

基于分布式PID控制的时变时延多智能体系统的一致性

李浩亮^{1,2†}, 杨任农¹, 席 茜², 王利辉², 孟常亮²

(1. 空军工程大学空管领航学院, 西安 710051; 2. 93704 部队, 北京 101100)

摘 要: 研究普通阶多智能体系统存在时变时延条件下的一致性问题. 首先, 针对系统存在时变时延的情况, 结合状态反馈与PID控制提出一种一致性协议; 然后, 将系统状态空间分解为一致子空间和一致补子空间, 采用状态空间分解法将一致性问题转化为渐近稳定问题, 给出系统实现一致的充分必要条件; 并确定系统的一致性函数的显示表达式; 最后, 构造Lyapunov-Krasovskii泛函, 基于线性矩阵不等式(LMI)给出控制参数的计算方法, 采用可扩充性方法降低线性矩阵不等式的计算数量. 仿真结果表明, 系统的结构拓扑图存在全局可达节点时, 系统在所提出的协议作用下通过计算合适的PID参数和控制参数可实现一致性, 通过与纯比例控制的结果对比表明, 所提出的协议能够消除系统稳态误差, 使系统趋于一致.

关键词: 多智能体一致性; 时变时延; PID控制; 状态空间分解法; 线性矩阵不等式; 可扩充性方法
中图分类号: TP13 **文献标志码:** A

Consensus of multi-agent systems with time-varying delays based on distributed PID control

LI Hao-liang^{1,2†}, YANG Ren-nong¹, XI Xi², WANG Li-hui², MENG Chang-liang²

(1. Air Traffic Control and Navigation College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China; 2. Unit 93704, Beijing 101100, China)

Abstract: This paper investigates the consensus problem of a general linear multi-agent systems(MAS) with variable time delays. Firstly, a protocol based on the combination of the state feedback and the distributed PID control law is proposed. Then, the state space of the system is decomposed into a consensus subspace and a consensus complement subspace, on this basis, the sufficient and necessary condition of the consensus of the MAS is given by using the state space decomposition approach. The explicit form of the consensus function is given. Finally, a new Lyapunov-Krasovskii functional is constructed, and the parameters of the control system are given based on the linear matrix inequations(LMIs). An extended method is introduced to decrease the computation of the LMIs. The simulation results show that, under the condition that the topology has a global reachable node, through calculating proper PID parameters and control parameters, the proposed protocol can overcome the delay to some extent, so that the MAS can achieve consensus and have strong robustness. Through comparing with the pure propotional control, the proposed protocol can eliminate the steady-state error finally and make the system achieve consensus.

Keywords: MAS consensus; variable time-delay; PID controller; state space decomposition approach; linear matrix inequation; extended method

0 引 言

近年来,多智能体系统的协同控制理论得到了快速发展,各种理论成果层出不穷.一致性问题是多智能体协同控制领域的一个基础问题,在地面机器人和无人机编队控制中具有广泛应用.群系统之间的信号传输过程要经过采样、编译、传输、还原等几个

步骤^[1],系统时延不可避免.存在时延现象的群系统更加贴近现实系统,因此引起了很多学者的关注.多智能体系统中的时延主要分为通信时延^[2]和输入时延^[3-5].通信时延涉及到智能体之间的局部信息交换,输入时延主要和智能体自身处理信息的性能有关,通信时延和输入时延过大会影响系统运动特性.系统

收稿日期: 2017-07-30; 修回日期: 2018-03-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目(50875132).

责任编辑: 周彬.

作者简介: 李浩亮(1989—),男,博士,从事多智能体协同控制理论的研究; 杨任农(1969—),男,教授,从事任务规划与训练评估等研究.

†通讯作者. E-mail: lihaoliang10524@163.com.

时延又分为固定时延^[6-7]和时变时延^[8-9],可以将固定时延看作时变时延的特例. 本文讨论系统在具有时变时延条件下的一致性问题的,即系统时延随着时间发生变化.

针对时延的多智能体系统的分析方法主要有两种:频域法和Lyapunov函数法. 频域法适合单输入单输出系统,通常可以通过稳定性判据确定出时延上界. 对于普通线性系统,采用Lyapunov函数法更为合适, Lyapunov函数法属于时域法,用来分析系统的稳定特性,具体过程是构造Lyapunov-Krasovskii和Lyapunov-Razumikhin函数,并对函数进行求导,然后确定系统状态的收敛特性. 文献[10]中的系统时延在一定范围内波动,通过建立Lyapunov函数可以得出系统一致性的充分条件,且其控制参数满足推导出的线性矩阵不等式. 大部分文献都需要求解时延上界,无时延是系统通信的理想状态,不会对系统的稳定性造成不良影响. 时域法的通用步骤是将一致性问题转化为误差系统的渐近稳定性问题,建立Lyapunov函数,通过构造线性矩阵不等式得出控制参数和系统时延满足的条件^[11-18]. 以上文献研究的对象大都是一阶或二阶多智能体时延系统,本文的研究对象是普通阶线性时变时延系统.

本文基于分布式PID控制提出一种新的一致性算法,研究的对象是具有时变时延的任意阶连续线性时不变系统. 已有的文献虽然也曾采用PID控制作为一致性协议的核心,但研究对象都是较为简单的一阶系统,不具有代表性. 为了解决高阶系统的一致性,采用状态分解方法将一致性问题转化为降阶子系统的稳定性问题,同时确定系统的相对运动和绝对运动. 本文通过状态分解法给出系统实现一致的充分必要条件,然后利用LMIs给出控制参数的设计范围.

1 预备知识

1.1 图论和数学基础

假设 $G = (V(G), \mathcal{E}(G), \mathbf{W})$ 为一个有向图. 其中: $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 为图的节点集合; $\mathcal{E}(G) \in V(G) \times V(G)$ 为图的边集合,对于任一边 $e_{ij} = (v_i, v_j)$ 而言, v_i 为父节点, v_j 为子节点,并且 v_j 为 v_i 的一个邻居节点; $\mathbf{W} = [w_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 为图的邻接矩阵, $\mathbf{D} = \text{diag}\{\text{deg}_{\text{in}}(i), i \in N\}$ 为节点 v_i 的入度矩阵, $\text{deg}_{\text{in}}(i) = \sum_{j \in N_i} w_{ij}$, \mathcal{L} 为图 G 的Laplacian矩阵. 一般情况下,有向图的Laplacian矩阵不是对称矩阵.

为了统一论文符号,规定 $\mathbf{R}^{n \times m}$ 和 $\mathbf{C}^{n \times m}$ 分别为 $n \times m$ 维实矩阵和复矩阵, \mathbf{I}_N 为 N 维单位矩阵, $\mathbf{1}(0)$

为元素全为零的矢量, $\text{Re}(\lambda)$ 为复数 λ 的实部, \otimes 为Kronecker积.

引理1^[7] 0 是Laplacian矩阵 \mathcal{L} 的一个特征根,对应的特征向量为 $\mathbf{1}$,并且所有的非零特征值均具有正实部. 另外,如果图 G 存在有向生成树,则 \mathcal{L} 有且仅有一个零特征值.

1.2 问题描述

考虑一个由 N 个同构智能体构成的连续时间线性时不变系统,每个智能体的动力学方程如下:

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

其中: $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times p}$ 为常数矩阵, $\mathbf{x}_i(t) = (\mathbf{x}_{i_1}(t), \mathbf{x}_{i_2}(t), \dots, \mathbf{x}_{i_n}(t))^T \in \mathbf{R}^n$ 为每个智能体的状态变量, $\mathbf{u}_i \in \mathbf{R}^p$ 为系统的控制输入.

基于PID控制,考虑包含时变时延的一致性控制协议

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i(t) = & \mathbf{K}_1 \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{K}_2 \sum_{j \in N_i} w_{ij} \left(T_P (\mathbf{x}_j(t - \tau(t)) - \right. \\ & \left. \mathbf{x}_i(t - \tau(t))) + T_I \int_0^{t - \tau(t)} (\mathbf{x}_j(s) - \mathbf{x}_i(s)) ds + \right. \\ & \left. T_D (\dot{\mathbf{x}}_j(t - \tau(t)) - \dot{\mathbf{x}}_i(t - \tau(t))) \right). \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$; $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2 \in \mathbf{R}^{p \times n}$, \mathbf{K}_1 为状态反馈矩阵, \mathbf{K}_2 为耦合增益矩阵; N_i 为节点 v_i 的邻接节点集合; $T_P > 0, T_I > 0, T_D > 0$ 分别为比例、积分、微分系数; $\tau(t)$ 为满足如下假设的时变时延.

假设1 $0 \leq \tau(t) \leq \bar{\tau}, |\dot{\tau}(t)| \leq h < 1$, 其中 $\bar{\tau}$ 和 h 为已知的正常数.

令 $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1^T(t), \mathbf{x}_2^T(t), \dots, \mathbf{x}_N^T(t)]^T$, 将式(2)代入系统(1), 则系统可以写成如下紧凑形式:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{I}_N \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1))\mathbf{x}(t) - \\ \quad T_P (\mathcal{L} \otimes \mathbf{B}\mathbf{K}_2)\mathbf{x}(t - \tau(t)) - \\ \quad T_I (\mathcal{L} \otimes \mathbf{B}\mathbf{K}_2) \int_0^t \mathbf{x}(s - \tau(s)) ds - \\ \quad T_D (\mathcal{L} \otimes \mathbf{B}\mathbf{K}_2)\dot{\mathbf{x}}(t - \tau(t)); \\ \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), \quad t \in [-\bar{\tau}, 0]. \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\boldsymbol{\phi}(t)$ 为一个有界的向量函数.

定义1 对于任意给定的有界初始条件 $\boldsymbol{\phi}(t)$, 如果存在一个与初始状态 $\mathbf{x}(0)$ 相关的向量函数 $\mathbf{c}(t) \in \mathbf{R}^n$ 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{1} \otimes \mathbf{c}(t)) = \mathbf{0}$, 则称系统(3)获得一致, $\mathbf{c}(t)$ 为一致性函数.

本文研究系统的一致性条件,并给出一致性协议控制参数的设计方法.

2 问题转换

假设本文中系统的拓扑结构是有向图且存在生成树,则系统的Laplacian矩阵有且仅有一个零特征值. $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{J}_L$,其中 \mathbf{U} 为Laplacian矩阵 \mathbf{L} 的特征向量组成的复矩阵,假设 $\tilde{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{U}^{-1} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{x}(t)$,则系统(3)可以转化为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= (\mathbf{I}_N \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1))\tilde{\mathbf{x}}(t) - \\ &T_p(\mathbf{J}_L \otimes \mathbf{BK}_2)\tilde{\mathbf{x}}(t - \tau(t)) - \\ &T_I(\mathbf{J}_L \otimes \mathbf{BK}_2) \int_0^t \tilde{\mathbf{x}}(s - \tau(s))ds - \\ &T_D(\mathbf{J}_L \otimes \mathbf{BK}_2)\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t - \tau(t)). \end{aligned} \quad (4)$$

由引理1可知 $\mathbf{J}_L = \text{diag}\{0, \bar{\mathbf{J}}_L\}$,其中 $\bar{\mathbf{J}}_L = \text{diag}\{\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N\}$. 记 $\bar{\mathbf{x}}(t) = [\tilde{\mathbf{x}}_2^T(t), \tilde{\mathbf{x}}_3^T(t), \dots, \tilde{\mathbf{x}}_N^T(t)]^T$,则上式可以重新整理为

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1)\tilde{\mathbf{x}}_1(t), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= (\mathbf{I}_{N-1} \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1))\tilde{\mathbf{x}}(t) - \\ &T_p(\bar{\mathbf{J}}_L \otimes \mathbf{BK}_2)\tilde{\mathbf{x}}(t - \tau(t)) - \\ &T_I(\bar{\mathbf{J}}_L \otimes \mathbf{BK}_2) \int_0^t \tilde{\mathbf{x}}(s - \tau(s))ds - \\ &T_D(\bar{\mathbf{J}}_L \otimes \mathbf{BK}_2)\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t - \tau(t)). \end{aligned} \quad (6)$$

通过上面的变换可以得出系统获得一致的充分必要条件.

3 一致性条件

采用状态空间分解法将一致性问题转化为渐近稳定问题,为了得到一致性条件,首先介绍两个子空间.

设 $\mathbf{c}_k \in \mathbf{R}^n$ ($k = 1, 2, \dots, n$)为线性无关的向量, \mathbf{C}^{Nn} 可以由如下两个线性子空间构成.

定义2 设 $\bar{\mathbf{u}}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$)为矩阵 \mathbf{U} 的列向量; $\mathbf{p}_j = \bar{\mathbf{u}}_i \otimes \mathbf{c}_k \in \mathbf{C}^{Nn}$, $j = (i-1)n + k$, $i = 1, 2, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots, n$. 由向量 \mathbf{p}_j ($j = 1, 2, \dots, n$)张成的子空间 $\mathbf{C}(U)$ 称为一致子空间,由向量 \mathbf{p}_j ($j = n+1, n+2, \dots, Nn$)张成的子空间 $\bar{\mathbf{C}}(U)$ 称为一致补子空间. 由于矩阵 \mathbf{P} 是非奇异的,下面引理成立.

引理2 $\mathbf{C}(U) \oplus \bar{\mathbf{C}}(U) = \mathbf{C}^{Nn}$.

定理1 本文研究的系统拓扑由有向图 G 表示,假设图 G 含有生成树,当且仅当子系统 $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1)\tilde{\mathbf{x}}_i(t) - T_p\lambda_i\mathbf{BK}_2\tilde{\mathbf{x}}_i(t - \tau(t)) - T_I\lambda_i\mathbf{BK}_2 \int_0^t \tilde{\mathbf{x}}_i(s - \tau(s))ds - T_D\lambda_i\mathbf{BK}_2\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i(t - \tau(t))$ 是渐近稳定的,系统(3)获得一致.

证明 设 $\mathbf{x}_C(t) \triangleq (\mathbf{U} \otimes \mathbf{I}_n)[\tilde{\mathbf{x}}_1^T(t), 0]^T$, $\mathbf{x}_{\bar{C}}(t) \triangleq$

$(\mathbf{U} \otimes \mathbf{I}_n)[\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{x}}^T(t)]^T$, 由于向量 \mathbf{c}_k ($k = 1, 2, \dots, n$)是线性无关的,存在 $\alpha_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$),使得

$$\tilde{\mathbf{x}}_1(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t)\mathbf{c}_j. \quad (7)$$

又因为 $[\tilde{\mathbf{x}}_1^T(t), \mathbf{0}]^T = \mathbf{e}_1 \otimes \tilde{\mathbf{x}}_1^T(t)$, 向量 \mathbf{e}_1 的第一个元素为1,其他都为0,所以可以得到

$$\mathbf{x}_C(t) = \bar{\mathbf{u}}_1 \otimes \tilde{\mathbf{x}}_1(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t)\mathbf{p}_j. \quad (8)$$

另外,存在 $\alpha_j(t)$ ($j = n+1, n+2, \dots, Nn$),使得

$$\bar{\mathbf{x}}^T(t) = \left[\sum_{k=1}^n \alpha_{n+k}(t)\mathbf{c}_k^T, \dots, \sum_{k=1}^n \alpha_{(N-1)n+k}(t)\mathbf{c}_k^T \right]^T. \quad (9)$$

由 \mathbf{p}_j ($j = n+1, n+2, \dots, Nn$)的结构可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\bar{C}}(t) &= \sum_{i=2}^N \sum_{k=1}^n \alpha_{(i-1)n+k}(t)(\bar{\mathbf{u}}_i \otimes \mathbf{c}_k) = \\ &\sum_{j=n+1}^{Nn} \alpha_j(t)\mathbf{p}_j. \end{aligned} \quad (10)$$

由定义2可知, $\mathbf{x}_C(t)$ 与 $\mathbf{x}_{\bar{C}}(t)$ 不相关. 由 $\tilde{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{U}^{-1} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{x}(t)$ 可得

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_C(t) + \mathbf{x}_{\bar{C}}(t). \quad (11)$$

由引理2可知,当且仅当 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{\bar{C}}(t) = \mathbf{0}$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$ 时,群系统(3)获得一致,由 $\bar{\mathbf{J}}_L$ 的结构特性即可得到该结论. \square

设 $\mathbf{P}_{\mathbf{C}(U), \bar{\mathbf{C}}(U)} = [\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}]\mathbf{P}^{-1}$ 表示沿着 $\bar{\mathbf{C}}(U)$ 到 $\mathbf{C}(U)$ 的斜投影算子,其中 $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{Nn}]$. 下面在推论中给出一致性函数 $\mathbf{c}(t)$ 的显示表达式.

推论1 如果 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 是可控制的,图 G 包含生成树,系统获得了一致,则系统的一致性函数的模态可以任意配置且满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{c}(t) - e^{(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1)t}[\mathbf{I}_n, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}]\mathbf{P}_{\mathbf{C}(U), \bar{\mathbf{C}}(U)}\mathbf{x}(0)) = \mathbf{0}. \quad (12)$$

证明 由定理1可知,若系统获得一致,则系统的一致性函数由子系统(5)确定,即有 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{c}(t) - \tilde{\mathbf{x}}_1(t)) = \mathbf{0}$. 由于图 G 包含生成树,一致函数不一定收敛到零. 由于 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 可控,一致函数模态可以通过 \mathbf{K}_1 任意配置. $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_C(t) + \mathbf{x}_{\bar{C}}(t)$,由引理2可知 $\mathbf{x}_C(0) = \mathbf{P}_{\mathbf{C}(U), \bar{\mathbf{C}}(U)}\mathbf{x}(0)$. 由 $\mathbf{x}_C(0) = \mathbf{1} \otimes \tilde{\mathbf{x}}_1(0)$ 可以得到 $\tilde{\mathbf{x}}_1(0) = [\mathbf{I}_n, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}]\mathbf{P}_{\mathbf{C}(U), \bar{\mathbf{C}}(U)}\mathbf{x}(0)$. 通过解微分方程(5)可以得到推论1的结论. \square

注1 通过极点配置,系统的一致性函数可以收敛

到零,也可以是振荡或者发散的,但系统状态都会趋于一致. 群系统的运动可以看作由系统作为整体的绝对运动与个体间的相对运动组成^[19]. 本文使用基于初始状态分解的方法确定系统的绝对运动,相对运动的控制则采用PID控制. 推论1表明,系统时延不会改变一致性函数的显示表达式,即不会对系统绝对运动产生影响.

4 一致性协议的参数设计

增益矩阵 K_1 的作用是配置系统的运动模式, K_2 的作用是保证系统实现一致性. 为了得出一致性判据,首先介绍如下3个引理.

引理3^[20] 对于一个对称矩阵 $S = [S_{ij}]$, $S_{11} \in R^{r \times r}$, $S_{12} \in R^{r \times (n-r)}$, $S_{22} \in R^{(n-r) \times (n-r)}$, 如果 $S < 0$, 则当且仅当 $S_{11} < 0$ 时, 有 $S_{22} - S_{21}S_{11}^{-1}S_{12} < 0$ 或者 $S_{22} < 0$ 时, 有 $S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21} < 0$.

引理4^[21] 设 $\eta(t) \in R^n$ 为一阶连续可微的向量函数, 则有如下积分不等式成立:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{\eta}^T(s) S \dot{\eta}(s) ds \leq \\
 & \zeta^T(t) \begin{bmatrix} M_1^T + M_1 & -M_1^T + M_2 \\ -M_1 + M_2^T & -M_2^T - M_2 \end{bmatrix} \zeta(t) + \\
 & \tau(t) \zeta^T(t) \begin{bmatrix} M_1^T \\ M_2^T \end{bmatrix} S^{-1} [M_1, M_2] \zeta(t). \quad (13)
 \end{aligned}$$

其中: $M_1, M_2 \in R^n$, $S = S^T > 0$, $\zeta(t) = [\eta^T(t), \eta^T(t - \tau(t))]^T$.

引理5^[22] 记 $\tilde{\lambda}_{1,2} = \text{Re}(\lambda_2) \pm j\mu_M$, $\tilde{\lambda}_{3,4} = \text{Re}(\lambda_N) \pm j\mu_M$, 其中 $\mu_M = \max\{\text{Im}(\lambda_i), i = 2, 3, \dots, N\}$. Φ_0 , Φ_1 和 Φ_2 是与 $\lambda_i (i = 2, 3, \dots, N)$ 和 $\tilde{\lambda}_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 无关的实对称矩阵. 如果 $\Phi_0 + \text{Re}(\tilde{\lambda}_i)\Phi_1 + \text{Im}(\tilde{\lambda}_i)\Phi_2 < 0 (i = 1, 2, 3, 4)$, 则有 $\Phi_0 + \text{Re}(\lambda_i)\Phi_1 + \text{Im}(\lambda_i)\Phi_2 < 0 (i = 2, 3, \dots, N)$.

证明 设 $\varphi(t) \in [-1, 1]$ 为任意分段连续的标量函数, 设 $\delta(t) = (\varphi(t) + 1)/2$, 则 $\delta(t)$ 也是分段连续函数, 且 $\delta(t) \in [0, 1]$. 记 $\tilde{\Xi}_i \triangleq \Phi_0 + \text{Re}(\tilde{\lambda}_i)\Phi_1 + \text{Im}(\tilde{\lambda}_i)\Phi_2 (i = 1, 2, 3, 4)$, $\hat{\Xi}_i \triangleq \Phi_0 + \text{Re}(\lambda_i)\Phi_1 + \text{Im}(\lambda_i)\Phi_2 (i = 2, 3, \dots, N)$. 如果 $\tilde{\Xi}_i (i = 1, 2) < 0$, 则可以得到

$$\begin{aligned}
 \Theta_1 & \triangleq \Phi_0 + \text{Re}(\lambda_2)\Phi_1 + \varphi(t)\mu_M\Phi_2 = \\
 & \delta(t)\tilde{\Xi}_1 + (1 - \delta(t))\tilde{\Xi}_2 < 0. \quad (14)
 \end{aligned}$$

如果 $\tilde{\Xi}_i (i = 3, 4) < 0$, 则可以得到

$$\Theta_2 \triangleq \Phi_0 + \text{Re}(\lambda_N)\Phi_1 + \varphi(t)\mu_M\Phi_2 < 0. \quad (15)$$

对于 $i \in \{2, 3, \dots, N\}$, 存在 $\beta_i \in [0, 1]$, 使得

$\text{Re}(\lambda_i) = \beta_i \text{Re}(\lambda_2) + (1 - \beta_i) \text{Re}(\lambda_N)$, 因此可以得到

$$\begin{aligned}
 \hat{\Xi}_i & = \\
 & \beta_i \Theta_1 + (1 - \beta_i) \Theta_2 + [-\varphi(t)\mu_M + \text{Im}(\lambda_i)]\Phi_2. \quad (16)
 \end{aligned}$$

对于任意分段连续的非零向量函数 $\gamma(t)$, 由 $\Theta_1 < 0, \Theta_2 < 0$ 可知

$$\gamma^T(t)\hat{\Xi}_i\gamma(t) < [-\varphi(t)\mu_M + \text{Im}(\lambda_i)]\gamma^T(t)\Phi_2\gamma(t). \quad (17)$$

设函数 $\varphi(t) = \text{sign}(\gamma^T(t)\Phi_2\gamma(t))$, 则有

$$\begin{aligned}
 & [-\varphi(t)\mu_M + \text{Im}(\lambda_i)]\gamma^T(t)\Phi_2\gamma(t) = \\
 & -(\mu_M - \text{Im}(\lambda_i)\varphi(t))|\gamma^T(t)\Phi_2\gamma(t)|. \quad (18)
 \end{aligned}$$

由于 $\mu_M \pm \text{Im}(\lambda_i) \geq 0$, 有 $\gamma^T(t)\hat{\Xi}_i\gamma(t) < 0$, 即 $\hat{\Xi}_i < 0$. \square

如下系统中存在积分项:

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{x}}_i(t) & = \\
 & (A + BK_1)\tilde{x}_i(t) - T_p\lambda_iBK_2\tilde{x}_i(t - \tau(t)) - \\
 & T_I\lambda_iBK_2 \int_0^t \tilde{x}_i(s - \tau(s))ds - \\
 & T_D\lambda_iBK_2\dot{\tilde{x}}_i(t - \tau(t)), \quad i = 2, 3, \dots, N.
 \end{aligned}$$

若变量 $\tilde{x}_i(t)$ 最终趋向于零, 则 $\tilde{x}_i(t)$ 的导数最终也会趋向于零. 令 $\dot{\tilde{x}}_i(t) = \tilde{v}_i(t)$, 则子系统模型等价于

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{x}}_i(t) & = \tilde{v}_i(t), \\
 \dot{\tilde{v}}_i(t) & = (A + BK_1)\tilde{v}_i(t) - \\
 & T_p\lambda_i(1 - h)BK_2\tilde{v}_i(t - \tau(t)) - \\
 & T_I\lambda_iBK_2\tilde{x}_i(t - \tau(t)) - \\
 & T_D\lambda_i(1 - h)BK_2\dot{\tilde{v}}_i(t - \tau(t)). \quad (19)
 \end{aligned}$$

令 $\tilde{\xi}_i(t) = [\tilde{x}_i^T(t), \tilde{v}_i^T(t)]^T$, 则上式等价于

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{\xi}}_i(t) & = \\
 & \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & A + BK_1 \end{bmatrix} \tilde{\xi}_i(t) - \\
 & \begin{bmatrix} 0_n & 0_n \\ T_I\lambda_iBK_2 & T_p\lambda_i(1 - h)BK_2 \end{bmatrix} \tilde{\xi}_i(t - \tau(t)) - \\
 & \begin{bmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & T_D\lambda_i(1 - h)BK_2 \end{bmatrix} \dot{\tilde{\xi}}_i(t - \tau(t)), \\
 & i \in \{2, 3, \dots, N\}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

上式的稳定性等价于系统(3)的稳定性.

下面通过线性矩阵不等式工具给出一致性协议(2)中控制参数的计算方法.

定理2 对于任意时延 $\tau(t) \in [0, \bar{\tau}]$, 如果存在 $4n \times 4n$ 维实对称矩阵 $R > 0, Q > 0, S > 0$ 以及 M_1 和 M_2 , 满足

$$\Xi_i = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{i12} & -R\tilde{X}_{i3} & \bar{\tau}X_1^T S & \bar{\tau}M_1^T \\ * & \Xi_{22} & 0 & -\bar{\tau}\tilde{X}_{i2}^T S & \bar{\tau}M_2^T \\ * & * & 0 & -\bar{\tau}\tilde{X}_{i3}^T S & 0 \\ * & * & * & -\bar{\tau}S & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{\tau}S \end{bmatrix} < 0, \quad (21)$$

$i = 1, 2, 3, 4.$

其中

$$\begin{aligned} \Xi_{11} &= X_1^T R + R X_1 + Q + M_1^T + M_1, \\ \Xi_{i12} &= -R\tilde{X}_{i2} - M_1^T + M_2, \\ \Xi_{22} &= -(1-h)Q - M_2^T - M_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{i2} &= \begin{bmatrix} 0_n & 0_n \\ T_I \Upsilon_{\lambda_i} \Lambda_B \Lambda_{K_2} & T_P \Upsilon_{\lambda_i} (1-h) \Lambda_B \Lambda_{K_2} \end{bmatrix}, \\ \tilde{X}_{i3} &= \begin{bmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & T_D \Upsilon_{\lambda_i} (1-h) \Lambda_B \Lambda_{K_2} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

则系统(3)获得一致。

证明 要证明系统(3)获得一致, 等价于证明子系统(20)稳定. 由于Laplacian矩阵的特征根中含有复数, 基于实部和虚部分解可知, 系统(20)的稳定性等价于如下系统的稳定性:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_i(t) &= \begin{bmatrix} 0_n & I_{2n} \\ 0_n & \Lambda_A + \Lambda_B \Lambda_{K_1} \end{bmatrix} \hat{\xi}_i(t) - \begin{bmatrix} 0_n & 0_n \\ T_I \Upsilon_{\lambda_i} \Lambda_B \Lambda_{K_2} & T_P \Upsilon_{\lambda_i} (1-h) \Lambda_B \Lambda_{K_2} \end{bmatrix} \hat{\xi}_i(t - \tau(t)) - \begin{bmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & T_D \Upsilon_{\lambda_i} (1-h) \Lambda_B \Lambda_{K_2} \end{bmatrix} \dot{\hat{\xi}}_i(t - \tau(t)), \\ & \quad i \in \{2, 3, \dots, N\}. \end{aligned} \quad (22)$$

其中: Λ_K 代表元素为矩阵 K 的对角阵, $\Upsilon_\lambda = \begin{bmatrix} \text{Re}(\lambda)I & -\text{Im}(\lambda)I \\ -\text{Im}(\lambda)I & \text{Re}(\lambda)I \end{bmatrix}$ 代表由特征值的实部与虚部组成的矩阵, 新变量 $\hat{\xi}_i(t) = [\text{Re}(\tilde{\xi}_i(t))^T, \text{Im}(\tilde{\xi}_i(t))^T]^T$. 为书写简便, 令

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0_n & I_{2n} \\ 0_n & \Lambda_A + \Lambda_B \Lambda_{K_1} \end{bmatrix} &= X_1, \\ \begin{bmatrix} 0_n & 0_n \\ T_I \Upsilon_{\lambda_i} \Lambda_B \Lambda_{K_2} & T_P \Upsilon_{\lambda_i} (1-h) \Lambda_B \Lambda_{K_2} \end{bmatrix} &= X_{i2}, \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & T_D \Upsilon_{\lambda_i} (1-h) \Lambda_B \Lambda_{K_2} \end{bmatrix} = X_{i3}.$$

考虑如下Lyapunov-Krasovskii函数:

$$V_i(t) = V_{i1}(t) + V_{i2}(t) + V_{i3}(t). \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} V_{i1}(t) &= \hat{\xi}_i^T(t) R \hat{\xi}_i(t), \\ V_{i2}(t) &= \int_{t-\tau(t)}^t \hat{\xi}_i^T(s) Q \hat{\xi}_i(s) ds, \\ V_{i3}(t) &= \int_{-\bar{\tau}}^0 \int_{t+\theta}^t \hat{\xi}_i^T(s) S \dot{\hat{\xi}}_i(s) ds d\theta. \end{aligned}$$

沿系统(21)的解对 $V_i(t)$ 求导, 可得

$$\dot{V}_{i1}(t) = 2\hat{\xi}_i^T(t) R H_i \eta_i(t), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i2}(t) &= \hat{\xi}_i^T(t) Q \hat{\xi}_i(t) - (1-h)\hat{\xi}_i^T(t - \tau(t)) Q \hat{\xi}_i(t - \tau(t)), \\ & \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i3}(t) &= \bar{\tau} \eta_i^T(t) H_i^T S H_i \eta_i(t) - \int_{t-\tau(t)}^t \hat{\xi}_i^T(\theta) S \dot{\hat{\xi}}_i(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (26)$$

其中: $H_i = [X_1, -X_{i2}, -X_{i3}]$, $\eta_i(t) = [\hat{\xi}_i^T(t), \hat{\xi}_i^T(t - \tau(t)), \dot{\hat{\xi}}_i^T(t - \tau(t))]^T$.

由引理4可得

$$\begin{aligned} & - \int_{t-\tau(t)}^t \hat{\xi}_i^T(\theta) S \dot{\hat{\xi}}_i(\theta) d\theta \leq \\ & [\hat{\xi}_i^T(t), \hat{\xi}_i^T(t - \tau(t))]^T \begin{bmatrix} M_1^T + M_1 & -M_1^T + M_2 \\ * & -M_2^T - M_2 \end{bmatrix} \times \\ & \begin{bmatrix} \hat{\xi}_i(t) \\ \hat{\xi}_i(t - \tau(t)) \end{bmatrix} + \\ & \bar{\tau} [\hat{\xi}_i^T(t), \hat{\xi}_i^T(t - \tau(t))]^T \begin{bmatrix} M_1^T \\ M_2^T \end{bmatrix} S^{-1} \times \\ & [M_1, M_2] \begin{bmatrix} \hat{\xi}_i(t) \\ \hat{\xi}_i(t - \tau(t)) \end{bmatrix} = \\ & \eta_i^T(t) \begin{bmatrix} M_1^T + M_1 & -M_1^T + M_2 & 0 \\ * & -M_2^T - M_2 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \eta_i(t) + \\ & \bar{\tau} \eta_i^T(t) \begin{bmatrix} M_1^T \\ M_2^T \\ 0 \end{bmatrix} S^{-1} [M_1, M_2, 0] \eta_i(t). \end{aligned} \quad (27)$$

由式(24)~(27)可得

$$\dot{V}_i(t) \leq$$

保证了系统的可扩充性.

本章假设系统拓扑图是有向的, Laplacian 矩阵的特征值包含复数, 因此可以利用线性矩阵不等式的凸性降低运算的复杂度^[23-24], 仅通过 Laplacian 矩阵的最大和最小非零特征值就可以判断系统的一致性.

5 计算机仿真实验

假设系统包含9个主体, 每个主体的动态特性相同, 设为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

系统作用拓扑及各边的连接权重如图1所示.

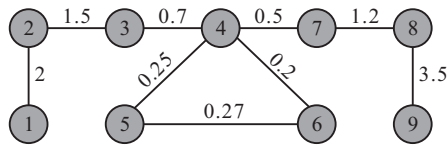


图1 系统作用拓扑

各智能体的初始状态分别为

$$\phi(t) \equiv v(t), t \in [-\bar{\tau}, 0];$$

$$\mathbf{x}_1(0) = [-9, -4, -10, -50]^T,$$

$$\mathbf{x}_2(0) = [5, 1, -4, 9]^T, \mathbf{x}_3(0) = [-5, 0, 1, -15]^T,$$

$$\mathbf{x}_4(0) = [-9, 2, -1, -3]^T, \mathbf{x}_5(0) = [-9, 2, -10, -3]^T,$$

$$\mathbf{x}_6(0) = [-10, 4, 3, -7]^T, \mathbf{x}_7(0) = [-2, -10, 17, 23]^T,$$

$$\mathbf{x}_8(0) = [12, 4, 0, -58]^T, \mathbf{x}_9(0) = [10, 4, 0, 98]^T.$$

增益矩阵 K_1 为

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.20 & -0.34 & 0.42 & -0.03 \\ -2.60 & 4.54 & 5.57 & -0.37 \\ -1.02 & -1.14 & -1.57 & -0.43 \\ 1.01 & -1.43 & -2.72 & -0.29 \end{bmatrix}.$$

PID 参数设定为 $T_P = 1.8516, T_I = 0.1998, T_D = 0.0250$. 令 $\tau(t) = 0.15 + 0.1 \sin t$, 由定理3可得

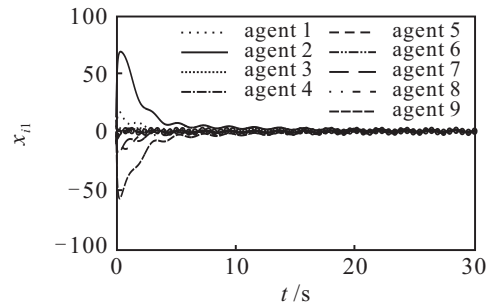
$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.03 & -0.03 & 0.21 & -0.12 \\ -2.37 & 1.63 & -0.41 & 0.51 \\ 0.57 & -0.43 & 0.01 & 0.29 \\ 0.72 & -0.29 & 0.01 & -0.14 \end{bmatrix}.$$

为了验证本文采用的可扩充性方法的优势, 选取不同的个体数量 N , 使用 LMI 工具箱的 FEASP 求解器, 分别计算出包含 $\tilde{\lambda}_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 的全部 LMI 和包含 $\lambda_i (i = 2, 3, \dots, N)$ 的全部 LMI 所需的计算时间, 如表1所示. 很明显, 当 N 很大时, 采用定理2给出的方法可以提高计算效率.

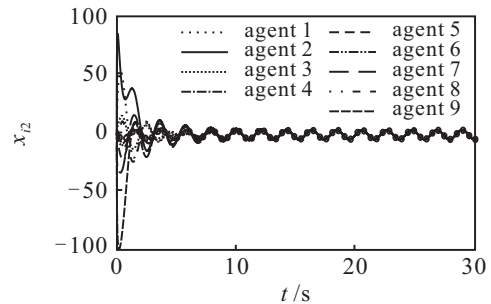
表1 检验可行性所需要的时间

算法	时间/s			
	$N = 10$	$N = 100$	$N = 1000$	$N = 5000$
定理2	0.061	0.086	0.115	0.203
$N-1$ 个 LMIs	1.532	16.312	268.347	1432.563

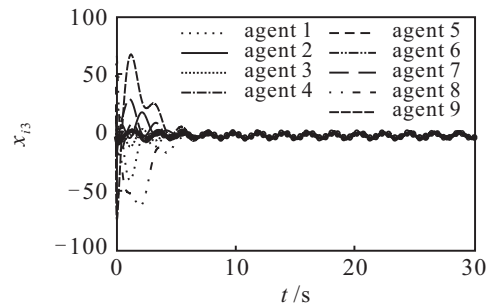
为了直观地显示一致性协议的效果, 选择系统状态偏差的向量范数作为一致性评价指标, 假设 $e_k(t) = 0.2 \sum_{i=2}^9 \|\mathbf{x}_{1_k} - \mathbf{x}_{i_k}\|, k = 1, 2, 3, 4, \mathbf{E}(t) = [e_1(t), e_2(t), e_3(t), e_4(t)]^T$. 仿真结果如图2~图5所示.



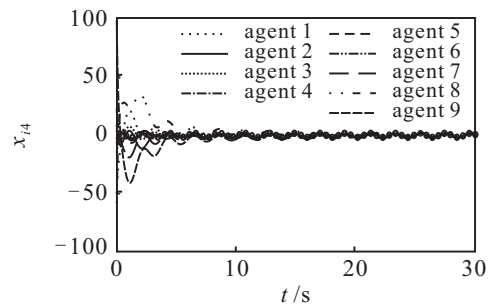
(a) 系统状态 x_{i1} 轨迹



(b) 系统状态 x_{i2} 轨迹



(c) 系统状态 x_{i3} 轨迹



(d) 系统状态 x_{i4} 轨迹

图2 基于PID控制的系统状态轨迹 ($i = 1, 2, \dots, 6$)

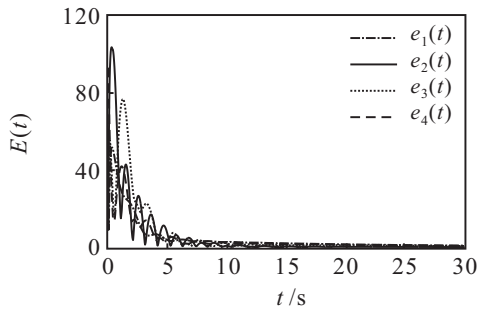


图3 基于PID控制的系统状态偏差

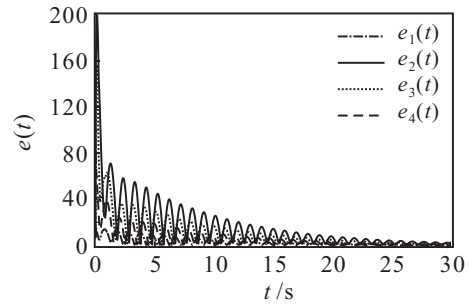
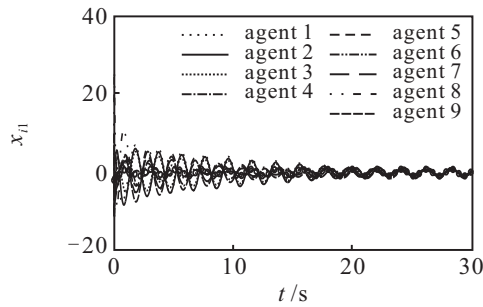
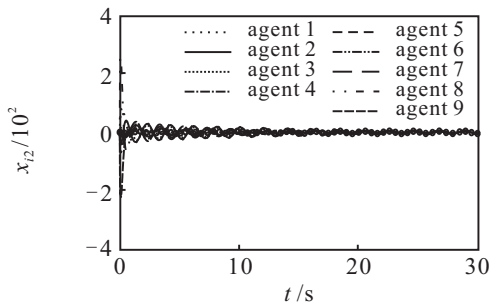


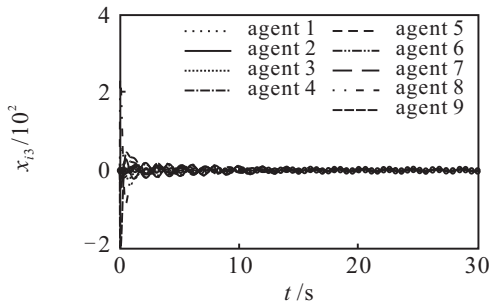
图5 基于比例控制的系统状态偏差



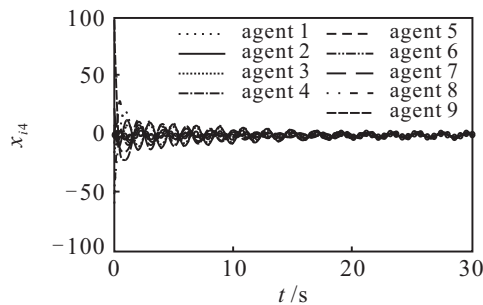
(a) 系统状态 x_{1i} 轨迹



(b) 系统状态 x_{2i} 轨迹



(c) 系统状态 x_{3i} 轨迹



(d) 系统状态 x_{4i} 轨迹

图4 基于比例控制的系统状态轨迹 ($i = 1, 2, \dots, 6$)

图2和图4中的圆圈表示一致性函数. 由图2、图3可以看出,系统在协议(2)的作用下虽然状态轨迹是

振荡的,但各状态最终收敛于一致性函数,协议(2)中的增益矩阵 K_1 用来调节系统的收敛轨迹, K_2 和PID参数保证系统实现一致. 图4、图5表明纯比例控制很难消除智能体之间的状态偏差,而且会导致振荡更为剧烈.但在PID控制器的作用下,系统之间的稳态误差最终趋向于零,而且振荡幅度相对较小.

6 结论

本文主要研究了任意阶线性连续时间多智能体系统存在时变时延的状态一致性,基于分布式PID控制提出了新的一致性协议. 利用状态空间分解法确定了系统的相对运动和绝对运动,并以此给出了一致函数的显示表达式. 通过可扩充性方法使得求解增益矩阵时所需计算的线性矩阵不等式的数量与群系统个体数量无关,极大提高了计算效率. 仿真结果验证了所提出的协议的有效性,表明了系统的一致性与状态反馈矩阵以及PID参数有关.

参考文献(References)

- [1] 王振华. 具有通信时滞的线性多智能体系统的趋同[D]. 济南: 山东大学控制科学与工程学院, 2015: 63-65.
(Wang Z H. Consensus of linear multi-agent systems with communication delay[D]. Ji'nan: School of Control Science and Engineering, Shandong University, 2015: 63-65.)
- [2] Xie D M, Chen J H. Consensus problem of data-sampled networked multi-agent systems with time-varying communication delays[J]. Trans of the Institute of Measurement and Control, 2013, 35(6): 753-763.
- [3] Wang C Y, Zuo Z Y, Sun J Y, et al. Consensus disturbance rejection for Lipschitz nonlinear multi-agent systems with input delay: A DOBC approach[J]. J of the Franklin Institute, 2017, 354(1): 298-315.
- [4] Tian Y P, Liu C L. Robust consensus of multi-agent systems with diverse input delays and asymmetric interconnection perturbations[J]. Automatica, 2009, 45(5): 1347-1353.
- [5] Li Z X, Ji H B. Robust delay-dependent H_∞ consensus

- control for multi-agent systems with input delays[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(11): 2556-2562.
- [6] 张庆杰, 沈林成, 朱华勇. 多智能体系统实现鲁棒一致的时延相关稳定判据[J]. *控制与决策*, 2012, 27(4): 584-592.
(Zhang Q J, Shen L C, Zhu H Y. Delay-dependent stability criteria for robust consensus of multi-agent systems[J]. *Control and Decision*, 2012, 27(4): 584-592.)
- [7] Sun Y G, Wang L. Consensus of multi-agent systems in directed networks with nonuniform time-varying delays[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2009, 54(7): 1607-1613.
- [8] 何铭凯, 黄子轩, 柯承宇, 等. 时延二阶多智能体系统的领导者-跟随一致性[J]. *电子信息与计算机科学*, 2013, 3(10): 3.
(He M K, Huang Z X, Ke C Y, et al. Leader-follower consensus of the second-order multi-agent systems with time delays[J]. *J of Henan Science and Technology*, 2013, 3(10): 3.)
- [9] 杨琳, 刘杨. 线性时滞多智能体系统的最优一致性研究[J]. *中国科技论文在线*, 2015, 10(2): 213-217.
(Yang L, Liu Y. Optimal consensus control of multi-agent systems with time delay[J]. *Science Paper Online*, 2015, 10(2): 213-217.)
- [10] Hou B, Sun F C, Li H B, et al. Consensus of second-order multi-agent systems with time-varying delays and antagonistic interactions[J]. *Tsinghua Science and Technology*, 2015, 20(2): 205-211.
- [11] 梁有明, 刘成林, 刘飞. 具有不同输入时延的多智能体系统的一致性[J]. *东南大学学报: 自然科学版*, 2010, 40(1): 121-126.
(Liang Y M, Liu C L, Liu F. Consistence of multi-agent systems with diverse input delays[J]. *J of Southeast University: Natural Science Edition*, 2010, 40(1): 121-126.)
- [12] Bliman P A, Ferrari-Trecate G. Average consensus problems in networks of agents with delayed communications[J]. *Automatica*, 2008, 44(8): 1985-1995.
- [13] Lin P, Jia Y M. Consensus of a class of second-order multi-agent systems with time-delay and jointly-connected topologies[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2010, 55(3): 778-784.
- [14] Wen G H, Duan Z S, Yu W W, et al. Consensus of second-order multi-agent systems with delayed nonlinear dynamics and intermittent communications[J]. *Int J of Control*, 2013, 86(2): 322-331.
- [15] Wang Z X, Du D J, Fei M R. Average consensus in directed networks of multi-agents with uncertain time-varying delays[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(11): 2602-2608.
- [16] 孙凤兰, 关治洪. 具有变通信时延的多智能体系统的平均一致性[J]. *华中科技大学学报: 自然科学版*, 2011, 39(7): 71-75.
(Sun F L, Guan Z H. Average consensus of multi-agent systems with variable communication delays[J]. *J of Huazhong University of Science & Technology: Natural Science Edition*, 2011, 39(7): 71-75.)
- [17] 张庆杰, 沈林成, 朱华勇. 具有多个通信时延的一类二阶多智能体系统平均一致性[J]. *控制与决策*, 2011, 26(10): 1485-1492.
(Zhang Q J, Shen L C, Zhu H Y. Average consensus of a class of second order multi-agent systems with multiple communication delays[J]. *Control and Decision*, 2011, 26(10): 1485-1492.)
- [18] 宋莉, 伍清河. 具有多时变时滞的多智能体系统在切换拓扑下的平均一致性[J]. *控制与决策*, 2013, 28(12): 1811-1816.
(Song L, Wu Q H. Average consensus of multi-agent systems with multiple time-varying delays and switching topologies[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(12): 1811-1816.)
- [19] Cai N, Xi J, Zhong Y. Swarm stability of high-order linear time-invariant swarm systems[J]. *IET Control Theory & Application*, 2010, 5(2): 4483-4487.
- [20] Lin P, Jia Y M. Average consensus in networks of multi-agents with both switching topology and coupling time-delay[J]. *Physica A Statistical Mechanics & Its Applications*, 2008, 387(1): 303-313.
- [21] Zhang X M, Wu M, She J H, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadelphia: SIAM, 1994: 65-66.
- [22] Moon Y S, Park P, Kwon W H, et al. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems[J]. *Int J of Control*, 2004, 74(14): 1447-1455.
- [23] Li Z K, Duan Z S, Huang L. H_∞ control of networked multi-agent systems[J]. *J of Systems Science and Complexity*, 2009, 22(1): 35-48.
- [24] Liu Y, Jia Y. H_∞ consensus control of multi-agent systems with switching topology: A dynamic output feedback protocol[J]. *Int J of Control*, 2010, 83(3): 527-537.