

混合值逻辑网络的集合稳定

冯俊娥[†], 贾 淼

(山东大学 数学学院, 济南 250100)

摘 要: 逻辑系统的集合稳定性是基于全局稳定性给出的概念, 它研究系统是否能够稳定到某一个状态集合. 对此, 主要研究混合值逻辑网络的集合稳定性. 首先, 介绍混合值逻辑网络, 并运用矩阵半张量积将其转化为离散代数系统以便于进一步研究; 然后, 介绍系统不变子集的概念, 并给出寻找最大不变子集的方法, 在此基础上给出系统集合稳定的充分必要条件; 最后, 考察系统部分状态的一致稳定性, 并将其转化为系统的集合稳定问题, 同时通过数值例子加以验证.

关键词: 混合值; 逻辑网络; 半张量积; 最大不变子集; 集合稳定; 部分状态

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Set stability of mix-valued logical networks

FENG Jun-e[†], JIA Miao

(School of Mathematics, Shandong University, Ji'nan 250100, China)

Abstract: On the basis of the global stability of mix-valued logical networks, the concept of set stability is proposed, which determines whether a given system converges to a given subset. This paper investigates the set stability of mix-valued logical networks. Firstly, the mix-valued logical networks are introduced, which are translated into discrete linear dynamic equations by using the semi-tensor product of matrices. Then, the concept of invariant subsets is introduced, and a method of searching for the largest invariant subset is proposed. Based on above, a necessary and sufficient condition for set stability of the concerned networks is developed. Finally, the stability of partial states is proposed, and is converted to the study of set stability for a certain subset. A numerical example is given to illustrate the effectiveness of the obtained results.

Keywords: mix-valued; logical network; semi-tensor product; largest invariant subset; set stability; partial states

0 引 言

1969 年, Kauffman^[1] 首次提出了布尔网络的概念, 并将其应用到变量只能取 1 或 0 的基因调控网络, 其中 1 表示该基因可以表达, 0 表示该基因不能表达. 该模型的提出很好地解释了基因与细胞之间的动态关系, 对于物种基因代码的研究具有很大的贡献^[2-3]. 因此, 研究布尔网络在理论和实际应用中都具有重要的意义. 由于布尔网络是一个逻辑演化系统, 一度没有系统而有效的工具来分析该模型. 近年来, Cheng 等^[4] 提出了矩阵半张量积的概念. 运用矩阵半张量积, 布尔逻辑方程可以转化为离散动态方程, 更便于描述和研究. 基于此, 一些经典的系统理论和方法都可用于研究布尔网络. 与线性系统类似,

布尔网络的一些性质得到广泛讨论, 包括其拓扑结构^[5]、能控能观性^[6-7]、稳定性和镇定性^[8-9] 以及最优控制^[10-11] 等.

在经典的逻辑系统中, 每个变量的取值非此即彼, 只有 0 (假) 和 1 (真); 而在混合值逻辑系统中, 变量的取值范围是 3 个或者 3 个以上的值. 实际上, 混合值逻辑网络是布尔网络的推广, 在实际生活中有着更广泛的应用^[12-13]. 例如在博弈论中, 玩家策略集的对策个数往往不全相同, 可通过混合值逻辑网络建立博弈论模型. 因此, 对混合值逻辑网络的研究很有必要.

在逻辑系统领域中, 对于稳定性的研究是一个重要的研究方向. 事实上, 逻辑系统的稳定性是一种形式上的离散序列迭代的收敛性. 通过研究其稳定

收稿日期: 2018-03-29; 修回日期: 2018-06-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61773371).

责任编委: 卢剑权.

作者简介: 冯俊娥 (1971—), 女, 教授, 博士生导师, 从事逻辑网络、奇异系统以及模糊系统等研究; 贾淼 (1994—), 女, 硕士生, 从事布尔网络控制理论及应用的研究.

[†]通讯作者. E-mail: fengjune@sdu.edu.cn.

性,使得某些特定系统稳定至一个理想的状态.例如,在基因网络中,通过某些干预,使状态稳定至健康状态.文献[8]研究了布尔网络的稳定性与镇定性问题,给出了布尔网络全局稳定的条件.基于逻辑系统全局稳定性,对于系统的集合稳定性研究也是一个重要方向.不同的是,全局稳定表示系统稳定到某一个固定状态,而集合稳定则表示系统稳定至某一个状态集合.文献[14]研究了布尔网络的集合稳定性与集合镇定性问题.研究集合的稳定性问题可以将一些复杂问题进行简化,例如逻辑系统的同步性^[15]、部分状态一致稳定性^[16]等均可以通过矩阵半张量积转化为集合的稳定性研究.

本文研究混合值逻辑网络.在最大不变子集的基础上研究混合值逻辑网络的集合稳定性.将混合值逻辑网络的集合稳定性应用到部分目标状态一致稳定性上,并给出数值例子进行验证.

1 预备知识

本文将用到以下一些记号:

- 1) N : 非负整数的集合.
- 2) $\mathcal{M}_{m \times n}$: $m \times n$ 维实矩阵的集合.
- 3) $\mathcal{B}_{m \times n}$: 所有元素非0即1的 $m \times n$ 维矩阵的集合,称为布尔矩阵.
- 4) I_n : $n \times n$ 维单位矩阵的集合.
- 5) δ_n^i : 单位矩阵 I_n 的第 i 列.
- 6) $\Delta_n := \{\delta_n^i | i = 1, 2, \dots, n\}$.
- 7) $\mathcal{D}_k := \left\{1 = T, \frac{k-2}{k-1}, \dots, \frac{1}{k-1}, 0 = F\right\}$.
- 8) $\text{Col}_i(L)$ [$\text{Row}_i(L)$]: 矩阵 L 的第 i 列 [行].
- 9) 称矩阵 $L \in \mathcal{M}_{m \times n}$ 为逻辑矩阵,如果满足 $\text{Col}_i(L) \in \Delta_m, i = 1, 2, \dots, n$, 则可将其简写为 $[\delta_m^{i_1}, \delta_m^{i_2}, \dots, \delta_m^{i_n}] := \delta_m[i_1, i_2, \dots, i_n]$. 记 $\mathcal{L}_{m \times n}$ 为 $m \times n$ 维逻辑矩阵的集合.
- 10) $\mathbf{1}_n$: 所有元素为1的 n 维列向量.
- 11) 对于 $x \in \mathcal{B}_{m \times 1}$, 定义 $\varphi(x) = \{z \in \Delta_m | z \wedge x = z\}$, 其中 \wedge 代表逻辑运算“交”. 定义 $\varphi^T(x) = \varphi(x^T), \forall x \in \mathcal{B}_{1 \times n}$. 例如, $x = [0 \ 1 \ 1 \ 0]^T$, 则 $\varphi(x) = \{[0 \ 1 \ 0 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T\}$.
- 12) 布尔矩阵的布尔加运算 $+_{\mathcal{B}}$ 为

$$\begin{cases} x +_{\mathcal{B}} y = x \vee y, \forall x, y \in \mathcal{D}; \\ X +_{\mathcal{B}} Y = (x_{ij} +_{\mathcal{B}} y_{ij}) \in \mathcal{B}_{m \times n}, \\ \forall X, Y \in \mathcal{B}_{m \times n}. \end{cases}$$

2 混合值逻辑网络

在经典的逻辑问题中,每个变量的取值非此即彼,只有0(假)和1(真);而在混合值逻辑中,变量的取

值范围是3个或者3个以上的值.本节给出混合值逻辑网络的定义,并运用矩阵的半张量积得到该系统的代数表达形式.

定义1^[12] 设 $x_i \in \mathcal{D}_{k_i}, i = 1, 2, \dots, n$, 若 $k_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 不完全相同,则称

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) : \prod_{i=1}^n \mathcal{D}_{k_i} \rightarrow \mathcal{D}_{k_0} \quad (1)$$

为混合值逻辑函数.存在一个唯一矩阵 $M_f \in \mathcal{L}_{k_0 \times k}$, $k = \prod_{i=1}^n k_i$ 使得 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = M_f \times_{i=1}^n x_i$, 其中 M_f 为 f 的结构矩阵.

下面给出混合值逻辑网络的定义.

定义2^[12] 考虑一个混合值逻辑网络

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ x_2(t+1) = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \end{cases} \quad (2)$$

其中: $x_i(t) \in \mathcal{D}_{k_i}, f_i : \prod_{i=1}^n \mathcal{D}_{k_i} \rightarrow \mathcal{D}_{k_0}$ 为逻辑函数, $i = 1, 2, \dots, n$. 若 $k_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 不完全相同,则系统(2)称为混合值逻辑网络.

令 $x(t) = \times_{i=1}^n x_i(t) \in \Delta_k, k = \prod_{i=1}^n k_i$. 记 $M_i \in \mathcal{L}_{k_i \times k_i}$ 为逻辑函数 $f_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的结构矩阵.于是系统(2)的代数表示为

$$\begin{cases} x_1(t+1) = M_1 x(t), \\ x_2(t+1) = M_2 x(t), \\ \vdots \\ x_n(t+1) = M_n x(t). \end{cases} \quad (3)$$

其等价代数表示形式为

$$x(t+1) = Lx(t), \quad (4)$$

其中 L 为系统(2)的状态转移矩阵,满足

$$L = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \in \mathcal{L}_{k \times k}.$$

运用矩阵半张量积,将复杂的混合值逻辑网络转化为一般的离散动态系统(4),有助于分析研究.

3 集合稳定性

3.1 集合稳定性定义

混合值逻辑网络的稳定可以看作一个离散迭代过程的收敛.如果对于任意的状态初始值,一个确定的混合值逻辑网络都可以全局收敛到一个不动点 $X_e = (x_1^e, x_2^e, \dots, x_n^e) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{D}_{k_i}$ (代数形式为 $x_e \in \Delta_k$), 则称它是全局稳定的.也就是,该网络只有一个

吸引子作为不动点. 下面给出混合值逻辑网络全局稳定的定义.

定义3(全局稳定) 称系统(4)全局稳定于不动点 $x_e \in \Delta_k$, 若对于任意状态初始值 $x(0) \in \Delta_k$, 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x_0) = x_e.$$

注1 不失一般性, x_e 可以假设为 δ_k^k , 否则, 坐标变换^[4]可以使其满足 $x_e = \delta_k^k$.

对于系统(4), 集合稳定也可以看作一个离散迭代过程的收敛, 不同的是, 全局稳定表示系统稳定到某一个固定状态, 而集合稳定则表示系统稳定到某一个状态集合. 定义如下.

定义4(集合稳定) 令 $M \subseteq \Delta_k$, 系统(4)称为集合 M 稳定的, 若对于任意初始值 $x_0 \in \Delta_k$, 存在 $T(x_0) \in \mathbf{N}$, 使得

$$x(t; x_0) \in M, \forall t \geq T(x_0). \quad (5)$$

3.2 最大不变子集

首先给出集合不变子集的概念.

定义5(不变子集) 称 $C \subseteq \Delta_k$ 为系统(4)的不变子集, 如果满足

$$x(t; x_0) \in C, \forall t \in \mathbf{N}, \forall x_0 \in C.$$

即 C 是系统(4)的不变子集当且仅当

$$L(C) = \{Lx \mid x \in C\} \subseteq C.$$

由定义5知, 对于系统(4), 任意两个不变子集的并集仍是一个不变子集. 下面给出最大不变子集的定义.

定义6(最大不变子集)^[4] 对于一个给定的集合 M , $I(M)$ 表示包含在集合 M 里的最大不变子集, 若 $I(M)$ 满足

$$I(M) = \{x \in M \mid Lx \in M, \dots, L^i x \in M, \dots\},$$

$$\forall i \in \mathbf{N}.$$

易知, $I(M)$ 是包含在集合 M 内所有不变子集(包括平衡点、极限环)的并集. 特殊地, 当给定集合 M 是系统(4)的不变子集时, $I(M) = M$.

引理1 假设 $q = |M|$. 构造布尔矩阵 $M_0 \in \mathcal{B}_{k \times k}$, 其列满足

$$\text{Col}_j(M_0) = \begin{cases} \delta_k^j, & \delta_k^j \in M; \\ \delta_k^0, & \delta_k^j \notin M. \end{cases} \quad (6)$$

定义一个布尔矩阵序列 $M_i \in \mathcal{B}_{k \times k} (1 \leq i \leq q)$ 为

$$M_i := M_0 L M_{i-1} = (M_0 L)^i M_0, \quad 1 \leq i \leq q,$$

则有

$$I(M) = \varphi^T[\text{Row}_\Sigma(M_q)].$$

其中 $\text{Row}_\Sigma(M_q)$ 表示对布尔矩阵 M_q 的行进行布尔

加运算.

证明 由 M_0 的定义可知, 对于任意的 $x \in \Delta_k$, 有

$$M_0 x = \begin{cases} x, & \Leftrightarrow x \in M; \\ 0, & \Leftrightarrow x \notin M. \end{cases}$$

由 M_j 的定义可知

$$\text{Col}(M_j) \subseteq \Delta_k \cup \{\delta_k^0\}, \quad x \in \varphi^T(\text{Row}_\Sigma(M_j)),$$

当且仅当 $M_j x \neq 0$. 举一个简单的例子, 假设 $k = 4$, $M = \{\delta_4^1, \delta_4^3\}$, $L = \delta_4[3 \ 1 \ 2 \ 4]$, 则

$$M_0 = \delta_4[1 \ 0 \ 3 \ 0],$$

$$\text{Row}_\Sigma(M_0) = [1 \ 0 \ 1 \ 0],$$

$$\varphi^T[\text{Row}_\Sigma(M_0)] = \{\delta_4^1, \delta_4^3\},$$

显然, $M_0 \delta_4^1 = \delta_4^1$, $M_0 \delta_4^3 = \delta_4^3$. 对于布尔矩阵 M_1 , 有

$$M_1 = M_0 L M_0 = \delta_4[3 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$$\text{Row}_\Sigma(M_1) = [1 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$$\varphi^T[\text{Row}_\Sigma(M_1)] = \{\delta_4^1\},$$

显然, $M_1 \delta_4^1 \neq 0$.

下面证明对于任意的 $j \in \mathbf{N}$, 有

$$\varphi^T[\text{Row}_\Sigma(M_j)] = \{x \in M \mid Lx \in M, \dots, L^j x \in M\}. \quad (7)$$

假设 $x \in \varphi^T[\text{Row}_\Sigma(M_j)]$, 可得

$$M_j x = (M_0 L)^j M_0 x \neq 0 \in \Delta_k,$$

所以 $M_0 x \neq 0$, 由 M_0 的性质知 $M_0 x = x$. 相似地, $M_j x$ 又可表示为

$$M_j x = (M_0 L)^{j-1} M_0 L x \in \Delta_k,$$

可得 $M_0 L x = Lx, \dots$. 重复以上过程, 可得一系列

$$M_0 x = x, \quad M_0 L x = Lx, \quad \dots, \quad M_0 L^j x = L^j x.$$

因此

$$\varphi^T[\text{Row}_\Sigma(M_j)] \subseteq \{x \in M \mid Lx \in M, \dots, L^j x \in M\}$$

成立. 反过来, 假设 $x \in M$ 满足等式(7)右边, 由 M_0 的性质可得 $M_0 x = x, M_0 L x = Lx, \dots, M_0 L^j x = L^j x$. 递推可得

$$\begin{aligned} M_j x &= (M_0 L)^j M_0 x = (M_0 L)^j x = \\ & (M_0 L)^{j-1} M_0 L x = (M_0 L)^{j-1} L x = \\ & \dots = L^j x \in \Delta_k, \end{aligned}$$

即 $x \in \varphi^T[\text{Row}_\Sigma(M_j)]$. 因此

$$\{x \in M \mid Lx \in M, \dots, L^j x \in M\} \subseteq \varphi^T[\text{Row}_\Sigma(M_j)]$$

成立. 等式(7)得证.

由式(7)可知, 当 $j = q$ 时, 有

$$\varphi^T[\text{Row}_\Sigma(M_q)] = \{x \in M | Lx \in M, \dots, L^q x \in M\}.$$

由 M 的定义可知 $I(M) \subseteq \varphi^T[\text{Row}_\Sigma(M_q)]$. 反过来, 假设 $x_0 \in \varphi^T[\text{Row}_\Sigma(M_q)]$, 则 $L^t x_0 \in M, 0 \leq t \leq q$.

已知集合 M 里有 q 个元素, 故

$$L^q x \in \{x, Lx, \dots, L^{q-1}x\}.$$

这意味着随着时间的增加, 状态 x 的轨迹会进入一个循环域 M . 因此 $\varphi^T[\text{Row}_\Sigma(M_q)] \subseteq I(M)$.

综上, 有

$$I(M) = \varphi^T[\text{Row}_\Sigma(M_q)]. \quad \square$$

由引理1知, 通过给出布尔矩阵 $M_i (1 \leq i \leq q)$ 的构造形式, 一步一步直至构造出 M_q , 可以逐渐将包含在 M 中的最大不变子集筛选出来. 这是非常简洁而有效的.

3.3 集合稳定性

定理1 系统(4)是集合 M 稳定的, 当且仅当 $\text{Col}(L^k) \subseteq M$.

系统(4)的解可以表示为 $x(t; x_0) = L^t x_0$. 已知状态 $x(t) \in \Delta_k$ 一共有 k 个可能取值, 经过 k 步, 一定会有状态值的重复. $\text{Col}(L^k) \subseteq M$ 可以确保经过 k 步, 状态 $x(k) = L^k x_0$ 仍属于 M , 即系统(4)是集合 M 稳定的.

由 M 的最大不变子集的定义可知, 系统(4)是集合 M 稳定的等价于系统(4)是集合 $I(M)$ 稳定的. 于是给出如下的引理.

引理2 令 $M \subseteq \Delta_k$, 系统(4)是集合 M 稳定的, 当且仅当系统(4)是集合 $I(M)$ 稳定的.

定理2 系统(4)是集合 M 稳定的, 当且仅当

$$\text{Row}_\Sigma[(M_0 L)^q M_0 L^p] = \mathbf{1}_k^T. \quad (8)$$

其中: $q = |M|, p = k - |I(M)|$.

证明 充分性. 由引理1可知

$$I(M) = \varphi^T[\text{Row}_\Sigma(M_q)] = \varphi^T[\text{Row}_\Sigma((M_0 L)^q M_0)].$$

假如式(8)成立, 则当 $t = p$ 时, 对于任意的初始值 $x_0 \in \Delta_k$, 满足

$$M_q x(t; x_0) = (M_0 L)^q M_0 L^t x_0 \neq 0. \quad (9)$$

因此 $x(t; x_0) \in \varphi^T[\text{Row}_\Sigma(M_q)]$, 即 $x(t; x_0) \in I(M)$ 成立. 由集合稳定的定义知, 此时系统(4)是集合 $I(M)$ 稳定的. 进而由引理2知, 系统(4)是集合 M 稳定的.

必要性. 假设系统(4)是集合 M 稳定的. 由引理2知, 系统(4)是集合 $I(M)$ 稳定的, 即对于任意初始值 $x_0 \in \Delta_k, x(p; x_0) = L^p x_0 \in I(M)$. 由引理1知 $(M_0 L)^q M_0 L^p x_0 \neq 0$, 显然式(8)成立. \square

4 部分状态稳定

由系统全局稳定的定义可知, 给定一个混合值逻辑网络, 其稳定性关注的是每个状态都稳定到一个固定值. 而部分状态变量的一致稳定性则是一种特殊的稳定性概念, 它只关注状态变量中部分目标变量的稳定性. 利用矩阵的半张量积, 可将系统的部分状态变量一致稳定转化为系统的集合稳定问题.

为叙述方便, 将状态变量

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{D}_{k_i}$$

表示为 $x = (x^1, x^2)$. 其中

$$x^1 = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^p \mathcal{D}_{k_i},$$

$$x^2 = (x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n) \in \prod_{i=p+1}^n \mathcal{D}_{k_i}.$$

下面给出混合值逻辑网络(2)的部分状态 x^1 的一致稳定性定义.

定义7^[16] 称系统(2)为部分状态 x^1 一致稳定的, 如果对于任意的状态初始值 $x(0) = x_0 = (x_0^1, x_0^2)$, 存在逻辑变量 $x_e^1 \in \prod_{i=1}^p \mathcal{D}_{k_i}$, 使得满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x^1(t, t_0, x_0) = x_e^1. \quad (10)$$

注2 若所考虑的部分目标变量为 $x_{i_1}(t), \dots, x_{i_p}(t)$, 则可采用坐标变换将其转化为前 p 个变量. 同样, 可采用坐标变换使部分状态变量 x^1 一致稳定到逻辑变量 $x_e^1 = (0, \dots, 0) \in \prod_{i=1}^p \mathcal{D}_{k_i}$.

分别对状态 x^1, x^2 进行半张量积运算, 记 $k = k^1 \cdot k^2$. 其中: $k^1 = \prod_{i=1}^p k_i, k^2 = \prod_{i=p+1}^n k_i$. 记 $X = \times_{i=1}^n x_i = X^1 \times X^2 \in \Delta_k$. 其中: $X^1 = \times_{i=1}^p x_i \in \Delta_{k^1}, X^2 = \times_{i=p+1}^n x_i \in \Delta_{k^2}$. 系统(2)可以表示为如下等价代数形式:

$$\begin{cases} X^1(t+1) = L_1 X^1(t) X^2(t), \\ X^2(t+1) = L_2 X^1(t) X^2(t). \end{cases} \quad (11)$$

运用矩阵的半张量积, 从混合值逻辑网络的代数形式角度重新阐述部分状态一致稳定性.

定义8^[16] 称系统(11)部分状态 X^1 一致稳定于 $X_e^1 = \delta_{k^1}^1$, 若对于任意的状态初始值 $X(0) = X_0 = X_0^1 \times X_0^2$, 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X^1(t, t_0, X_0) = \delta_{k^1}^1. \quad (12)$$

运用矩阵半张量积, 将系统部分状态变量一致稳定性问题等价转化为系统集合稳定性问题.

定理3 若系统(11)部分状态 X^1 一致稳定于

$X_e^1 = \delta_{k_1}^{k_1}$, 则系统(11)是集合 M 稳定的, 其中 $M = \{\delta_k^{k-k^2+1}, \dots, \delta_k^{k-1}, \delta_k^k\}$.

证明 若系统(11)部分状态 X^1 一致稳定于 $X_e^1 = \delta_{k_1}^{k_1}$, 即对于任意的状态初始值 $X(0)$, 式(12)成立, 则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t, t_0, X_0) = \delta_{k_1}^{k_1} \times \lim_{t \rightarrow \infty} X^2(t, t_0, X_0). \quad (13)$$

已知系统(11)的部分状态 X^1 一致稳定性与 X^2 无关, 即当 $t \rightarrow \infty$ 时, $X^2(t)$ 的取值是任意的. 运用矩阵半张量积, $X^2(t)$ 可从集合 $\{\delta_{k_2}^1, \delta_{k_2}^2, \dots, \delta_{k_2}^{k_2}\}$ 中取值. 由式(13)知, 当 $\lim_{t \rightarrow \infty} X^2(t, t_0, X_0) = \delta_{k_2}^1$ 时, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t, t_0, X_0) = \delta_{k_1}^{k_1} \times \delta_{k_2}^1 = \delta_k^{k-k^2+1}.$$

当 $\lim_{t \rightarrow \infty} X^2(t, t_0, X_0) = \delta_{k_2}^2$ 时, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t, t_0, X_0) = \delta_{k_1}^{k_1} \times \delta_{k_2}^2 = \delta_k^{k-k^2+2}.$$

... , 以此类推, 当 $\lim_{t \rightarrow \infty} X^2(t, t_0, X_0) = \delta_{k_2}^{k_2}$ 时, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t, t_0, X_0) = \delta_{k_1}^{k_1} \times \delta_{k_2}^{k_2} = \delta_k^k.$$

故系统(11)稳定于集合 $\{\delta_k^{k-k^2+1}, \dots, \delta_k^{k-1}, \delta_k^k\}$. \square

例1 考虑一个含有3个状态变量的混合值逻辑网络

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f(x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \\ x_2(t+1) = f(x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \\ x_3(t+1) = f(x_1(t), x_2(t), x_3(t)). \end{cases} \quad (14)$$

其中: $x_1, x_3 \in \mathcal{D}_2, x_2 \in \mathcal{D}_3$. 系统(14)的状态转移矩阵为

$$L = \delta_{12}[4 \ 3 \ 7 \ 2 \ 8 \ 9 \ 11 \ 6 \ 10 \ 12 \ 12 \ 11].$$

下面判断系统(14)是否关于部分状态 (x_1, x_2) 一致稳定. 因 $k^1 = 6, k^2 = 2$, 故考察系统部分状态的一致稳定性转化为考察系统的集合 M 稳定性, 其中 $M = \{\delta_{12}^{11}, \delta_{12}^{12}\}$.

由引理1知

$$M_0 = \delta_{12}[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 11 \ 12].$$

已知 $q = |M| = 2$, 依次构造布尔矩阵序列 M_1 和 M_2 , 有 $M_1 = M_0 L M_0 = M_0, M_2 = M_0 L M_1 = M_0$. 因此, 可求得包含在 M 中的最大不变子集

$$I(M) = \varphi^T[\text{Row}_\Sigma(M_q)] = \{\delta_{12}^{11}, \delta_{12}^{12}\}.$$

由定理2, $p = 10$, 有

$$L^{10} = \delta_{12}[12 \ 12 \ 11 \ 11 \ 11 \ 11 \ 12 \ 12 \ 12 \ 11 \ 11 \ 12], \\ (M_0 L)^q M_0 L^p = M_0 L^{10} = L^{10},$$

易得 $\text{Row}_\Sigma[(M_0 L)^q M_0 L^p] = \mathbf{1}_k^T$. 因此, 系统(14)是关于集合 M 稳定的, 由定理3, 系统(14)关于部分状态 (x_1, x_2) 一致稳定.

5 结论

本文从最大不变子集的角度出发, 研究了混合值逻辑网络的集合稳定性, 给出了集合稳定的充分必要条件. 部分状态一致稳定性可以通过矩阵半张量积转化为集合的稳定性研究. 最后, 通过具体数值例子进行验证, 表明了本文结果的有效性.

参考文献(References)

- [1] Kauffman S. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets[J]. J of Theoretical Biology, 1969, 22(3): 437-467.
- [2] Davidson E, Rast J, Oliveri P, et al. A genomic regulatory network for development[J]. Science, 2002, 295(5560): 1669-1678.
- [3] Harris S, Sawhill B, Wuensche A, et al. A model of transcriptional regulatory networks based on biases in the observed regulation rules[J]. Complexity, 2002, 7(4): 23-40.
- [4] Cheng D, Qi H, Zhao Y. Analysis and control of Boolean networks: A semi-tensor product approach[J]. Acta Automatica Sinica, 2011, 37(5): 529-540.
- [5] Cheng D, Qi H. A linear representation of dynamics of Boolean networks[J]. IEEE Trans on Automatica Control, 2010, 48(10): 2251-2258.
- [6] Cheng D, Qi H. Controllability and observability of Boolean control networks[J]. Automatica, 2009, 45(7): 1659-1667.
- [7] Li F, Sun J. Controllability of higher order Boolean control networks[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 219(1): 158-169.
- [8] Cheng D, Qi H, Li Z, et al. Stability and stabilization of Boolean networks[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2011, 21(2): 134-156.
- [9] Bof N, Fornasini E, Valcher M. Output feedback stabilization of Boolean control networks[J]. Automatica, 2015, 57(1): 21-28.
- [10] Laschov D, Margaliot M. A maximum principle for single-input Boolean control networks[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2011, 56(4): 913-917.
- [11] Meng M, Feng J. Optimal control problem of singular Boolean control networks[J]. Int J of Control, Automation and Systems, 2015, 13(2): 266-273.
- [12] Cheng D, Zhao Y, Xu X. Mix-valued logic and its applications[J]. J of Shandong University, 2011, 46(10): 32-44.
- [13] Jia G, Meng M, Feng J. Function perturbation of mix-valued logical networks with impacts on limit sets[J]. Neurocomputing, 2016, 207(9): 428-436.
- [14] Guo Y, Wang P, Gui W, et al. Set stability and set stabilization of Boolean control networks based on invariant subsets[J]. Automatica, 2015, 61(11): 106-112.
- [15] Li R, Chu T. Complete synchronization of Boolean networks[J]. IEEE Trans on Neural Networks & Learning Systems, 2012, 23(5): 840-846.
- [16] Chen H, Sun L, Liu Y. Partial stability and stabilisation of Boolean networks[J]. Int J of Systems Science, 2016, 47(9): 2119-2127.