第 34 卷 第 2 期 控 制 与 决 策 Vol.34 No.2
2019 年 2 月 Control and Decision Feb. 2019

文章编号: 1001-0920(2019)02-0287-11 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2017.1210

勾股模糊偏好关系及其在群体决策中的应用

杨 艺[1,2], 钱桂生[3], 丁 恒[1], 李延来[1†], 吕红霞[1]

(1. 西南交通大学 交通运输与物流学院，成都 610031；2. 湖南商学院 大数据与互联网创新研究院，长沙 410205；3. 香港城市大学 系统工程与工程管理系，香港 999077)

摘 要: 以区间模糊偏好关系 (IVFPR) 和直觉模糊偏好关系 (IFPR) 的理论框架为依据, 将勾股模糊数 (PFN) 引入偏好关系中, 定义勾股模糊偏好关系 (PFPR) 和加性一致性 PFPR. 然后, 提出标准化勾股模糊权重向量 (PFWV) 的概念, 并给出构造加性一致性 PFPR 的转换公式. 为获取任意给定的 PFPR 的权重向量, 建立以给定的 PFPR 与构造的加性一致性 PFPR 偏差最小为目标的优化模型. 针对多个勾股模糊偏好关系的集结, 利用能够有效处理极端值并满足关于序关系单调的勾股模糊加权二次 (PFWQ) 算子作为集结工具. 进一步, 联合 PFWQ 算子和目标优化模型提出一种群体决策方法. 最后, 通过案例分析表明所提出方法的实用性和可行性.

关键词: 勾股模糊偏好关系；目标优化模型；勾股模糊加权二次算子；群体决策

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Pythagorean fuzzy preference relations and its application to group decision making

YANG Yi[1,2], *QIAN Gui-sheng*[3], *DING Heng*[1], *LI Yan-lai*[1†], *LYU Hong-xia*[1]

(1. School of Transportation and Logistics，Southwest Jiaotong University，Chengdu 610031，China；2. Institute of Big Data and Internet Innovation，Hu'nan University of Commerce，Changsha 410205，China；3. Department of Systems Engineering and Engineering Management，City University of Hong Kong，Hong Kong 999077，China)

Abstract: Based on the theoretical framework of interval-valued fuzzy preference relation (IVFPR) and intuitionistic fuzzy preference relation (IFPR), the Pythagorean fuzzy number (PFN) is introduced into the preference relation, and the concepts of Pythagorean fuzzy preference relation (PFPR) and additive consistent PFPR are proposed. Then, the definition of normalized Pythagorean fuzzy weight vector (PFWV) is proposed, and a conversion formula is provided to convert this PFWV into the additive consistent PFPR. For any given PFPR, a goal programming model is developed to obtain its Pythagorean fuzzy weights by minimizing its deviation from the constructed additive consistent PFPR. Because the Pythagorean fuzzy weighted quadratic (PFWQ) operator can effectively deal with extremes and satisfy the monotonicity with respect to the order relation, it is used for the aggregation of multiple PFPRs. A group decision making approach is proposed by using the PFWQ operator and the goal programming model, and a practice example is given to illustrate the practicability and feasibility of the proposed approach.

Keywords: Pythagorean fuzzy preference relation；goal programming model；Pythagorean fuzzy weighted quadratic operator；group decision making

0 引 言

偏好关系 (Preference relation, PR) 是通过对备选方案的两两比较而构建的矩阵结构, 其每个元素表示一个方案相对于另一个方案的偏好程度[1]. 专家依据其对备选方案的认识来表征偏好和意见时, 不需要提供每个方案在每个指标 (属性) 下的单独评价值, 而是利用 PR 来表征方案两两对比的结果, 相对精炼而有效[2]. 传统的 PR 主要以 Saaty 的 1/9 ∼ 9 标度[1] 表征方案间的偏好程度. 而 1/9 ∼ 9 标度的局限性在于其对应的偏好信息为精确值, 在处理具有不确定性或信息不完备性的复杂决策问题时, 专家难以利用精确的标度值表征偏好. 为此, 适合处理不确定性问题的模糊集 (Fuzzy sets, FSs) 理论[3] 被引入偏好关系中, 相继涌现出模糊偏好关系 (Fuzzy preference relation, FPR)[4]

收稿日期: 2017-09-14；**修回日期:** 2018-03-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (71373222, 71371156)；湖南省重点实验室开放研究基金项目 (2017TP1026).

责任编委: 梁樑.

作者简介: 杨艺 (1990−), 男, 博士生, 从事模糊决策的研究；李延来 (1971−), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能控制与应用等研究.

†通讯作者. E-mail: Lylliyanlai@126.com.

和区间模糊偏好关系(Interval-valued fuzzy preference relation, IVFPR)[5]. 在客观事物含模糊性的复杂问题中, 专家掌握的信息不足以把握事物的真实状态, 其更倾向于描述事物隶属(或满足)某些特定属性的程度. 相比于传统的PR, 由模糊集和PR构成的FPR能够利用隶属值较为合理地表达和反馈专家的偏好. 在一些决策过程中, 因专家的知识结构、判断水平等主观因素的影响, 专家在构造判断矩阵时往往会提供一些区间隶属度值, 即区间模糊偏好信息[5]. 随着社会的不断发展与进步, 人类面临的属性决策问题也愈发错综复杂. 在一些决策问题中, 由于评价者对评价对象认知不足, 促使其认知结果通常表现为肯定、否定和犹豫等3个方面[6]. 面对此类情形, 决策者利用FPR / IVFPR(只含隶属度)表征方案的偏好时并不契合其认知结果. 为此, 基于由隶属度与非隶属度构成的直觉模糊集(Intuitionistic fuzzy sets, IFSs)[7], 文献[8]提出了直觉模糊偏好关系(Intuitionistic fuzzy preference relation, IFPR). IFPR能够从隶属度、非隶属度和犹豫度等3方面较为直观地反馈决策者的认知结果, 表征决策者偏好的不确定性.

近来, 作为IFS的拓展, Yager等[9-10]提出了勾股模糊集(Pythagorean fuzzy sets, PFSs). PFS保持了同时考虑隶属度和非隶属度的优势特征, 将隶属度函数μ与非隶属度函数ν构成的取值区域由三角形($\mu+\nu\leqslant 1$)扩充成四分之一圆($\mu^2+\nu^2\leqslant 1$). 区域扩充促使PFS的信息量约为IFS的1.57倍, 并保证任意的IFS都为PFS. 另外, 文献[11-12]表明IFS与只考虑隶属度的区间模糊集(IVFS)在数学上存在等价关系, 并提供了转换公式. 而相比于IVFPR, 上述提及的IFPR可以较直观地表征决策者的认知和偏好. 由于PFS延续了IFS的优势, 相比于IFS和IVFS而言, 其在处理决策问题中更具优势, 已有研究成果表明了PFS的适用性与灵活性[9-23]. 鉴于几类模糊集与偏好关系交叉融合的发展脉络(FPR、IVFPR和IFPR)以及PFS的优势特征, 本文拟将PFS引入偏好关系, 提出勾股模糊偏好关系(Pythagorean fuzzy preference relation, PFPR)的概念, 并研究PFPR下群体决策(Group decision making, GDM)问题.

基于偏好关系环境下的决策问题的核心包括如何定义偏好关系的一致性, 如何获取偏好关系的权重向量等. Wang等[24]定义了加性一致性IVFPR和标准化区间权重向量, 并提出了两者之间的转化关系. 对于任意给定的IVFPR, 构建出该IVFPR与加性一致性IVFPR偏差最小为目标的优化模型, 进而获取标准区间权重向量. 针对IFPR, Wang[25]定义了加性一致性IFPR和标准化直觉模糊权重向量, 并给出了两者之间的转化定理. 为获取任意给定的IFPR的标准化权重向量, 基于文献[24]中的IVFPR优化模型, 建立IFPR对应的目标优化模型并求解出标准化直觉模糊权重向量. 针对本文的PFPR的一致问题, 根据区间、直觉、勾股模糊集三者之间的转换关系, 以加性一致性IVFPR和加性一致性IFPR[5,8,24-25]为基, 定义加性一致性PFPR; 以标准化区间权重向量和标准化直觉模糊权重向量为基, 定义标准化勾股模糊权重向量(PFWV), 并给出标准PFWV构造加性一致性PFPR的转换公式. 在群体决策中, 因决策问题的复杂性以及评价者的知识或背景局限性, 并非每个评价者提供的偏好关系都能满足加性一致性条件. 因此, 针对任意给定的PFPR, 为获取其权重向量, 建立以给定的PFPR与构造的加性一致性PFPR偏差最小为目标的优化模型, 求解该目标优化模型以获取该偏好关系的勾股模糊权重向量.

在处理GDM问题时, 利用算子将一组带权重的个体评价矩阵集结成综合评价矩阵是核心步骤之一. 因此, 选择合理、有效的集结算子尤为关键. 针对勾股模糊数组的集结问题, Yager等[9-10]提出了勾股模糊加权平均(PFWA)算子、加权几何(PFWG)算子以及加权二次(PFWQ)算子. 基于交叉运算法则, 文献[19,23]构造了勾股模糊交叉加权平均(PFIWA)算子和几何(PFIWG)算子. 基于Einstein运算, 文献[22]构造了勾股模糊Einstein加权平均(PFEWA)算子.

为选取合理的算子集结勾股模糊偏好关系组, 本文将通过定理和实例对上述6类算子进行对比分析. 将从两个方面进行考察: 其一, 集结包含极端值($(0,1)$或$(1,0)$)的勾股模糊数组时, 集结结果是否合理; 其二, 算子是否关于序关系(基于记分函数与精确度函数所定义)单调. 经实例分析, PFWQ算子因其能够有效处理极端值并满足关于序关系单调而更适用于PFPR的集结. 为解决PFPR下的GDM问题, 基于PFWQ算子与目标优化模型, 本文将提出一种群体决策方法. 首先, 由专家主观权重与基于相似度的客观权重联合构成的综合权重, 利用PFWQ算子集结专家组提供的PFPR, 获取综合PFPR; 然后, 建立综合PFPR的目标优化模型, 利用数学软件解出与方案对应的勾股模糊权重向量, 并基于勾股模糊集的序关系获取方案的排序, 选出最优方案; 最后, 通过解决博士人才选拔的决策问题表明所提出方法的可行性和实用性.

1 预备知识

1.1 区间模糊集与直觉模糊集的相关概念

首先给出区间模糊集与直觉模糊集的相关定义.

定义1 [26] 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为给定的集合,则 X 上的区间模糊集 A 定义如下:

$$A=\{\langle x_i,[l_A(x_i),r_A(x_i)]\rangle|x_i\in X\}, \tag{1}$$

其中 $l_A(x_i)$ 和 $r_A(x_i)$ 分别为隶属度区间的上界和下界,且满足 $0\leqslant l_A(x_i)\leqslant r_A(x_i)\leqslant 1$. 称 $[l_A(x_i),r_A(x_i)]$ 为区间模糊数(IVFN),简记 $A=[l,r]$,其中 $0\leqslant l\leqslant r\leqslant 1$.

对于任意的区间模糊数 $A=[l,r]$,文献[11]定义了其中心 $\mathrm{center}(A)=(l+r)/2$ 以及不确定程度 $\mathrm{length}([l,r])=r-l$.

定义2 [7] 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为给定的集合,则 X 上的直觉模糊集 I 定义如下:

$$I=\{\langle x_i,\mu_I(x_i),v_I(x_i)\rangle|x_i\in X\}, \tag{2}$$

其中 $\mu_I(x_i)$ 和 $v_I(x_i)$ 分别表示元素 x_i 属于集合 I 的隶属度和非隶属度. 称二元组 $(\mu_I(x_i),v_I(x_i))$ 为直觉模糊数(IFN),简记为 $\beta=(\mu_I,v_I)$. 其中: $\mu_I,v_I\in[0,1]$; $\mu_I+v_I\leqslant 1$. $\pi_I=1-(\mu_I+v_I)$ 为 β 犹豫度.

为了比较直觉模糊数,其序关系定义如下.

定义3 [27] 设 $\alpha_i=(\mu_i,v_i)(i=1,2)$ 为两个直觉模糊数,有: 1) 若 $s_I(\alpha_1)<s_I(\alpha_2)$,则 $\alpha_1\prec_I\alpha_2$; 2) 若 $s_I(\alpha_1)=s_I(\alpha_2),h_I(\alpha_1)<h_I(\alpha_2)$,则 $\alpha_1\prec_I\alpha_2$; 3) 若 $s_I(\alpha_1)=s_I(\alpha_2),h_I(\alpha_1)=h_I(\alpha_2)$,则 $\alpha_1=\alpha_2$. 其中: $s_I(\alpha_i)=\mu_i-v_i$ 和 $h_I(\alpha_i)=\mu_i+v_i$ 分别为 α_i $(i=1,2)$ 的记分函数和精确度函数.

对于任意的直觉模糊数 $\alpha=(\mu,v)$,文献[12]提出,可将 α 通过如下方式替代成区间模糊数:

$$A=[r,l]=[\mu,1-v].$$

然后,基于IFN的记分函数/精确度函数以及IVFN的中心度/不确定度分析IFN与IVFN之间的替代关系[11],见表1.

表1 IFN与IVFN之间的替代关系

名称	直觉模糊数	区间模糊数
隶属度/非隶属度	(μ,v)	$[l,r]=[\mu,1-v]$
犹豫度/不确定度	$\pi_I=1-\mu-v$	$r-l=\mathrm{length}([r,l])$
记分函数	$\mu-v$	$r+l-1=2\mathrm{center}([r,l])-1$
精确度函数	$\mu+v=1-\pi_I$	$l-r+1=1-\mathrm{length}([r,l])$

对于区间模糊数 $A_i=[l_i,r_i](i=1,2)$,基于中心与不确定程度的概念,定义区间模糊数的序关系如下:

1) 若 $\mathrm{center}(A_1)<\mathrm{center}(A_2)$,则 $A_1\prec_{IV}A_2$;

2) 若 $\mathrm{center}(A_1)=\mathrm{center}(A_2),\mathrm{length}(A_1)>\mathrm{length}(A_2)$,则 $A_1\prec_{IV}A_2$;

3) 若 $\mathrm{center}(A_1)=\mathrm{center}(A_2),\mathrm{length}(A_1)=\mathrm{length}(A_2)$,则 $A_1=A_2$.

基于IFN和IVFN的序关系,易得如下定理.

定理1 (保序性) 设 $\alpha_i=(\mu_i,v_i)(i=1,2)$ 为两个直觉模糊数,若两个区间模糊数 $A_i(i=1,2)$ 满足 $A_i=[\mu_i,1-v_i](i=1,2)$,则有如下两个条件等价: 1) $\alpha_1\prec_I\alpha_2$; 2) $A_1\prec_{IV}A_2$.

定理1表明,转换后的区间模糊数仍然保持原有直觉模糊数之间的序关系. 为了方便,下面对一些常用符号进行简记:

$$[n]=\{1,2,\cdots,n\},\ [n]\backslash[i]=\{i+1,\cdots,n\}.$$

1.2 区间偏好关系与直觉模糊偏好关系

定义4 [5] 设 $\bar{R}$ 为定义在方案集 $X=\{X_i|i\in[n]\}$ 上区间偏好关系,其满足

$$\bar{R}=(\bar{r}_{ij})_{n\times n}=([r_{ij}^-,r_{ij}^+])_{n\times n},\ \bar{r}_{ij}\in D([0,1]); \tag{3}$$

$$\bar{r}_{ji}=[1-r_{ij}^+,1-r_{ij}^-],\ \bar{r}_{ii}=[0.5,0.5],\ i,j\in[n]. \tag{4}$$

其中: $\bar{r}_{ij}$ 表示方案 X_i 相对于 X_j 的偏好程度, r_{ij}^- 和 r_{ij}^+ 分别表示 $\bar{r}_{ij}$ 的上界和下界,而

$$D([0,1])=\{[a^-,a^+]|a^-,a^+\in[0,1];a^-\leqslant a^+\}.$$

定义5 [24] 偏好关系 $\bar{R}=(\bar{r}_{ij})_{n\times n}$ 称为加性一致性区间偏好关系,若其满足加性传递性条件

$$\bar{r}_{ij}+\bar{r}_{jk}+\bar{r}_{ki}=\bar{r}_{kj}+\bar{r}_{ji}+\bar{r}_{ik},\ i,j,k\in[n]. \tag{5}$$

定义6 [24] 权重向量 $\bar{\omega}=(\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2,\cdots,\bar{\omega}_n)^{\mathrm{T}}(\bar{\omega}_i=[\omega_i^-,\omega_i^+])$ 称为标准化的区间权重向量,若其满足

$$\sum_{j\neq i}^n\omega_j^-+\omega_i^+\leqslant 1,\ \omega_i^-+\sum_{j\neq i}^n\omega_j^+\geqslant 1,\ i\in[n]. \tag{6}$$

以下定理2表明,标准化区间权重向量通过变换可以构建出加性一致性IVFPR.

定理2 [24] 设 $\bar{R}=(\bar{r}_{ij})_{n\times n}$ 为区间模糊偏好关系,若存在一个标准化的区间权重向量 $\bar{\omega}=(\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2,\cdots,\bar{\omega}_n)^{\mathrm{T}}$ 使得

$$\bar{r}_{ij}=[r_{ij}^-,r_{ij}^+]=\begin{cases}[0.5,0.5],\ i=j;\\ [0.5(1+\omega_i^--\omega_j^+),0.5(1+\omega_i^+-\omega_j^-)],\ i\neq j.\end{cases} \tag{7}$$

则 $\bar{R}$ 为加性一致性区间偏好关系.

下面给出IFPR的相关定义.

定义7 [8] 设 R_I 为定义在方案集 X 上直觉模糊偏好关系,其满足

$$R_I=(\tilde{r}_{ij})_{n\times n}=((\mu_{ij},v_{ij}))_{n\times n}. \tag{8}$$

其中: $\tilde{r}_{ij}(i,j\in[n])$为直觉模糊数,且满足

$$\mu_{ij}=v_{ji},\ v_{ij}=\mu_{ji},\ \mu_{ii}=v_{ii}=0.5; \quad (9)$$

μ_{ij}表示方案X_i相对于X_j的偏好程度,v_{ij}表示方案X_j相对于X_i的偏好程度,$\pi_{ij}=1-\mu_{ij}-v_{ij}$表示不确定程度和犹豫度.

定义8 [25] 偏好关系$R_I=(\tilde{r}_{ij})_{n\times n}$被称为直觉模糊加性一致性偏好关系,若其满足下述条件:

$$\mu_{ij}+\mu_{jk}+\mu_{ki}=\mu_{kj}+\mu_{ji}+\mu_{ik},\ i,j,k\in[n]. \quad (10)$$

由定义7易知,$\mu_{ij}=v_{ji},v_{ij}=\mu_{ji},i,j\in[n]$. 式(10)等价于

$$v_{ij}+v_{jk}+v_{ki}=v_{kj}+v_{ji}+v_{ik},\ i,j,k\in[n]. \quad (11)$$

以下定理3将表明记分函数能验证偏好关系的一致性.

定理3 [25] $R_I=(\tilde{r}_{ij})_{n\times n}$为直觉模糊加性一致性偏好关系的充要条件是

$$s(\tilde{r}_{ij})=s(\tilde{r}_{ik})-s(\tilde{r}_{jk}),\ i,j,k\in[n]. \quad (12)$$

因为直觉模糊数$I=(\mu,v)$可以转换成区间模糊数$[\mu,1-v]$,所以,直觉模糊权重$\tilde{\omega}_i=(\omega_i^\mu,\omega_i^v)$等价于区间权重$[\omega_i^\mu,1-\omega_i^v]$.

定义9 [25] 权重向量$\tilde{\omega}=(\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2,\cdots,\tilde{\omega}_n)^{\mathrm{T}}$称为标准化的直觉模糊权重向量,若其满足

$$\sum_{j\neq i}^{n}\omega_j^\mu\leqslant\omega_i^v,\ \omega_i^\mu+n-2\geqslant\sum_{j\neq i}^{n}\omega_j^v,\ i\in[n], \quad (13)$$

其中$\tilde{\omega}_i=(\omega_i^\mu,\omega_i^v)(i\in[n])$为直觉模糊数.

以下定理4将表明标准化直觉模糊权重向量通过变换能构建出加性一致性直觉模糊偏好关系.

定理4 [25] 若偏好关系$T_I=(\tilde{t}_{ij})_{n\times n}$满足

$$\tilde{t}_{ij}=(t_{ij}^\mu,t_{ij}^v)=\begin{cases}(0.5,0.5),\ i=j;\\(0.5\omega_i^\mu+0.5\omega_j^v,0.5\omega_j^\mu+0.5\omega_i^v),\ i\neq j.\end{cases} \quad (14)$$

其中: $\tilde{\omega}_i=(\omega_i^\mu,\omega_i^v),i\in[n]$满足定义9. 则$T_I$为加性一致性直觉模糊偏好关系.

2 勾股模糊偏好关系与目标优化模型

勾股模糊集(PFS)为直觉模糊集(IFS)的直接拓展,其保持了IFS的优势特征,扩充了评价值的信息量,并保证任意的直觉模糊数都为勾股模糊数. 鉴于IFS与偏好关系的交叉融合后构成的IFPR,在这一节中,将PFS引入偏好关系,提出勾股模糊偏好关系(PFPR),并定义加性一致性PFPR与标准化勾股模糊权重向量. 对于任意给定的PFPR,构建目标优化模型,求解其对应的勾股模糊权重向量.

2.1 勾股模糊集的基本概念

Yager等[9-10]对直觉模糊集进行拓展,提出了勾股模糊集的概念.

定义10 [9-10] 设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为给定的集合,则X上的勾股模糊集P定义如下:

$$P=\{\langle x_i,\rho_P(x_i),\sigma_P(x_i)\rangle|x_i\in X\}, \quad (15)$$

其中$\rho_P(x_i)$和$\sigma_P(x_i)$分别表示元素x_i属于集合P的隶属度和非隶属度. 二元组$(\rho_P(x_i),\sigma_P(x_i))$被称为勾股模糊数(PFN),为了方便,将勾股模糊数简记为$p=(\rho,\sigma)$. 其中: $\rho,\sigma\in[0,1],\rho^2+\sigma^2\leqslant 1$. $\pi_P=\sqrt{1-\rho^2-\sigma^2}$为$p$犹豫度.

由定义2知,直觉模糊数$\alpha=(\mu,v)$满足$\mu+v\leqslant 1$,故$\mu^2+v^2\leqslant 1$. 由定义10知,任意直觉模糊数都为勾股模糊数.

为比较勾股模糊数,相关序关系定义如下.

定义11 [14] 设$p_i=(\rho_i,\sigma_i)(i=1,2)$为两个勾股模糊数,有: 1) 若$s(p_1)<s(p_2)$,则$p_1\prec_P p_2$; 2) 若$s(p_1)=s(p_2),h(p_1)<h(p_2)$,则$p_1\prec_P p_2$; 3) 若$s(p_1)=s(p_2),h(p_1)=h(p_2)$,则$p_1=p_2$. 其中: $s(p_i)=\rho_i^2-\sigma_i^2$和$h(p_i)=\rho_i^2+\sigma_i^2$分别为$p_i(i=1,2)$的记分函数[13]和精确度函数[14].

对于任意的勾股模糊数$p=(\rho,\sigma)$,若其满足$0<\rho,\sigma<1$,则由定义10知

$$p_{\min}=(0,1)\prec_P p\prec_P(1,0)=p_{\max}, \quad (16)$$

为方便,统称$p_{\min}$和$p_{\max}$为勾股模糊极端值.

对于勾股模糊数$p=(\rho,\sigma)$,其满足$\rho^2+\sigma^2\leqslant 1$. 若令$\alpha=(\mu,v)=(\rho^2,\sigma^2)$,则$\mu+v\leqslant 1$. 由定义2知, α为直觉模糊数. 结合表1,分析勾股模糊数、直觉模糊数和区间模糊数三者之间的转换关系,具体如表2所述.

表2 IFN、IVFN和PFN之间的替代关系

名称	勾股模糊数	直觉模糊数	区间模糊数
隶属度/非隶属度	(ρ,σ)	$(\mu,v)=(\rho^2,\sigma^2)$	$[l,r]=[\rho^2,1-\sigma^2]$
犹豫度/不确定度	$1-\rho^2-\sigma^2$	$1-\mu-v$	$\mathrm{length}[r,l]$
记分函数	$\rho^2-\sigma^2$	$\mu-v$	$2\mathrm{center}([r,l])-1$
精确度函数	$\rho^2+\sigma^2$	$\mu+v$	$1-\mathrm{length}[r,l]$

类似于定理1,基于表2可得如下定理.

定理5 (保序性) 设$p_i=(\rho_i,\sigma_i)(i=1,2)$为两个勾股模糊数,若直觉模糊数$\alpha_i(i=1,2)$与区间模糊数$A_i(i=1,2)$分别满足$\alpha_i=(\rho_i^2,\sigma_i^2)(i=1,2)$与$A_i=[\rho_i^2,1-\sigma_i^2](i=1,2)$,则下述条件等价: 1) $p_1\prec_P p_2$; 2) $\alpha_1\prec_I\alpha_2$; 3) $A_1\prec_{IV}A_2$.

定理5表明了表2的转换关系与序关系之间的

一致性. 3种模糊数之间转换关系与序关系的详细分析为本文研究的勾股模糊关系奠定了基础.

2.2 勾股模糊偏好关系

首先定义勾股模糊偏好关系.

定义12 设R_P为定义在方案集X上勾股模糊偏好关系,其满足

$$R_P=(\tilde{p}_{ij})_{n\times n}=((\rho_{ij},\sigma_{ij}))_{n\times n}. \tag{17}$$

其中:$\tilde{p}_{ij}(i,j\in[n])$为勾股模糊数,且满足

$$\rho_{ij}=\sigma_{ji},\ \sigma_{ij}=\rho_{ji},\ \rho_{ii}=\sigma_{ii}=\sqrt{2}/2; \tag{18}$$

ρ_{ij}表示方案X_i相对于X_j的偏好程度,σ_{ij}表示方案X_j相对于X_i的偏好程度,$\tau_{ij}=\sqrt{1-\rho_{ij}^2-\sigma_{ij}^2}$表示不确定程度和犹豫度,且有$\tau_{ii}=\sqrt{1-\rho_{ii}^2-\sigma_{ii}^2}=0,i\in[n]$.

以加性一致性区间模糊偏好关系与加性一致性直觉模糊偏好关系为依据,基于表2中的转换关系,下面给出加性一致性勾股模糊偏好关系.

定义13 偏好关系$R_P=(\tilde{p}_{ij})_{n\times n}$被称为勾股模糊加性一致性偏好关系,若其满足条件

$$\rho_{ij}^2+\rho_{jk}^2+\rho_{ki}^2=\rho_{kj}^2+\rho_{ji}^2+\rho_{ik}^2,\ i,j,k\in[n]. \tag{19}$$

由定义12易知,$\rho_{ij}=\sigma_{ji},\sigma_{ij}=\rho_{ji},i,j\in[n]$. 式(19)等价于

$$\sigma_{ij}^2+\sigma_{jk}^2+\sigma_{ki}^2=\sigma_{kj}^2+\sigma_{ji}^2+\sigma_{ik}^2,\ i,j,k\in[n]. \tag{20}$$

定理6 $R_P=(\tilde{p}_{ij})_{n\times n}$为勾股模糊加性一致性偏好关系的充要条件是

$$s(\tilde{p}_{ij})=s(\tilde{p}_{ik})-s(\tilde{p}_{jk}),\ i,j,k\in[n]. \tag{21}$$

类似于标准化区间权重向量(定义6)和标准化直觉模糊权重向量(定义9),基于表2中的转换关系,下面给出标准化勾股模糊权重向量的定义.

定义14 权重向量$\tilde{\omega}=(\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2,\cdots,\tilde{\omega}_n)^{\mathrm{T}}$称为标准化的勾股模糊权重向量,若对于$i\in[n]$,其满足

$$\sum_{j\neq i}^{n}(\omega_j^\rho)^2\leqslant(\omega_i^\sigma)^2,\ (\omega_i^\rho)^2+n-2\geqslant\sum_{j\neq i}^{n}(\omega_j^\sigma)^2, \tag{22}$$

其中$\tilde{\omega}_i=(\omega_i^\rho,\omega_i^\sigma)(i\in[n])$为勾股模糊数.

定理7表明,基于标准化的权重向量可以构建加性一致性勾股模糊偏好关系.

定理7 若偏好关系$T_p=(\tilde{t}_{ij})_{n\times n}$满足条件

$$\tilde{t}_{ij}=(t_{ij}^\rho,t_{ij}^\sigma)=\begin{cases}(\sqrt{2}/2\ ,\sqrt{2}/2\ ),\ i=j;\\ \Big(\sqrt{\dfrac{(\omega_i^\rho)^2+(\omega_j^\sigma)^2}{2}},\sqrt{\dfrac{(\omega_j^\rho)^2+(\omega_i^\sigma)^2}{2}}\ \Big),\ i\neq j.\end{cases} \tag{23}$$

其中:$\tilde{\omega}_i=(\omega_i^\rho,\omega_i^\sigma),i\in[n]$满足定义14. 则$T_p$为加性一致性勾股模糊偏好关系.

推论1 对于任意的勾股模糊偏好关系$R_P=(\tilde{p}_{ij})_{n\times n}$,若存在一个标准化的勾股模糊权重向量$\tilde{\omega}=(\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2,\cdots,\tilde{\omega}_n)^{\mathrm{T}}$满足

$$\tilde{p}_{ij}=(\rho_{ij},\sigma_{ij})=\begin{cases}(\sqrt{2}/2\ ,\sqrt{2}/2\ ),\ i=j;\\ \Big(\sqrt{\dfrac{(\omega_i^\rho)^2+(\omega_j^\sigma)^2}{2}},\sqrt{\dfrac{(\omega_j^\rho)^2+(\omega_i^\sigma)^2}{2}}\ \Big),\ i\neq j.\end{cases} \tag{24}$$

则R_P为加性一致性勾股模糊偏好关系.

基于表2的转换关系,以下定理8将对3种偏好关系之间的联系进行分析.

定理8 设$R_P=(\tilde{p}_{ij})_{n\times n}$为加性一致性勾股模糊偏好关系,满足

$$\tilde{p}_{ij}=(\rho_{ij},\sigma_{ij})=\begin{cases}(\sqrt{2}/2\ ,\sqrt{2}/2\ ),\ i=j;\\ \Big(\sqrt{\dfrac{(\omega_i^\rho)^2+(\omega_j^\sigma)^2}{2}},\sqrt{\dfrac{(\omega_j^\rho)^2+(\omega_i^\sigma)^2}{2}}\ \Big),\ i\neq j.\end{cases} \tag{25}$$

其中$\tilde{\omega}=(\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2,\cdots,\tilde{\omega}_n)^{\mathrm{T}}$称为标准化的勾股模糊权重向量. 则有:

1) 若区间偏好关系$\bar{R}=(\bar{r}_{ij})_{n\times n}$满足

$$\bar{r}_{ij}=[r_{ij}^-,r_{ij}^+]=[\rho_{ij}^2,1-\sigma_{ij}^2], \tag{26}$$

则$\bar{R}$为加性一致性区间偏好关系;

2) 若直觉模糊偏好关系$R_I=(\tilde{r}_{ij})_{n\times n}$满足

$$\tilde{r}_{ij}=(\mu_{ij},v_{ij})=(\rho_{ij}^2,\sigma_{ij}^2), \tag{27}$$

则R_I为加性一致性直觉模糊偏好关系.

证明 1) 若$\bar{r}_{ij}=[r_{ij}^-,r_{ij}^+]=[\rho_{ij}^2,1-\sigma_{ij}^2]$,则

$$\bar{r}_{ij}=[\rho_{ij}^2,1-\sigma_{ij}^2]=\begin{cases}(0.5,0.5),\ i=j;\\ \Big[\dfrac{(\omega_i^\rho)^2+(\omega_j^\sigma)^2}{2},1-\Big(\dfrac{(\omega_j^\rho)^2+(\omega_i^\sigma)^2}{2}\Big)\Big],\ i\neq j.\end{cases} \tag{28}$$

令$\bar{\omega}_i=[\omega_i^-,\omega_i^+]=[(\omega_i^\rho)^2,1-(\omega_j^\sigma)^2]$,由定义16,有

$$\sum_{j\neq i}^{n}\omega_j^-+\omega_i^+\leqslant1,\ \omega_i^-+\sum_{j\neq i}^{n}\omega_j^+\geqslant1,\ i\in[n], \tag{29}$$

因此,$\bar{\omega}=(\bar{\omega}_1,\bar{\omega}_2,\cdots,\bar{\omega}_n)^{\mathrm{T}}$为标准化的区间权重向量. 且式(28)等价于

$$\bar{r}_{ij}=[r_{ij}^-,r_{ij}^+]=$$

$$\begin{cases}[0.5,0.5],\ i=j;\\ [0.5(1+\omega_i^- -\omega_j^+),\ 0.5(1+\omega_i^+ -\omega_j^-)],\ i\neq j.\end{cases} \tag{30}$$

因此, $\bar{R}$ 为加性一致性区间偏好关系.

2) 证明过程类似于1),不再赘述. □

定理8表明,基于表2中的转化关系,加性一致性勾股模糊偏好关系可以转换成加性一致性区间模糊偏好关系和加性一致性直觉模糊偏好关系.

2.3 获取勾股模糊权重向量的目标优化模型

由推论1可知,对于任意的偏好关系 $R_P=(\tilde{p}_{ij})_{n\times n}$,若存在一个标准化勾股模糊权重向量 $\tilde{\omega}=(\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2,\cdots,\tilde{\omega}_n)^{\mathrm{T}}$,则 R_P 为加性一致性勾股模糊偏好关系. 而在部分现实决策问题中,专家不一定能够提出加性一致性勾股模糊偏好关系[24-25]. 为此,本文考虑勾股模糊偏好关系与标准化勾股模糊权重向量所构建的一致性勾股模糊偏好关系之间的偏差

$$\delta_{ij}=0.5(\omega_i^\rho)^2+0.5(\omega_j^\sigma)^2-\rho_{ij}^2, \tag{31}$$

$$\gamma_{ij}=0.5(\omega_j^\rho)^2+0.5(\omega_i^\sigma)^2-\sigma_{ij}^2. \tag{32}$$

隶属度偏差 $|\delta_{ij}|$ 与非隶属度偏差 $|\gamma_{ij}|$ 越小,认为 R_P 的一致性程度越高. 为此,考虑以偏差值最小为目标构建如下优化模型M1,以获取 R_P 的勾股模糊权重向量:

$$\min J=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(\varepsilon|\delta_{ij}|+(1-\varepsilon)|\gamma_{ij}|).$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}0.5(\omega_i^\rho)^2+0.5(\omega_j^\sigma)^2-\rho_{ij}^2-\delta_{ij}=0;\\ 0.5(\omega_j^\rho)^2+0.5(\omega_i^\sigma)^2-\sigma_{ij}^2-\gamma_{ij}=0;\\ 0\leqslant\omega_i^\rho,\ \omega_i^\sigma\leqslant 1,\ (\omega_i^\rho)^2+(\omega_i^\sigma)^2\leqslant 1;\\ \sum\limits_{j\neq i}^{n}(\omega_j^\rho)^2\leqslant(\omega_i^\sigma)^2;\\ (\omega_i^\rho)^2+n-2\geqslant\sum\limits_{j\neq i}^{n}(\omega_j^\sigma)^2;\\ i,j\in[n],\ j\neq i.\end{cases} \tag{M1}$$

其中: ε 和 $1-\varepsilon$ 分别为隶属度偏差 $|\delta_{ij}|$ 和非隶属度偏差 $|\gamma_{ij}|$ 的权重系数,且满足 $0<\varepsilon<1$. 由定义12可得

$$\rho_{ij}=\sigma_{ji},\ \sigma_{ij}=\rho_{ji}\Rightarrow\delta_{ij}=\gamma_{ji},\ i,j\in[n]. \tag{33}$$

因此,模型M1只需考虑偏好关系的上三角元素,即元素下标条件转变情况为

$$i\in[n],\ j\in[n]\rightarrow i\in[n-1],\ j\in[n]\backslash[i]. \tag{34}$$

进一步地,对于 $i\in[n-1],\ j\in[n]\backslash[i]$,令

$$\delta_{ij}^+=(|\delta_{ij}|+\delta_{ij})/2,\ \delta_{ij}^-=(|\delta_{ij}|-\delta_{ij})/2, \tag{35}$$

$$\gamma_{ij}^+=(|\gamma_{ij}|+\gamma_{ij})/2,\ \gamma_{ij}^-=(|\gamma_{ij}|-\gamma_{ij})/2, \tag{36}$$

则有

$$|\delta_{ij}|=\delta_{ij}^++\delta_{ij}^-,\ \delta_{ij}=\delta_{ij}^+-\delta_{ij}^-, \tag{37}$$

$$|\gamma_{ij}|=\gamma_{ij}^++\gamma_{ij}^-,\ \gamma_{ij}=\gamma_{ij}^+-\gamma_{ij}^-, \tag{38}$$

$$\delta_{ij}^+\times\delta_{ij}^-=0,\ \gamma_{ij}^+\times\gamma_{ij}^-=0. \tag{39}$$

基于式(34) ~ (38),模型M1可简化成下述模型M2:

$$\min J=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(\varepsilon(\delta_{ij}^++\delta_{ij}^-)+(1-\varepsilon)(\gamma_{ij}^++\gamma_{ij}^-)).$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}0.5(\omega_i^\rho)^2+0.5(\omega_j^\sigma)^2-\rho_{ij}^2-\delta_{ij}^++\delta_{ij}^-=0;\\ 0.5(\omega_j^\rho)^2+0.5(\omega_i^\sigma)^2-\sigma_{ij}^2-\gamma_{ij}^++\gamma_{ij}^-=0;\\ 0\leqslant\omega_i^\rho,\ \omega_i^\sigma\leqslant 1,\ (\omega_i^\rho)^2+(\omega_i^\sigma)^2\leqslant 1;\\ \sum\limits_{j\neq i}^{n}(\omega_j^\rho)^2\leqslant(\omega_i^\sigma)^2;\\ (\omega_i^\rho)^2+n-2\geqslant\sum\limits_{j\neq i}^{n}(\omega_j^\sigma)^2;\\ \delta_{ij}^+,\delta_{ij}^-,\gamma_{ij}^+,\gamma_{ij}^-\geqslant 0;\\ i\in[n-1],\ j\in[n]\backslash[i].\end{cases} \tag{M2}$$

对模型M2进行求解可以获得 R_P 的勾股模糊向量

$$\tilde{\omega}^*=(\tilde{\omega}_1^*,\tilde{\omega}_2^*,\cdots,\tilde{\omega}_n^*)^{\mathrm{T}},\ \tilde{\omega}_i^*=(\omega_i^{\rho*},\omega_i^{\sigma*}),\ i\in[n].$$

若模型中的目标函数值 $J=0$,则 $\delta_{ij}^+=\delta_{ij}^-=\gamma_{ij}^+=\gamma_{ij}^-=0$,即 R_P 为加性一致性勾股模糊偏好关系.

下面通过算例来分析模型M2的简单应用,并分析权重系数 ε 对决策模型的影响.

例1 在个体决策问题中,设 $X=\{X_i|i\in[4]\}$ 为4个备选方案构成的集合,决策者提供的勾股模糊偏好关系为 R,即

$$R=\begin{bmatrix}(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2) & (0.60,0.70) & (0.70,0.60) & (0.65,0.70)\\ (0.70,0.60) & (\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2) & (0.80,0.30) & (0.75,0.45)\\ (0.60,0.70) & (0.30,0.80) & (\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2) & (0.75,0.60)\\ (0.70,0.65) & (0.45,0.75) & (0.60,0.75) & (\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)\end{bmatrix}.$$

将 R 中的数据代入模型M2,设权重系数 $\varepsilon=0.5$,用Lingo软件求解出方案的权重向量

$$\tilde{\omega}_1^*=(0.272\,6,0.791\,0),\ \tilde{\omega}_2^*=(0.595\,2,0.630\,8),$$
$$\tilde{\omega}_3^*=(0.307\,1,0.951\,7),\ \tilde{\omega}_4^*=(0.084\,2,0.877\,9).$$

根据定义11中的记分函数获取方案的最终排序为 $X_3\prec_P X_4\prec_P X_1\prec_P X_2$.

为探究系数 ε 对模型和决策结果的影响,观察

系数值变化时方案的排序情况,详情如表3所示. 表3中的贡献度满足$\delta_\varepsilon = \left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}\varepsilon|\delta_{ij}|\right)\Big/J$,非隶属度贡献度满足$1-\delta_\varepsilon$. 由表3可知,系数$\varepsilon$的取值变换会影响方案的排序、贡献度以及平均偏差值. 当ε取值变化时最优方案始终为X_2,而其余方案均有变化,贡献度δ_ε的值也随之改变. 当ε的值向两端靠近时,偏差值逐渐变小.

表3　系数ε影响分析

系数 ε	隶属度贡献度δ_ε	非隶属度贡献度	平均偏差$J/6$	方案排序
0.2	0.79	0.21	0.036	$X_1\prec_P X_4\prec_P X_3\prec_P X_2$
0.4	0.61	0.39	0.053	$X_4\prec_P X_3\prec_P X_1\prec_P X_2$
0.5	0.38	0.62	0.058	$X_3\prec_P X_4\prec_P X_1\prec_P X_2$
0.6	0.43	0.57	0.054	$X_4\prec_P X_3\prec_P X_1\prec_P X_2$
0.8	0.47	0.53	0.040	$X_4\prec_P X_3\prec_P X_1\prec_P X_2$

上述算例表明系数ε对决策模型具有一定的影响,决策者可依据偏好设定系数的取值. 在本文后续研究中,权重系数将默认为0.5.

3　基于PFWQ算子与目标优化模型下的群体决策方法

3.1　问题描述

针对勾股模糊偏好关系环境下的群体决策问题,设备选方案集为$X=\{X_i|i\in[n]\}$,专家组为$E=\{e_k|k\in[m]\}$. 基于决策者提供的方案信息,专家e_k $(k\in[m])$对方案$X_i(i\in[n])$和$X_j(j\in[n])$进行两两对比,提供勾股模糊偏好关系$R_P^k=(\tilde{p}_{ij}^k)_{n\times n}(k\in[m])$. 其中$\tilde{p}_{ij}^k=(\rho_{ij}^k,\sigma_{ij}^k)(i,j\in[n];k\in[m])$为勾股模糊数. 为获取方案集$X$中方案的具体排序,需要获取与方案对应的标准化勾股模糊权重向量$\tilde{\omega}^*=(\tilde{\omega}_1^*,\tilde{\omega}_2^*,\cdots,\tilde{\omega}_n^*)^{\rm T}$. 为此,本文将提出一种基于PFWQ算子与目标优化模型下的群体决策方法,利用该决策方法求解出勾股模糊权重向量,最终获取最优方案.

3.2　勾股偏好关系组的集结

在利用目标优化模型求解标准化勾股模糊向量之前,需将专家组E提供的多个勾股模糊偏好关系$R_P^k=(\tilde{p}_{ij}^k)_{n\times n}(k\in[m])$集结成综合勾股模糊偏好关系$R=(p_{ij})_{n\times n}$. 下面从选取合理的集结算子与集结权重的确定这两个方面展开研究.

3.2.1　集结算子的选取

解决勾股模糊偏好关系下的GDM问题的第1阶段:选择合理、有效的勾股算子集结由不同专家提供的一组勾股模糊偏好关系. 本节将通过定理与实例分析,对文献[9-10,19,22-23]所提出的6类集结算子进行对比. 主要从如下两个方面进行考察:其一,考察算子在集结包含极端值($(0,1)$或$(1,0)$)的勾股模糊数组时,集结结果是否合理;其二,考察算子是否关于序关系(基于记分函数和精确度函数,定义11)单调.

首先给出6类算子的基本定义.

定义15[9-10]　设$\alpha_i=(\rho_i,\sigma_i)(i\in[n])$为一组勾股模糊数,其权重向量为$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\rm T}$.

1) 勾股模糊加权平均(PFWA)算子定义如下:

$$\text{PFWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\left(\sqrt{1-\prod_{i=1}^{n}(1-(\rho_i)^2)^{\omega_i}},\ \prod_{i=1}^{n}(\sigma_i)^{\omega_i}\right).\tag{40}$$

2) 勾股模糊加权几何(PFWG)算子定义如下:

$$\text{PFWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\left(\prod_{i=1}^{n}(\rho_i)^{\omega_i},\sqrt{1-\prod_{i=1}^{n}(1-(\sigma_i)^2)^{\omega_i}}\right).\tag{41}$$

3) 勾股模糊加权二次(PFWQ)算子定义如下:

$$\text{PFWQ}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\omega_i(\rho_i)^2},\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\omega_i(\sigma_i)^2}\right).\tag{42}$$

定义16　设$\alpha_i=(\rho_i,\sigma_i)(i\in[n])$为一组勾股模糊数,其权重向量为$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\rm T}$.

1) 勾股模糊交叉加权平均(PFIWA)算子[19,23]满足

$$\text{PFIWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\left(\sqrt{1-\prod_{i=1}^{n}(1-\rho_i^2)^{w_i}},\right.$$
$$\left.\sqrt{\prod_{i=1}^{n}(1-\rho_i^2)^{w_i}-\prod_{i=1}^{n}(1-(\rho_i^2+\sigma_i^2))^{w_i}}\right).\tag{43}$$

2) 勾股模糊交叉加权几何(PFIWG)算子[19,23]满足

$$\text{PFIWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\left(\sqrt{\prod_{i=1}^{n}(1-\sigma_i^2)^{w_i}-\prod_{i=1}^{n}(1-(\sigma_i^2+\rho_i^2))^{w_i}},\right.$$
$$\left.\sqrt{1-\prod_{i=1}^{n}(1-\sigma_i^2)^{w_i}}\right).\tag{44}$$

3) 勾股模糊Einstein加权平均(PFEWA)算子[22]满足

$$\text{PFEWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=$$

$$\Big(\sqrt{\frac{\prod_{i=1}^{n}(1+\rho_i^2)^{w_i}-\prod_{i=1}^{n}(1-\rho_i^2)^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(1+\rho_i^2)^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(1-\rho_i^2)^{w_i}}},$$

$$\sqrt{\frac{2\prod_{i=1}^{n}(\sigma_i^2)^{w_i}}{\prod_{i=1}^{n}(2-\sigma_i^2)^{w_i}+\prod_{i=1}^{n}(\sigma_i^2)^{w_i}}}\Big). \tag{45}$$

接下来,通过以下定理来考察定义15和定义16中算子在第1个方面的表现.

定理9 设$\alpha_i=(\rho_i,\sigma_i)(i\in[n])$为一组勾股模糊数,其权重向量为$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$. 有:

1)若存在$\alpha_k=(1,0), 0<\omega_k<1, k\in[n]$,则

$$\mathrm{PFWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(1,0), \tag{46}$$

$$\mathrm{PFIWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(1,0), \tag{47}$$

$$\mathrm{PFEWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(1,0); \tag{48}$$

2) 若存在$\alpha_k=(0,1), 0<\omega_k<1, k\in[n]$,则

$$\mathrm{PFWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(0,1), \tag{49}$$

$$\mathrm{PFIWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(0,1). \tag{50}$$

由定理9,总结出上述5类算子的不足:

1) 根据式(46)～(48),PFWA算子/PFIWA算子/PFEWA算子在集结勾股模糊数组时,极端值$p_{\max}=(1,0)$完全决定集结结果,致使其余非极端值被忽略,对集结结果没有任何影响,显然不合理;

2) 类似于PFWA算子,根据式(49)、(50),在PFWG算子和PFIWG算子集结过程中,极端值$p_{\min}=(0,1)$完全决定集结结果,显然不合理.

显然,PFWQ算子的形式主要由$\sum_{i=1}^{n}w_ix_i$构成,而不包含$\prod_{i=1}^{n}x_i^{w_i}$和$\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{w_i}$等形式的公式,因此,当集结元素中出现0或1时,PFWQ算子不会出现其他元素失效的情况. 下面通过实例分析6类算子关于序关系的单调情况.

例2 设$\alpha_1=(1,0), \alpha_2=(0.6,0.7)$与$\beta_1=(1,0), \beta_2=(0.3,0.3)$为两组勾股模糊数. 权重向量为$\omega=(0.6,0.4)^{\mathrm{T}}$. 由定义5中的序关系可得

$$\alpha_1=\beta_1,\ \alpha_2\prec_P\beta_2.$$

利用定义15和定义16中的6类算子对数组进行集结,集结结果如表4所示.

根据例2及表4的分析,将通过以下定理来阐述算子关于序关系的单调性.

表4 6类算子集结结果对比分析

算子	算子集结值	记分函数值	序关系
$\mathrm{PFWA}(\alpha_1,\alpha_2)$	$(1.00,0.00)$	1.00	$\mathrm{PFWA}(\alpha_1,\alpha_2)=$
$\mathrm{PFWA}(\beta_1,\beta_2)$	$(1.00,0.00)$	1.00	$\mathrm{PFWA}(\beta_1,\beta_2)$
$\mathrm{PFIWA}(\alpha_1,\alpha_2)$	$(1.00,0.00)$	1.00	$\mathrm{PFIWA}(\alpha_1,\alpha_2)=$
$\mathrm{PFIWA}(\beta_1,\beta_2)$	$(1.00,0.00)$	1.00	$\mathrm{PFIWA}(\beta_1,\beta_2)$
$\mathrm{PFEWA}(\alpha_1,\alpha_2)$	$(1.00,0.00)$	1.00	$\mathrm{PFEWA}(\alpha_1,\alpha_2)=$
$\mathrm{PFEWA}(\beta_1,\beta_2)$	$(1.00,0.00)$	1.00	$\mathrm{PFEWA}(\beta_1,\beta_2)$
$\mathrm{PFWG}(\alpha_1,\alpha_2)$	$(0.74,0.58)$	0.21	$\mathrm{PFWG}(\beta_1,\beta_2)\prec_P$
$\mathrm{PFWG}(\beta_1,\beta_2)$	$(0.49,0.24)$	0.18	$\mathrm{PFWG}(\alpha_1,\alpha_2)$
$\mathrm{PFIWG}(\alpha_1,\alpha_2)$	$(0.74,0.58)$	0.21	$\mathrm{PFWG}(\beta_1,\beta_2)\prec_P$
$\mathrm{PFIWG}(\beta_1,\beta_2)$	$(0.49,0.24)$	0.18	$\mathrm{PFWG}(\alpha_1,\alpha_2)$
$\mathrm{PFWQ}(\alpha_1,\alpha_2)$	$(0.78,0.54)$	0.35	$\mathrm{PFWQ}(\alpha_1,\alpha_2)\prec_P$
$\mathrm{PFWQ}(\beta_1,\beta_2)$	$(0.67,0.23)$	0.40	$\mathrm{PFWQ}(\beta_1,\beta_2)$

定理10(单调性认证) 设$\alpha_i=(\rho_{\alpha_i},\sigma_{\alpha_i})$与$\beta_i=(\rho_{\beta_i},\sigma_{\beta_i})(i\in[n])$为两组勾股模糊数. 若$\alpha_i\prec_P\beta_i$或$\alpha_i=\beta_i$: $(i\in[n])$,且至少存在一个$k\in[n]$,满足$\alpha_k\prec_P\beta_k$,则:

1) $\mathrm{PFWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\prec_P\mathrm{PFWA}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$不一定成立;

2) $\mathrm{PFIWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\prec_P\mathrm{PFIWA}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$不一定成立;

3) $\mathrm{PFEWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\prec_P\mathrm{PFEWA}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$不一定成立;

4) $\mathrm{PFWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\prec_P\mathrm{PFWG}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$不一定成立;

5) $\mathrm{PFIWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\prec_P\mathrm{PFIWG}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$不一定成立;

6) $\mathrm{PFWQ}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\prec_P\mathrm{PFWQ}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$成立.

证明 根据表4中的结果,1)～5)显然可得. 下面证明6). 由定义5和定义15可知,PFWQ算子与记分函数、精确度函数之间满足如下关系式:

$$s(\mathrm{PFWQ}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n))=\sum_{i=1}^{n}\omega_is(\alpha_i),$$

$$h(\mathrm{PFWQ}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n))=\sum_{i=1}^{n}\omega_ih(\alpha_i).$$

由$\alpha_k\prec_P\beta_k$, $s(\alpha_i)\leqslant s(\beta_i)(i\in[n];i\neq k)$,根据定义5,分两种情况讨论.

情况1:若$s(\alpha_k)<s(\beta_k)$,则有

$$s(\mathrm{PFWQ}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))-s(\mathrm{PFWQ}(\beta_1,\cdots,\beta_n))=$$

$$(s(\alpha_k)-s(\beta_k))+\sum_{i=1;i\neq k}^{n}\omega_i(s(\alpha_i)-s(\beta_i))<0.$$

情况2:若$s(\alpha_k)=s(\beta_k), h(\alpha_k)<h(\beta_k)$,则:

1) 若$\sum_{i=1;i\neq k}^{n}\omega_i(s(\alpha_i)-s(\beta_i))<0$,则

$$s(\mathrm{PFWQ}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))<s(\mathrm{PFWQ}(\beta_1,\cdots,\beta_n));$$

2) 若 $\sum_{i=1;i\neq k}^{n}\omega_i(s(\alpha_i)-s(\beta_i))=0$,则

$$s(\alpha_i)=s(\beta_i),\ h(\alpha_i)\leqslant h(\beta_i),\ i\in[n],\ i\neq k.$$

进一步,可得

$$h(\mathrm{PFWQ}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))-h(\mathrm{PFWQ}(\beta_1,\cdots,\beta_n))=$$
$$(h(\alpha_k)-h(\beta_k))+\sum_{i=1;i\neq k}^{n}\omega_i(h(\alpha_i)-h(\beta_i))<0.$$

综合上述两种情况,可得

$$\mathrm{PFWQ}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\prec_P\mathrm{PFWQ}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n).$$

由此,定理10得证. □

由定理9和定理10可知,定理9中所提及的5类算子会因为极端值而使得集结结果不合理,且关于序关系并不一定单调. 而PFWQ算子在这两方面的考察较为合理,因此,本文将选取该算子作为集结勾股模糊偏好关系组的集结工具. 下面考察算子与偏好关系之间的一致性关系.

定理11 若 $R_P^l=(\tilde{p}_{ij}^l)_{n\times n}(l\in[m])$ 为一组加性一致性勾股偏好关系,则基于PFWQ算子的综合偏好关系 $R=(p_{ij})_{n\times n}$ 为加性一致性勾股偏好关系.

证明 根据定义13,若 $R_P^l(l\in[m])$ 为加性一致性勾股偏好关系,则对于 $i,j\in[n]$,有

$$({\rho_{ij}^l})^2+({\rho_{jk}^l})^2+({\rho_{ki}^l})^2=({\rho_{kj}^l})^2+({\rho_{ji}^l})^2+({\rho_{ik}^l})^2,$$
$$({\sigma_{ij}^l})^2+({\sigma_{jk}^l})^2+({\sigma_{ki}^l})^2=({\sigma_{kj}^l})^2+({\sigma_{ji}^l})^2+({\sigma_{ik}^l})^2,$$

进而可得

$$(\rho_{ij})^2+(\rho_{jk})^2+(\rho_{ki})^2=$$
$$\sum_{l=1}^{m}w_l(({\rho_{ij}^l})^2+({\rho_{jk}^l})^2+({\rho_{ki}^l})^2)=$$
$$\sum_{l=1}^{m}w_l(({\rho_{kj}^l})^2+({\rho_{ji}^l})^2+({\rho_{ik}^l})^2)=$$
$$(\rho_{kj})^2+(\rho_{ji})^2+(\rho_{ik})^2.$$

类似可得

$$(\sigma_{ij})^2+(\sigma_{jk})^2+(\sigma_{ki})^2=(\sigma_{kj})^2+(\sigma_{ji})^2+(\sigma_{ik})^2.$$

因此,$R=(p_{ij})_{n\times n}$ 为加性一致性勾股偏好关系. □

定理11表明PFWQ算子具有良好的适用性.

3.2.2 集结权重的确定

在获取集结偏好关系组 $R_P^k=(\tilde{p}_{ij}^k)_{n\times n}(k\in[m])$ 的过程中,每个偏好关系 $R_P^k(k\in[m])$ 都有对应的集结权重. 在一般的群体决策问题中,决策者主要依据其对专家的认知来确定专家权重,很大程度上取决于决策者的主观意识,此类权重视为主观权重(Subjective weight). 为了更合理、灵活地确定专家权重,本文将从客观的角度出发,考虑偏好关系之间的相似程度,并以此来确定专家的客观权重(Objective weight). 然后,结合主观权重,提出带调节参数的综合权重.

定义17[15] 设 $\alpha_i=(\rho_i,\sigma_i)(i=1,2)$ 为两个勾股模糊数,其距离定义如下:

$$d(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{1}{2}(|\rho_1^2-\rho_2^2|+|\sigma_1^2-\sigma_2^2|+|\pi_1^2-\pi_2^2|).\tag{51}$$

进而定义偏好关系 R_P^k 与 R_P^l 的距离和相似度为

$$d(R_P^k,R_P^l)=$$
$$\frac{1}{m(m-1)}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}(|({\rho_{ij}^k})^2-({\rho_{ij}^l})^2|+$$
$$|({\sigma_{ij}^k})^2-({\sigma_{ij}^l})^2|+|({\pi_{ij}^k})^2-({\pi_{ij}^l})^2|),\tag{52}$$

$$\mathrm{Sim}(R_P^k,R_P^l)=1-d(R_P^k,R_P^l),\ k,l\in[m].\tag{53}$$

由相似度定义专家 $e_k(k\in[m])$ 的支持度为

$$\mathrm{Sup}_k=\sum_{l=1;l\neq k}^{m}\mathrm{Sim}(R_P^k,R_P^l)=$$
$$\sum_{l=1;l\neq k}^{m}(1-d(R_P^k,R_P^l)).\tag{54}$$

在群体决策中,偏好关系之间的一致性程度越高,其相似度越高;专家的支持度越高,其被重视程度越大. 将支持度归一化,得到客观权重(Objective weight)为

$$w_k^o=\mathrm{Sup}_k\Big/\sum_{l=1}^{m}\mathrm{Sup}_l,\ k\in[m].\tag{55}$$

根据专家的相关信息,决策者提供专家的主观权重为

$$w_k^s(k=1,2,\cdots,m),\ w_k^s\geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{m}w_k^s=1.\tag{56}$$

引入参数,定义专家的综合权重为

$$w_k=\lambda w_k^o+(1-\lambda)w_k^s,\ k\in[m].\tag{57}$$

满足 $w_k\geqslant 0$, $\sum_{k=1}^{m}w_k=1$,其中 $\lambda\in[0,1]$ 为平衡参数. 决策者可以根据偏好来确定参数的取值: 当 $\lambda>0.5$ 时,认为决策者对专家组成员的了解较有把握; 当 $\lambda<0.5$ 时,认为决策者偏向于客观数据确定的权重; 当 $\lambda=0.5$,则认为决策者对于主客观权重同等重视.

3.3 基于PFWQ算子和目标优化模型的群体决策方法

为解决勾股模糊偏好关系下的群体决策问题,基于PFWQ算子和目标规划模型提出一种群体决策方法,具体步骤如下.

Step 1: 利用式(51)～(55)计算专家的客观权重 $w_k^o,k\in[m]$.

Step 2: 基于客观权重 w_k^o 和主观权重 w_k^s, 利用式(56)和(57)计算专家的综合权重 $w_k, k \in [m]$.

Step 3: 基于综合权重 w_k, 利用 PFWQ 算子 (式(42)) 集结个体偏好关系 $R_P^k (k \in [m])$, 并计算综合偏好关系矩阵 $R = (p_{ij})_{n\times n} = ((\rho_{ij}, \sigma_{ij}))_{n\times n}$, 即

$$R_P^1 = \begin{bmatrix} (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) & (0.60, 0.70) \\ (0.70, 0.60) & (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \\ (0.60, 0.70) & (0.30, 0.80) \\ (0.70, 0.65) & (0.45, 0.75) \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} (0.70, 0.60) & (0.65, 0.70) \\ (0.80, 0.30) & (0.75, 0.45) \\ (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) & (0.75, 0.60) \\ (0.60, 0.75) & (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \end{bmatrix},$$

$$R_P^2 = \begin{bmatrix} (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) & (0.75, 0.55) \\ (0.55, 0.75) & (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \\ (0.50, 0.80) & (0.70, 0.60) \\ (0.50, 0.80) & (0.60, 0.80) \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} (0.80, 0.50) & (0.80, 0.50) \\ (0.60, 0.70) & (0.80, 0.55) \\ (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) & (0.75, 0.55) \\ (0.45, 0.75) & (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \end{bmatrix},$$

$$R_P^3 = \begin{bmatrix} (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) & (0.75, 0.55) \\ (0.55, 0.75) & (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \\ (0.60, 0.75) & (0.45, 0.65) \\ (0.35, 0.80) & (0.45, 0.40) \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} (0.75, 0.60) & (0.80, 0.35) \\ (0.65, 0.45) & (0.40, 0.45) \\ (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) & (0.40, 0.65) \\ (0.65, 0.45) & (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \end{bmatrix};$$

$$R = \begin{bmatrix} (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) & (0.7128, 0.5941) \\ (0.5941, 0.7128) & (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \\ (0.5594, 0.7590) & (0.5433, 0.6740) \\ (0.5252, 0.7626) & (0.4952, 0.6880) \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} (0.7590, 0.5594) & (0.7626, 0.5252) \\ (0.6740, 0.5433) & (0.6880, 0.4952) \\ (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) & (0.6635, 0.5953) \\ (0.5953, 0.6635) & (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \end{bmatrix}.$$

Step 4: 基于综合偏好关系 $R = (p_{ij})_{n\times n}$ 构建模型M2, 利用数学软件求解方案集 $X = \{X_i | i \in [n]\}$ 对应的标准化的勾股模糊权重向量 $\tilde{\omega}^* = (\tilde{\omega}_1^*, \tilde{\omega}_2^*, \cdots, \tilde{\omega}_n^*)^{\mathrm{T}}$.

Step 5: 对勾股模糊权重 $\tilde{\omega}_i^* (i \in [n])$ 进行排序, 进而获取方案的排序, 选取最优方案.

4 实例分析

利用本文所提出的决策方法解决某高校选拔优秀博士进行国际交流的GDM问题[24-25]. 学校国际交流处聘请了3位权威专家构成评审团 $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, 校方根据专家信息给出专家组的主观权重向量 $w^s = (0.2, 0.5, 0.3)^{\mathrm{T}}$. 备选人由4位优秀博士构成 $X = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, 学校提供了备选人的详细资料, 专家 $e_k (k = 1, 2, 3)$ 对候选人 X_i 和 $X_j (i, j = 1, 2, 3, 4; i \neq j)$ 进行两两对比后提供了勾股模糊偏好关系 $R_P^k = (\tilde{p}_{ij}^k)_{4\times 4} (k = 1, 2, 3)$, 其中 $\tilde{p}_{ij}^k = (\rho_{ij}^k, \sigma_{ij}^k)$ 为勾股模糊数.

下面对偏好关系中的部分元素进行解释: 矩阵 $R_P^k (k = 1, 2, 3)$ 中的对角元素 $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ 表示专家对候选人 $X_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 与自身 X_i 的比较; 元素 $\tilde{p}_{12}^1 = (0.60, 0.70)$ 为专家 e_1 在对比 X_1 与 X_2 后提供的偏好信息, 0.6表示 X_1 优于 X_2 的偏好信息值, 0.7表示 X_2 优于 X_1 的偏好信息值.

接下来, 利用本文所提出的方法对备选的4个博士进行排序, 具体步骤如下.

Step 1: 根据式(51)～(55)计算支持度和客观权重, 即

$$\mathrm{Sup}_1 = 1.0358,\ \mathrm{Sup}_2 = 1.0883,\ \mathrm{Sup}_3 = 0.9425;$$
$$w_1^o = 0.3378,\ w_2^o = 0.3549,\ w_3^o = 0.3073.$$

Step 2: 基于主观权重, 利用式(57)$(\lambda = 0.5)$计算综合权重

$$w_1 = 0.2689,\ w_2 = 0.4274,\ w_3 = 0.3037.$$

Step 3: 利用 PFWQ 算子 (式(42)) 计算综合偏好关系矩阵 $R = (p_{ij})_{n\times n} = ((\rho_{ij}, \sigma_{ij}))_{n\times n}$.

Step 4: 将综合偏好关系 R 中的元素代入模型M2, 设定权重系数 $\varepsilon = 0.5$, 利用Lingo软件进行求解, 获取标准化的勾股模糊权重

$$\tilde{\omega}_1^* = (0.6423, 0.7328),\ \tilde{\omega}_2^* = (0.4110, 0.7081),$$
$$\tilde{\omega}_3^* = (0.2982, 0.8600),\ \tilde{\omega}_4^* = (0.0000, 0.8819).$$

根据定义11中的记分函数对权重向量排序, 有

$$s(\tilde{\omega}_1^*) = -0.1244,\ s(\tilde{\omega}_2^*) = -0.3323,$$
$$s(\tilde{\omega}_3^*) = -0.6507,\ s(\tilde{\omega}_4^*) = -0.7777.$$

因此, 备选人的排序为 $X_4 \prec_P X_3 \prec_P X_2 \prec_P X_1$. 最优的候选人为 X_1.

5 结 论

偏好关系因其精炼、有效的特性而被广泛拓展到模糊集理论中, 进而形成了模糊偏好关系、直觉模

糊偏好关系等理论. 勾股模糊集在涵盖直觉模糊集的基础上进一步扩充了信息取值区域,为评价者提供了更为充足的信息量. 基于直觉模糊偏好关系的理论发展,本文提出了勾股模糊偏好关系的基础框架: 勾股模糊偏好关系、加性一致性勾股模糊偏好关系以及由隶属度与非隶属度构成的标准化勾股模糊权重向量. 进一步,基于基础框架内容构建目标规划模型,以此来获取任意给定的勾股模糊偏好关系的权重向量. 针对勾股模糊偏好关系下的群体决策问题,选择具备有效处理极端值、关于序关系单调等优势特征的勾股模糊加权二次(PFWQ)算子作为融合个体矩阵的工具,并给出一致性定理来表明该算子与勾股模糊偏好关系的适用性. 进而,联合目标规划模型与勾股模糊加权二次算子,提出了勾股模糊偏好关系下的群体决策方法. 实际案例分析结果表明了本文方法的实用性和可行性.

参考文献(References)

[1] Saaty T L. Axiomatic foundation of the analytic hierarchy process[J]. Management Science, 1986, 32(7): 841-855.

[2] Bustince H, Pagola M, Mesiar R, et al. Grouping, overlap, and generalized bientropic functions for fuzzy modeling of pairwise comparisons[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2012, 20(3): 405-415.

[3] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information & Control, 1965, 8(3): 338-353.

[4] Orlovsky S A. Decision-making with a fuzzy preference relation[J]. Fuzzy Sets & Systems, 1978, 1(3): 155-167.

[5] Xu Z S. On compatibility of interval fuzzy preference relations[J]. Fuzzy Optimization & Decision Making, 2004, 3(3): 217-225.

[6] Xu Z S. Intuitionistic fuzzy information aggregation: Theory and applications[M]. Beijing: Science Press, 2008: 1-2.

[7] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets & Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[8] Xu Z S. Intuitionistic preference relations and their application in group decision making[J]. Information Sciences, 2007, 177(11): 2363-2379.

[9] Yager R R, Abbasov A M. Pythagorean membership grades, complex numbers, and decision making[J]. Int J of Intelligent Systems, 2013, 28(5): 436-452.

[10] Yager R R. Pythagorean membership grades in multicriteria decision making[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2014, 22(4): 958-965.

[11] Beliakov G, Bustince H, Goswami D P, et al. On averaging operators for Atanassov's intuitionistic fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2011, 181(6): 1116-1124.

[12] Deschrijver G, Kerre E E. On the relationship between some extensions of fuzzy set theory[J]. Fuzzy Sets & Systems, 2003, 133(2): 227-235.

[13] Zhang X L, Xu Z S. Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with pythagorean fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2015, 29(12): 1061-1078.

[14] Peng X D, Yang Y. Some results for pythagorean fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2015, 30(11): 1133-1160.

[15] Zhang X L. A novel approach based on similarity measure for pythagorean fuzzy multiple criteria group decision making[J]. Int J of Intelligent Systems, 2015, 31(6): 593-611.

[16] Yang Y, Ding H, Chen Z S, et al. A note on extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with pythagorean fuzzy sets[J]. Int J of Intelligent Systems, 2015, 31(1): 68-72.

[17] Ma Z M, Xu Z S. Symmetric pythagorean fuzzy weighted geometric/averaging operators and their application in multicriteria decision-making problems[J]. Int J of Intelligent Systems, 2016, 31(12): 1198-1219.

[18] Ren P J, Xu Z S, Gou X J. Pythagorean fuzzy TODIM approach to multi-criteria decision making[J]. Applied Soft Computing, 2016, 42: 246-259.

[19] Liu W F, Du Y X, Chang J. Pythagorean fuzzy interaction aggregation operators and applications in decision making[J]. Control and Decision, 2017, 32(6): 1033-1040.

[20] Liu W F, Chang J, He X. Generalized pythagorean fuzzy aggregation operators and applications in decision making[J]. Control and Decision, 2016, 31(12): 2280-2286.

[21] Li D Q, Zeng W Y. Distance measures of pythagorean fuzzy sets and their applications in multiattribute decision making[J]. Control and Decision, 2017, 32(10): 1817-1823.

[22] Garg H. A new generalized pythagorean fuzzy information aggregation using einstein operations and its application to decision making[J]. Int J of Intelligent Systems, 2016, 31(9): 886-920.

[23] Wei G W. Pythagorean fuzzy interaction aggregation operators and their application to multiple attribute decision making[J]. J of Intelligent & Fuzzy Systems, 2017, 33(4): 2119-2132.

[24] Wang Z J, Li K W. Goal programming approaches to deriving interval weights based on interval fuzzy preference relations[J]. Information Sciences, 2012, 193(193): 180-198.

[25] Wang Z J. Derivation of intuitionistic fuzzy weights based on intuitionistic fuzzy preference relations[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(9): 6377-6388.

[26] Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes[J]. IEEE Trans on Systems, Man, & Cybernetics, 1973, 3(1): 28-44.

[27] Xu Z S, Yager R R. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets[J]. Int J of general systems, 2006, 35(4): 417-433.

(责任编辑：李君玲)