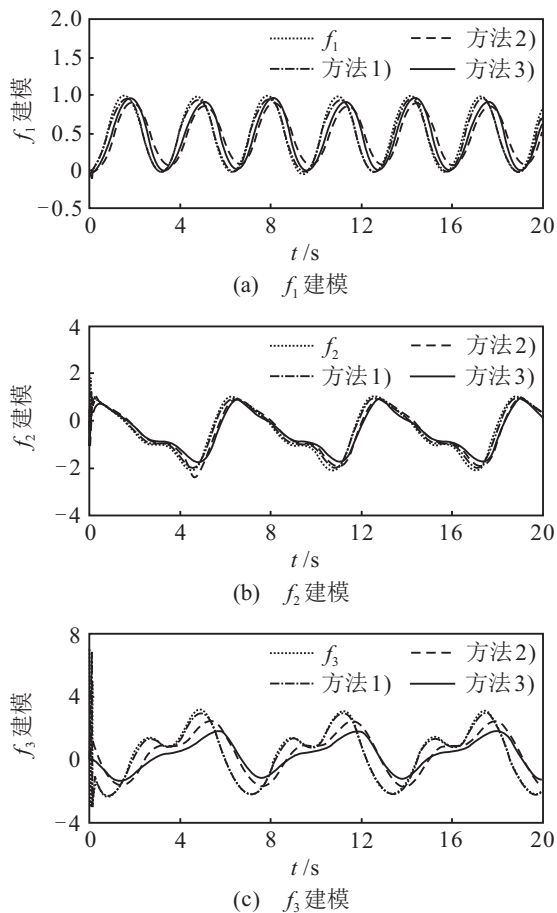
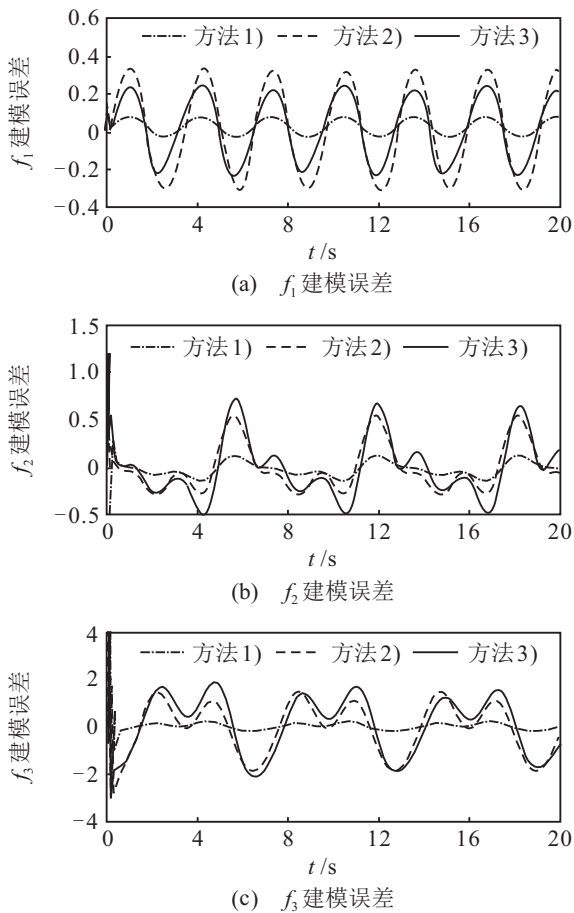
图2  $f_1, f_2, f_3$  建模效果图3  $f_1, f_2, f_3$  建模误差

图2和图3分别表示 $f_1, f_2, f_3$ 的建模效果和建模误差. 由图2和图3可以看出, 本文的建模方法相比于其他两种建模方法, 有更小的建模误差. 相比于方法2), 由于自适应律的改进, 方法1)可以提高对系统未知动态建模的准确度.

图4给出了3种方法的权值自适应更新过程. 由图4可以看出, 3种方法的权值最终均可以稳定在一定的范围内. 此外, 比较3种方法的权值更新律(71)、(73)和(75)可知, 由于受到预测误差 $v_i$ 和 $z_{isv}$ 的影响, 在初始阶段预测误差较大时, 方法1)的权值会存在一定的超调. 因此, 自适应参数 $\gamma_i$ 和 $\gamma_{zi}$ 的选择应当权衡权值收敛速度以及超调量两方面因素.

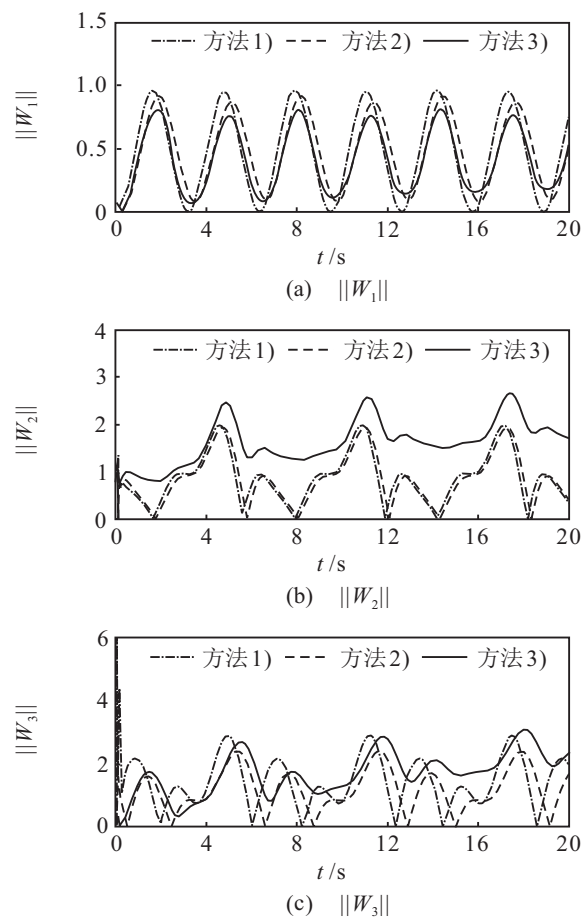


图4 权值自适应

## 5 结论

本文针对一类非线性不确定系统, 提出了一种自适应支持向量机动态面控制方法. 首先, 基于一阶泰勒展开对支持向量机的核函数进行参数线性化处理, 并用其对系统未知动态建模; 然后, 在此基础上设计动态面虚拟控制器和控制器, 并在控制器设计过程中增加系统状态及其跟踪误差的预测变量, 改进参数自适应律; 最后, 给出仿真对比结果验证了所提方法的有效性和优越性.

## 参考文献(References)

- [1] Kokotovic P V. The joy of feedback: Nonlinear and adaptive[J]. IEEE Control Systems, 1992, 12(3): 7-17.
- [2] Swaroop D, Hedrick J, Yip P P, et al. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(10): 1893-1899.
- [3] Chen Q, Tao L, Nan Y R, et al. Adaptive nonlinear sliding mode control of mechanical servo system with LuGre friction compensation[J]. J of Dynamic Systems Measurement & Control, 2016, 138(2): 021003-1-9.
- [4] Lv Y F, Na J, Yang Q M, et al. Online adaptive optimal control for continuous-time nonlinear systems with completely unknown dynamics[J]. Int J of Control, 2016, 89(1): 99-112.
- [5] Na J, Muhammad N M, Guido H, et al. Robust adaptive finite-time parameter estimation and control for robotic systems[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2015, 25(16): 3045-3071.
- [6] Han S I, Lee J M. Partial tracking error constrained fuzzy dynamic surface control for a strict feedback nonlinear dynamic system[J]. IEEE Trans on Fuzzy System, 2014, 22(5): 1049-1061.
- [7] Xu B, Shi Z K, Yang C G. Composite neural dynamic surface control of a class of uncertain nonlinear systems in strict-feedback form[J]. IEEE Trans on Cybernetic, 2014, 44(12): 2626-2634.
- [8] Na J, Ren X M, Zheng D D. Adaptive control for nonlinear pure-feedback systems with high order Sliding mode observer[J]. IEEE Trans on Neural Networks and Learning Systems, 2013, 24(3): 370-382.
- [9] Wang G L, Li Y F, Bi D X. Support vector networks in adaptive friction compensation[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2007, 18(4): 1209-1219.
- [10] Vapnik V N. The nature of statistical learning theory[M]. New York: Springer, 1995: 138-216.
- [11] Smola A J, Schölkopf B. A tutorial on support vector regression[J]. Statistics & Computing, 2004, 14(3): 199-222.
- [12] 周金柱, 段宝岩, 黄进, 等. 伺服系统摩擦的支持向量回归建模与反步控制[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(12):1405-1409.  
(Zhou J Z, Duan B Y, Huang J, et al. Support vector regression modeling and backstepping control of friction in servo system[J]. Control Theory & Applications, 2009, 26(12): 1405-1409.)
- [13] 陈强, 楼成林. 基于最小二乘支持向量机摩擦建模的机电伺服系统动态面控制[J]. 江南大学学报: 自然科学版, 2015, 14(6): 736-740.  
(Chen Q, Lou C L. Dynamic surface control of electromechanical servo system based on least squares support vector machine friction modeling[J]. J of Jiangnan University: Natural Science Edition, 2015, 14(6): 736-740.)
- [14] Chen Q, Ren X M, Na J. Robust anti-synchronization of uncertain chaotic systems based on multiple-kernel least squares support vector machine modeling[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2011, 44(12): 1080-1088.
- [15] Wang H, Pi D, Sun Y X. Online SVM regression algorithm-based adaptive inverse control[J]. Neurocomputing, 2007, 70(4/5/6): 952-959.
- [16] Sun Z H, Gan L Z, Sun Y X. Support vector machine adaptive control of nonlinear systems[C]. Int Conf on Intelligent Computing 2005. Hefei: Springer, 2005: 159-168.
- [17] 袁小芳, 王耀南. 一种模糊支持向量机控制器的研究[J]. 控制与决策, 2005, 20(5): 537-540.  
(Yuan X F, Wang Y N. On fuzzy support vector machine controller[J]. Control and Decision, 2005, 20(5): 537-540.)
- [18] Palaniswami M, Shilton A. Adaptive support vector machines for regression[C]. The 9th Int Conf on Neural Information Processing. Vancouver: IEEE Press, 2002: 1043-1049.
- [19] Shin J, Kim H J, Kim Y. Adaptive support vector regression for UAV flight control[J]. Neural Networks, 2011, 24(1): 109-120.
- [20] Dong W J, Farrell J A, Polycarpou M M, et al. Command filtered adaptive backstepping[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2010, 20(3): 566-580.
- [21] Wang D, Huang J. Neural network-based adaptive dynamic surface control for a class of uncertain nonlinear systems in strict-feedback form[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2005, 16(1): 195-202.

(责任编辑: 闫妍)