

基于改进前景理论的直觉模糊随机多准则决策方法

高建伟, 郭奉佳[†]

(1. 华北电力大学 经济与管理学院, 北京 102206; 2. 华北电力大学
新能源电力与低碳发展研究北京市重点实验室, 北京 102206)

摘 要: 针对方案准则值为直觉模糊数、准则权重信息部分已知的随机多准则决策问题, 提出一种基于改进前景理论的决策分析方法. 首先, 定义一个新的记分函数, 据此可将直觉模糊数转化为实数. 其次, 考虑到决策者并非完全理性及决策者风险态度的差异性, 将决策者分为保守型、中间型及冒险型, 引入改进前景理论, 根据不同决策者类型调整参数, 构建改进前景决策矩阵. 再次, 建立以准则值总差异最大化且准则权重差异最小化为目标的非线性二次偏差优化定权模型, 计算准则权重. 进而, 结合改进前景决策矩阵及准则权重计算各方案的综合效用值, 并以此确定方案的顺序排列. 最后, 通过算例验证所提出直觉模糊随机多准则决策方法的有效性和合理性.

关键词: 直觉模糊数; 随机多准则决策; 前景理论; 记分函数; 准则权重; 效用

中图分类号: C934

文献标志码: A

Intuitionistic fuzzy stochastic multi-criteria decision-making method based on modified prospect theory

GAO Jian-wei, GUO Feng-jia[†]

(1. School of Economics and Management, North China Electric Power University, Beijing 102206, China; 2. Beijing Key Laboratory of New Energy and Low-Carbon Development, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

Abstract: This paper provides an approach based on the modified prospect theory solving the intuitionistic fuzzy stochastic multi-criteria decision-making problem where the information of criteria weights is partially known. Firstly, a new score function is defined, by which the intuitionistic fuzzy numbers can be transformed into the real numbers. Then, considering that decision-makers are not completely rational and there are differences among them, the types of decision-makers attitudes towards risk can be classified into risk-seeking, risk-neutral and risk-averse. The modified prospect value decision-making matrix is constructed by applying the modified prospect theory and adjusting its parameters to fit different types of decision-makers. In addition, a nonlinear quadratic deviation optimization model is established, whose goal is maximizing the total difference of criteria values and at the same time minimizing the difference between criteria weights. Furthermore, the order of alternatives is listed on the basis of the integrated utility values, which are derived by the modified prospect decision-making matrix and criteria weights. Finally, an example is given to illustrate the effectiveness and rationality of the proposed method.

Keywords: intuitionistic fuzzy number; stochastic multi-criteria decision-making; prospect theory; score function; criterion weight; utility

0 引 言

1986年, Atanassov^[1]对Zadeh^[2]提出的模糊集理论进行拓展, 引入新的参数——非隶属度, 提出了直觉模糊集的概念. 文献[3-8]将直觉模糊集应用于模糊条件下的多目标决策问题, 并对方案的排序进行大量的研究, 取得一定的成果. 然而, 直觉模糊多准则决

策问题的相关研究通常基于传统的期望效用理论, 该理论假设决策者完全理性, 存在Allias悖论和Ellsberg悖论等无法解释的现象. 在实际决策过程中, 由于决策者的心理认知会影响决策者对信息的主观判断, 进而对方案的选取产生重要影响, 为此, Kahneman等^[9]提出了前景理论. 随后, 基于前景理论(Prospect

收稿日期: 2018-03-11; 修回日期: 2018-05-07.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71671064); 中央高校基本科研业务费专项基金项目(2018ZD14).

责任编委: 王光臣.

作者简介: 高建伟(1972—), 男, 教授, 博士生导师, 从事系统优化与决策、新能源电力与低碳发展等研究; 郭奉佳(1996—), 女, 博士生, 从事系统优化与决策的研究.

[†]通讯作者. E-mail: 18811414922@163.com.

theory)的决策方法成为了研究的一个热点^[5,10]. 例如,高建伟等^[5]给出了一种基于前景理论的区间直觉模糊多准则决策方法;王坚强等^[10]针对梯形模糊数,给出了一种基于前景理论的模糊多准则决策方法. 前景理论强调决策者的非理性行为,将该非理性行为用价值函数和概率权重函数表示,同时通过调整函数参数来拟合不同决策者的特点. 但其函数参数设置并未区分决策者的风险偏好类型,即:现有的价值函数和概率权重函数不能反映出决策者属于保守型、中间型或是冒险型. 为此,马健等^[11]结合Bernoulli^[12]提出的效用函数,提出了基于效用曲线的改进前景理论. 目前,尚未发现有学者结合改进前景理论研究直觉模糊随机多准则决策问题.

在实际决策过程中,权重的确定对方案的排序起着重要的作用,对于权重确定方法的研究引起了学者的广泛关注,如最小方差法^[13]、最小二乘法^[14]、最大贝叶斯熵法^[15]等. 这些方法的共同特点是仅关注准则权重的公平性,即将所有的准则视为同等重要,忽略了准则权重的大小与准则值的分布有关. 在实际决策中,同一准则下方案的准则值差异越大,该准则对方案的排序和选择所发挥的作用就越大,故应对该准则赋予较大权重;反之,差异越小,应赋予较小权重.

本文研究准则值为直觉模糊数的随机多准则决策问题,给出一种基于改进前景理论的决策方法. 该方法将决策者分为3种类型,即保守型、中间型及冒险型. 在具体计算时,首先结合隶属度、非隶属度、犹豫度及从众心理,定义新的直觉模糊记分函数. 该记分函数解决了现有记分函数存在的两类问题,即当隶属度与非隶属度相同时需进行二次比较的问题,以及未考虑从众心理出现的与事实不符的问题. 其次,考虑到决策者的非理性行为,利用改进前景理论,计算各方案在各准则下的改进前景值,得到改进前景决策矩阵. 再次,本文提出一个非线性二次偏差优化定权模型,在该模型中,一方面考虑到在同一准则下,方案准则值的差异程度会对方案选择产生的影响,需使准则值的总差异最大化;另一方面,为保持公平性,各准则权重应尽量保持同等重要度. 最后,本文结合记分函数、改进前景理论和准则权重,提出直觉模糊随机多准则决策方法,并通过算例分析验证该直觉模糊随机多准则决策方法的有效性和合理性.

1 直觉模糊集的基本概念和改进前景理论

1.1 直觉模糊集的基本概念

定义1^[2] 设 X 为给定的论域,则称 $A = \{ \langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x) \rangle | x \in X \}$ 为 X 上的直觉模糊集. 其

中: $\mu_A(x)$ 和 $\sigma_A(x)$ 分别表示集合 X 中的元素 x 对于集合 A 的隶属度和非隶属度,且满足条件 $\mu_A(x) \in [0, 1], \sigma_A(x) \in [0, 1], 0 \leq \mu_A(x) + \sigma_A(x) \leq 1, x \in X$. 称 $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \sigma_A(x)$ 为集合 X 中的元素 x 属于集合 A 的犹豫度. 为方便起见,将直觉模糊集记为 $A = \langle \mu_A(x), \sigma_A(x) \rangle$.

定义2^[2] 设 $A = \{ \langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x) \rangle | x \in X \}$, $B = \{ \langle x, \mu_B(x), \sigma_B(x) \rangle | x \in X \}$ 为两直觉模糊数,若 $\mu_A(x) \geq \mu_B(x), \sigma_A(x) \leq \sigma_B(x)$,则 $A \geq B$;当且仅当 $\mu_A(x) = \mu_B(x), \sigma_A(x) = \sigma_B(x)$ 时, $A = B$.

1.2 改进前景理论

1.2.1 前景理论

1979年,Kahneman等^[9]通过心理行为实验提出了前景理论. 前景理论由价值函数和概率权重函数共同组成,即

$$V = \sum_{i=0}^n w(p_i)v(\Delta x_i);$$

$$v(x) = \begin{cases} (\Delta x)^\alpha, & \Delta x \geq 0; \\ -\theta(-\Delta x)^\beta, & \Delta x < 0; \end{cases}$$

$$w(p) = \begin{cases} \frac{p^\chi}{(p^\chi + (1-p)^\chi)^{\frac{1}{\chi}}}, & \Delta x \geq 0; \\ \frac{p^\delta}{(p^\delta + (1-p)^\delta)^{\frac{1}{\delta}}}, & \Delta x < 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中: V 表示前景价值, $v(\Delta x)$ 为价值函数(参见图1), $w(p_i)$ 为概率权重函数; Δx 为决策方案相对于参考点的差异值, $\Delta x \geq 0$ 时, $v(\Delta x)$ 为收益值, $\Delta x < 0$ 时, $v(\Delta x)$ 为损失值; α 和 β 为风险态度系数, $0 < \alpha, \beta < 1$; θ 为损失规避系数,决策者对损失的敏感程度随 θ 的增大而增大; χ 为风险收益态度系数, δ 为风险损失态度系数, $0 < \chi < 1, 0 < \delta < 1$.

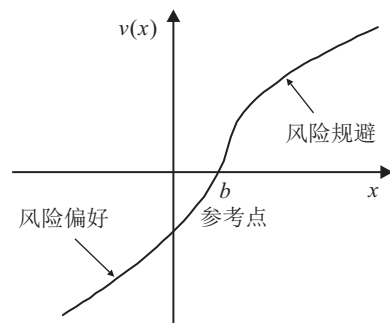


图1 前景价值函数

1.2.2 改进前景理论

马健等^[11]结合Bernoulli^[12]提出的效用函数,提出了基于效用曲线的改进前景理论. 改进前景理论的价值函数引进了新的参数 ζ ,其表达式如下:

$$v(x) = \begin{cases} \zeta(\Delta x)^\alpha, & \Delta x \geq 0; \\ -\theta(-\Delta x)^\beta, & \Delta x < 0. \end{cases} \quad (2)$$

其中: ζ 、 θ 反映决策者对于收益或损失的敏感度, 若决策者对收益相对损失更敏感, 则 $\zeta > 1, \theta = 1$; 若决策者对损失相对收益更敏感, 则 $\zeta = 1, \theta > 1$. α 、 β 反映决策者对于风险的态度, 若决策者为冒险型, 则 $0 < \alpha, \beta < 1$ (参见图1); 若决策者为中间型, 则 $\alpha, \beta = 1$ (参见图2); 若决策者为保守型, 则 $\alpha, \beta > 1$ (参见图3).

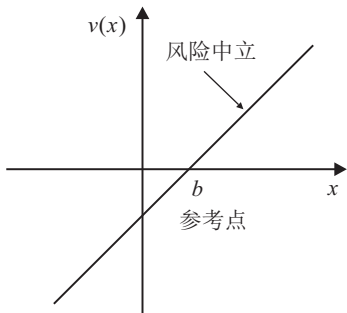


图2 改进前景价值函数(中间型)

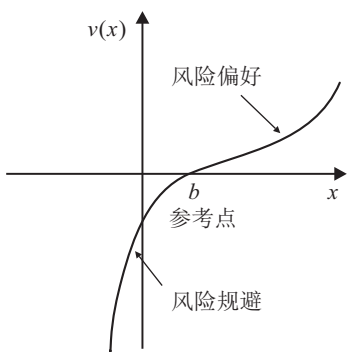


图3 改进前景价值函数(保守型)

综上, 改进前景理论的价值函数较原有的价值函数有以下不同点:

1) α 、 β 的取值范围扩大, 由前景理论规定的 $0 < \alpha, \beta < 1$ 扩展到 $\alpha, \beta = 1$ 以及 $\alpha, \beta > 1$, 依据不同的 α 、 β 的取值范围, 将决策者分为保守型、中间型及冒险型3种.

2) 引进新的参数 ζ , 若决策者对收益更加敏感, 则 $\zeta > 1, \theta = 1$; 若决策者对损失更加敏感, 则 $\zeta = 1, \theta > 1$.

2 新的记分函数

2.1 现有记分函数的缺陷

1994年, Chen等^[3]最先定义得分函数. 设任意直觉模糊数 $A = \{ \langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x) \rangle | x \in X \}$, 则 A 的得分函数为

$$S(A) = \mu_A(x) - \sigma_A(x). \quad (3)$$

该得分函数表示的是直觉模糊数隶属度与非隶属度的差值, 即为净隶属程度, $S(A)$ 的值越大, 净隶属程度越高, 相应的直觉模糊数越大. 因此, 直觉模糊数的大小可通过比较得分函数的大小来确定. 但是, 此得分函数仅强调隶属度与非隶属度的绝对差值而忽略了犹豫度对决策的影响. 若两直觉模糊数的净隶属程度相同, 而隶属度与非隶属度不同时, 则难以比较其大小.

Hong等^[4]针对得分函数的缺陷提出了直觉模糊数的精确函数. A 的精确函数为

$$C(A) = \mu_A(x) + \sigma_A(x), \quad (4)$$

其中 $C(A)$ 值越大, 方案 A 的已知信息越多, 未知信息的影响越小, 方案就越优. 但该精确函数必须与得分函数同时使用才能区分直觉模糊数的大小.

高建伟等^[5]将得分函数与精确函数结合, 综合考虑直觉模糊数的隶属信息、非隶属信息和犹豫信息对决策结果的影响, 定义了新的记分函数

$$S(A) = \frac{\mu_A(x) - \sigma_A(x)}{1 + \pi_A(x)}, \quad (5)$$

其中 $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \sigma_A(x)$. 该函数表示当直觉模糊数的隶属度与非隶属度的绝对差值越大, 犹豫度越小时, $S(A)$ 值越大, 直觉模糊数 A 越大. 对于式(3)所示的得分函数存在无法区分大小的情况, 通过该记分函数可以直接得到排序结果, 无需辅助函数. 但该记分函数有时会出现失效的情形, 使决策结果不准确. 例如, 对于直觉模糊数 $A_1 = \langle 0.8, 0.2 \rangle$, $A_2 = \langle 0.6, 0 \rangle$, 由式(5)可知, $S(A_1) = 0.6, S(A_2) = 0.4286, S(A_1) > S(A_2)$, 故直觉模糊数 $A_1 > A_2$, 而实际上人们更倾向于选择无人反对的结果 A_2 , 因此, 该记分函数所得结果在某些情况下与事实不符.

Ye^[6]认为, 记分函数应考虑犹豫人群的不同选择意向, 将从众心理引入记分函数, 考虑支持部分与反对部分对决策的影响, 利用参数 λ 来反映犹豫部分 $\pi_A(x)$ 所起的作用, 提出了改进的记分函数如下:

$$S(A) = \mu_A(x) - \sigma_A(x) + \lambda \pi_A(x), \quad (6)$$

其中 $\lambda \in [-1, 1]$. 但参数 λ 的取值通常难以合理确定.

吴冲等^[7]针对直觉模糊数的犹豫部分, 运用累加、取极限的方法进行划分, 提出了记分函数如下:

$$S(A) = \mu_A(x) + (\mu_A(x) - \sigma_A(x))\pi_A(x) + (\mu_A(x) - \sigma_A(x))^2\pi_A(x)^2 + \dots + (\mu_A(x) - \sigma_A(x))^n\pi_A(x)^n,$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$S(A) = \mu_A(x) + \frac{(\mu_A(x) - \sigma_A(x))\pi_A(x)}{1 - (\mu_A(x) - \sigma_A(x))\pi_A(x)}. \quad (7)$$

该记分函数对犹豫部分按比例进行 n 次细分,实际上夸大了犹豫部分的信息对于评价结果的影响;尤其当 $n \rightarrow \infty$ 后,犹豫部分趋于0,不符合决策过程中有用信息越多越好的要求.例如:直觉模糊数 $A_1 = \langle 0.6, 0.1 \rangle$, $A_2 = \langle 0.75, 0.25 \rangle$,由式(7)可知, $S(A_1) = 0.7765$, $S(A_2) = 0.75$, $S(A_1) > S(A_2)$,故直觉模糊数 $A_1 > A_2$,而实际上人们更倾向于选择未知信息较低的结果 A_2 ,因此,该记分函数所得结果在某些情况下与事实不符.

王坚强等^[8]综合考虑隶属度、非隶属度和犹豫度对于决策的影响,提出了用直觉模糊交叉熵定义记分函数,即

$$S(A) = \begin{cases} \mu_A(x) - \sigma_A(x) + H(x)\pi_A(x), & \mu_A(x) > \sigma_A(x); \\ \mu_A(x) - \sigma_A(x) - H(x)\pi_A(x), & \mu_A(x) < \sigma_A(x); \\ 0, & \mu_A(x) = \sigma_A(x). \end{cases} \quad (8)$$

其中 $H(x)$ 为直觉模糊交叉熵.该记分函数运用隶属度与非隶属度的交互关系来确定犹豫度的分配.但当支持度与反对度相同时,即当 $\mu_A(x) = \sigma_A(x)$ 时,则需对其进行二次比较.

2.2 新的记分函数

本文将从众心理引入记分函数,利用直觉模糊交叉熵来确定犹豫度的分配.同时,在实际决策中,人们总是认为最优方案的支持度越高越好,且其反对度及犹豫度越低越好,即: $\mu_A(x)$ 越大越好, $\sigma_A(x)$ 越小越好, $\pi_A(x)$ 越小越好.基于上述分析,本文对文献[5,8]提出的记分函数进行完善,提出一个新的记分函数.该函数可以解决文献[5]未考虑从众心理的问题,同时可以解决文献[8]出现的当支持票与反对票相同时无法比较大小或者需要二次比较的问题.

定义3 设任意直觉模糊数 $A = \{\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x) \rangle | x \in X\}$,称

$$S(A) = \frac{\exp\{\mu_A(x) - \sigma_A(x) + H_I(x)\pi_A(x)\}}{1 + \pi_A^2(x)} \quad (9)$$

为直觉模糊数的记分函数.其中

$$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \sigma_A(x);$$

$$H_I(x) = H(x)I(x);$$

$$H(x) = \frac{H(\mu_A(x), \sigma_A(x)) + H(\sigma_A(x), \mu_A(x))}{2};$$

$$H(\mu_A(x), \sigma_A(x)) =$$

$$\mu_A(x) \log_2 \frac{\mu_A(x)}{(\mu_A(x) + \sigma_A(x))/2} + (1 - \mu_A(x)) \log_2 \frac{(1 - \mu_A(x))}{1 - (\mu_A(x) + \sigma_A(x))/2};$$

$$I(x) = \begin{cases} 1, & \mu_A(x) > \sigma_A(x); \\ 0, & \mu_A(x) = \sigma_A(x); \\ -1, & \mu_A(x) < \sigma_A(x). \end{cases}$$

$\mu_A(x), \sigma_A(x), \pi_A(x)$ 分别表示 A 的隶属度、非隶属度和犹豫度; $H(x)$ 为直觉模糊交叉熵^[8],用来表示隶属度与非隶属度的交互程度.

式(9)所示记分函数与现有记分函数的关系可归纳如下.

相同点:

1) 式(9)所示记分函数与现有记分函数都考虑了隶属度和非隶属度的影响,据此将直觉模糊数转化为实数.

2) 除Chen等^[3]、Hong等^[4]的记分函数外,式(9)所示记分函数与其他记分函数都考虑了犹豫度的作用.如:高建伟等^[5]的记分函数认为犹豫信息越少越好;Ye^[6]的记分函数通过引入参数来确定犹豫信息的作用;吴冲等^[7]的记分函数将犹豫部分细化为3个部分,并利用累加、取极限的方法来确定犹豫度的分配;王坚强等^[8]的记分函数考虑了隶属度相对非隶属度的交互程度对犹豫信息的影响.

不同点:

1) 本文所提出的记分函数认为最优方案的隶属度越高越好,非隶属度及犹豫度越低越好;同时将决策者的从众心理引入记分函数,利用直觉模糊交叉熵来确定犹豫度的分配.该记分函数解决了现有记分函数存在的两类问题,即当隶属度与非隶属度相同时需进行二次比较的问题以及未考虑从众心理出现的与事实不符的问题.

2) 新的记分函数引入了指数函数,故相对于以往的记分函数具有较好的区分性.

下面通过3个例子进一步说明式(9)所示记分函数与已有记分函数的区别.

例1 设两个直觉模糊数分别为 $A_1 = \langle 0.6, 0 \rangle$, $A_2 = \langle 0.8, 0.2 \rangle$,运用Chen等^[3]记分函数所得结果均为0.6,直觉模糊数 A_1, A_2 的大小无法区分.采用文献[5]所提出的记分函数可得 $S(A_1) = 0.4286$, $S(A_2) = 0.6$,即 $S(A_1) < S(A_2)$.然而,在实际决策中,人们总是倾向于选择无人反对的方案 A_1 ,故采用该记分函数所得决策结果与事实不符.运用本

文记分函数的结果为 $A_1 = 1.8402, A_2 = 1.8221, S(A_1) > S(A_2)$, 故直觉模糊数 $A_1 > A_2$, 与实际相符.

例2 设两个直觉模糊数分别为 $A_1 = \langle 0.5, 0.5 \rangle, A_2 = \langle 0.3, 0.3 \rangle$, 运用Chen等^[3]、高建伟等^[5]、王坚强等^[8]的记分函数可得 $S(A_1) = S(A_2) = 0$, 因此, $A_1、A_2$ 的大小无法区分. 运用式(9)所示记分函数的结果为 $S(A_1) = 1, S(A_2) = 0.8621, S(A_1) > S(A_2)$, 故直觉模糊数 $A_1 > A_2$.

例3 设两个直觉模糊数分别为 $A_1 = \langle 0.6, 0.1 \rangle, A_2 = \langle 0.75, 0.25 \rangle$, 采用吴冲等^[7]提出的记分函数可得 $S(A_1) = 0.7765, S(A_2) = 0.75$, 即前者较大. 然而, 运用式(9)所示记分函数可得 $S(A_1) = 1.6129, S(A_2) = 1.6487, S(A_1) < S(A_2)$, 即后者较大, 这与运用Hong等^[4]精确函数的结果一致. 事实上, 精确度越高, 相应的直觉模糊数越优, 因此后者 A_2 较大.

定理1 设 $A = \{ \langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x) \rangle | x \in X \}$ 为直觉模糊数. 其中: $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \sigma_A(x), \mu_A(x) \in [0, 1], \sigma_A(x) \in [0, 1], \pi_A(x) \in [0, 1], 0 \leq \mu_A(x) + \sigma_A(x) \leq 1, x \in X$. 则记分函数满足:

- 1) $e^{-1} \leq S(A) \leq e$;
- 2) $S(A) = e \Leftrightarrow A = \{ \langle x, 1, 0 \rangle | x \in X \}$;
- 3) $S(A) = e^{-1} \Leftrightarrow A = \{ \langle x, 0, 1 \rangle | x \in X \}$.

证明 1) 由文献[8]可知

$$-1 \leq \mu_A(x) - \sigma_A(x) + H_I(x)\pi_A(x) \leq 1,$$

故

$$e^{-1} \leq \exp\{\mu_A(x) - \sigma_A(x) + H_I(x)\pi_A(x)\} \leq e,$$

则

$$e^{-1} \leq \frac{\exp\{\mu_A(x) - \sigma_A(x) + H_I(x)\pi_A(x)\}}{1 + \pi_A^2(x)} \leq e,$$

即

$$e^{-1} \leq S(A) \leq e.$$

2) 由 $S(A)$ 的函数可以看出, 只有当 $\mu_A(x) = 1, \sigma_A(x) = 0$ 时, 即当 $A = \{ \langle x, 1, 0 \rangle | x \in X \}$ 时, $S(A)$ 达到最大值 e .

3) 由 $S(A)$ 的函数可以看出, 只有当 $\mu_A(x) = 0, \sigma_A(x) = 1$ 时, 即当 $A = \{ \langle x, 0, 1 \rangle | x \in X \}$ 时, $S(A)$ 达到最小值 e^{-1} . □

定理2 设 $A = \{ \langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x) \rangle | x \in X \}$ 为直觉模糊数, 则记分函数 $S(A)$ 关于 $\mu_A(x)$ 单调递增, 关于 σ_A 单调递减.

证明 对 $S(A)$ 关于 $\mu_A(x)$ 求一阶导(以下为表述方便, 将 $\mu_A(x)$ 简述为 μ, σ_A 简述为 $\sigma, \pi_A(x)$ 简述为 $\pi, H(x)$ 简述为 $H, H_I(x)$ 简述为 H_I), 可得

$$\frac{\partial S(A)}{\partial \mu} =$$

$$\frac{\exp\{\mu - \sigma + H_I\pi\}(\mu - \sigma + H_I\pi)'_{\mu}(1 + \pi^2)}{(1 + \pi^2)^2} + \frac{2\pi \exp\{\mu - \sigma + H_I\pi\}}{(1 + \pi^2)^2}.$$

1) 当 $\mu > \sigma$ 时, 有

$$(\mu - \sigma + H_I\pi)'_{\mu} = (1 - \mu - \sigma) \log_2 \frac{2\mu[1 - (\mu + \sigma)/2]}{(1 - \mu)(\mu + \sigma)} + 1 - H.$$

因为

$$\left(\log_2 \frac{2\mu[1 - (\mu + \sigma)/2]}{(1 - \mu)(\mu + \sigma)} \right)'_{\mu} \geq 0,$$

所以

$$\log_2 \frac{2\mu[1 - (\mu + \sigma)/2]}{(1 - \mu)(\mu + \sigma)} \geq \log_2 \frac{2\sigma[1 - (\sigma + \sigma)/2]}{(1 - \sigma)(\sigma + \sigma)} = \log_2 1 = 0.$$

又因为

$$1 - \mu - \sigma \geq 0, H \in [0, 1],$$

所以

$$(\mu - \sigma + H_I\pi)'_{\mu} \geq 0.$$

2) 当 $\mu = \sigma$ 时, 有

$$(\mu - \sigma + H_I\pi)'_{\mu} = 1.$$

3) 当 $\mu < \sigma$ 时, 有

$$(\mu - \sigma + H_I\pi)'_{\mu} = - (1 - \mu - \sigma) \log_2 \frac{2\mu[1 - (\mu + \sigma)/2]}{(1 - \mu)(\mu + \sigma)} + 1 + H.$$

因为

$$\left(\log_2 \frac{2\mu[1 - (\mu + \sigma)/2]}{(1 - \mu)(\mu + \sigma)} \right)'_{\mu} \geq 0,$$

所以

$$\log_2 \frac{2\mu[1 - (\mu + \sigma)/2]}{(1 - \mu)(\mu + \sigma)} \leq \log_2 \frac{2\sigma[1 - (\sigma + \sigma)/2]}{(1 - \sigma)(\sigma + \sigma)} = \log_2 1 = 0.$$

又因为

$$1 - \mu - \sigma \geq 0, H \in [0, 1],$$

所以

$$(\mu - \sigma + H_I\pi)'_{\mu} \geq 0.$$

综上所述

$$(\mu - \sigma + H_I\pi)'_{\mu} \geq 0,$$

且

$$\exp\{\mu - \sigma + H_I\pi\} \geq 0, 2\pi \geq 0, (1 + \pi^2)^2 \geq 0,$$

故容易得出

$$\frac{\partial S(A)}{\partial \mu} = \frac{\exp\{\mu - \sigma + H_I \pi\}(\mu - \sigma + H_I \pi)'_{\mu}(1 + \pi^2)}{(1 + \pi^2)^2} + \frac{2\pi \exp\{\mu - \sigma + H_I \pi\}}{(1 + \pi^2)^2} \geq 0.$$

同理,对 $S(A)$ 关于 $\sigma_A(x)$ 求一阶导,可得

$$\frac{\partial S(A)}{\partial \sigma} = \frac{\exp\{\mu - \sigma + H_I \pi\}(\mu - \sigma + H_I \pi)'_{\sigma}(1 + \pi^2)}{(1 + \pi^2)^2} + \frac{2\pi \exp\{\mu - \sigma + H_I \pi\}}{(1 + \pi^2)^2} \leq 0.$$

因此,记分函数 $S(A)$ 关于 $\mu_A(x)$ 单调递增,关于 $\sigma_A(x)$ 单调递减. □

3 基于改进的前景理论的直觉模糊随机多准则决策方法

3.1 问题描述

对于某一直觉模糊随机多准则决策问题,设 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 为方案集, $G = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ 为方案的准则集, $W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ 为方案的准则权重. 其中: $w_j \in [0, 1], \sum_{j=1}^n w_j = 1; \theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ 为状态集,第 θ_t 种状态发生的概率为 P_t , 满足 $P_t \in [0, 1], \sum_{t=1}^n P_t = 1$; 在第 θ_t 种状态下,方案 A_i 在准则 G_j 下的准则值可用直觉模糊数表示为 $A_{ij}^t = \langle a_{ij}^t, b_{ij}^t \rangle$.

3.2 权重的计算

在实际决策过程中,权重的取值对方案的排序起着重要的作用,由于客观事物的复杂性及决策者自身知识结构的局限性,决策者往往难以给出确切的权重. 对于权重的研究引起了学者的广泛关注,相继给出了一些有用的方法,如最小方差法^[13]、最小二乘法^[14]、最大贝叶斯熵法^[15]等. 这些方法的共同特点是只关注准则权重的公平性,将所有的准则视为同等重要. 然而,上述方法中准则权重的确定与准则值的分布无关,这显然是不合理的. 例如,考虑以下两个决策矩阵 D_1 和 D_2 :

$$D_1 = \begin{matrix} & G_1 & G_2 & G_3 \\ A_1 & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \\ A_2 & \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \\ A_3 & \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$D_2 = \begin{matrix} & G_1 & G_2 & G_3 \\ A_1 & \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \\ A_2 & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \\ A_3 & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

对于决策矩阵 D_1 ,将 G_1 和 G_2 两列准则值互换,得到决策矩阵 D_2 ,若使用上述文献的定权方法,将得出决策矩阵 D_1 和 D_2 具有相同的准则权重向量,这显然是不符合实际的. 在实际决策过程中,同一准则下不同方案的准则值差异越大,该准则对方案的排序和选择所发挥的作用就越大,故应对该准则赋予较大权重;反之,差异越小,则越应赋予较小权重. 例如 $G_1 = (1/3, 1/3, 1/3)^T, G_2 = (0.1, 0.3, 0.6)^T$,因 G_1 对方案的选择发挥的作用不如 G_2 ,故赋予 G_1 的权重应该小于 G_2 的权重;同时,为保持公平性,所有准则都应被视为同等重要,因此建议所有准则的权重相等. 根据上述分析,本文提出一个非线性二次偏差优化模型. 在该模型中,一方面,为了对方案进行排序和选择,希望各准则值的总差异是最大的;另一方面,为了保持公平性,所有准则都应被认为是同等重要的,即准则权重变化是最小的. 基于此可给出如下定权模型:

$$\begin{aligned} \max & \left\{ P_1 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^m w_j (1 - x_{ij}/x_{lj})^2 - P_2 \sum_{j=1}^{n-1} (1 - w_j/w_{j+1})^2 \right\}; \\ \text{s.t. } & w_j \in [0, 1], w_j \in T, \sum_{j=1}^n w_j = 1. \end{aligned} \quad (10)$$

其中: x_{ij} 表示方案 A_i 在准则 G_j 下的改进前景值; w_j 表示准则 G_j 的权重值; P_1, P_2 表示目标函数的相对重要性, $P_1 + P_2 = 1$; T 表示部分已知信息的权重集合. 可借助 Matlab 等数学软件求解. $W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$.

3.3 决策方法

对于上述直觉模糊多属性决策问题,给出具体步骤如下.

Step 1: 计算记分函数矩阵. 根据实际情况,列出直觉模糊数的决策矩阵,利用式(9)将描述决策信息的直觉模糊数转化为实数,得到记分函数矩阵 $S^t = (S_{ij}^t)_{m \times n}$.

Step 2: 计算改进前景决策矩阵. 针对决策者的风险偏好类型,利用改进的前景理论(式(1)、(2)),以 0 为决策参考点,计算各方案在各准则下的改进前景值,得到改进前景决策矩阵 $v = (v_{ij})_{m \times n}$.

Step 3: 确定准则权重. 根据式(10)计算准则权重

$W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$.

Step 4: 计算各方案的综合改进前景值, 并对各方案进行排序. 利用公式 $u_i = \sum_{j=1}^n v_{ij}w_j (i = 1, 2, \dots, m)$ 计算各方案的综合改进前景值, 并依此对各方案进行排序, 综合改进前景值越大, 对应的方案越优.

4 实例分析

某服装厂准备对3种服装设计择优进行投资生产. 该服装厂拟采用3个准则对各设计方案进行评估: 收益 G_1 、社会影响 G_2 和环境影响 G_3 . 决策者认为, 在投资期间各设计方案的各个准则对应着3种可能的风险状态: 高等、中等、低等, 且3种可能的风险状态概率分别为0.1、0.6、0.3. 准则权重的客观允许范围: $w_1 \in [0.4, 0.6], w_2 \in [0.3, 0.4], w_3 \in [0.1, 0.3]$, 且 $w_1 \geq w_2 \geq w_3$, 试确定服装厂的最佳投资方案. 经过专家打分, 可得到专家评估表, 见表1.

表1 专家评估表

| 状态 | 高等风险 | | |
|-------|------------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| | G_1 | G_2 | G_3 |
| A_1 | $\langle 0.3, 0.55 \rangle$ | $\langle 0.65, 0.2 \rangle$ | $\langle 0.4, 0.4 \rangle$ |
| A_2 | $\langle 0.5, 0.15 \rangle$ | $\langle 0.35, 0.25 \rangle$ | $\langle 0.3, 0.4 \rangle$ |
| A_3 | $\langle 0.45, 0.2 \rangle$ | $\langle 0.25, 0.5 \rangle$ | $\langle 0.55, 0.2 \rangle$ |
| 状态 | 中等风险 | | |
| | G_1 | G_2 | G_3 |
| A_1 | $\langle 0.55, 0.2 \rangle$ | $\langle 0.25, 0.4 \rangle$ | $\langle 0.65, 0.2 \rangle$ |
| A_2 | $\langle 0.55, 0.2 \rangle$ | $\langle 0.35, 0.2 \rangle$ | $\langle 0.4, 0.3 \rangle$ |
| A_3 | $\langle 0.4, 0.2 \rangle$ | $\langle 0.35, 0.45 \rangle$ | $\langle 0.5, 0.15 \rangle$ |
| 状态 | 低等风险 | | |
| | G_1 | G_2 | G_3 |
| A_1 | $\langle 0.55, 0.15 \rangle$ | $\langle 0.35, 0.15 \rangle$ | $\langle 0.35, 0.4 \rangle$ |
| A_2 | $\langle 0.45, 0.15 \rangle$ | $\langle 0.25, 0.35 \rangle$ | $\langle 0.35, 0.4 \rangle$ |
| A_3 | $\langle 0.75, 0.15 \rangle$ | $\langle 0.5, 0.15 \rangle$ | $\langle 0.35, 0.4 \rangle$ |

Step 1: 计算高、中、低等风险下的记分函数矩阵, 有

$$S^1 = \begin{bmatrix} 0.7563 & 1.5700 & 0.9615 \\ 1.3114 & 0.9560 & 0.8281 \\ 1.1651 & 0.7241 & 1.3684 \end{bmatrix},$$

$$S^2 = \begin{bmatrix} 1.4243 & 0.7579 & 1.5700 \\ 1.3684 & 0.9752 & 1.0163 \\ 1.0677 & 0.8687 & 1.3114 \end{bmatrix},$$

$$S^3 = \begin{bmatrix} 1.4243 & 0.9965 & 0.8948 \\ 1.2015 & 0.7773 & 0.8948 \\ 1.8557 & 1.3114 & 0.8948 \end{bmatrix}.$$

Step 2: 计算改进前景决策矩阵.

1) 若决策者为冒险型, 则 $0 < \alpha, \beta < 1$. 令 $\alpha = \beta = 0.88, \chi = 0.61, \delta = 0.66, \zeta = 1, \theta = 2.25^{[11]}$, 得到改进前景决策矩阵为

$$v = \begin{bmatrix} -0.1338 & -0.0971 & 0.1018 \\ -0.1439 & -0.2818 & -0.4793 \\ -0.1455 & -0.0552 & 0.0779 \end{bmatrix}.$$

2) 若决策者为中间型, 则 $\alpha = \beta = 1$. 令 $\alpha = \beta = 1, \chi = \delta = 0.58, \zeta = 1, \theta = 2.25^{[11]}$, 得到改进前景决策矩阵为

$$v = \begin{bmatrix} -0.1245 & -0.0411 & 0.0837 \\ -0.1235 & -0.1820 & -0.3855 \\ -0.0942 & -0.0655 & 0.0658 \end{bmatrix}.$$

3) 若决策者为保守型, 则 $\alpha, \beta > 1$. 令 $\alpha = \beta = 1.21, \chi = 0.55, \delta = 0.49, \zeta = 1, \theta = 2.25^{[11]}$, 得到改进前景决策矩阵为

$$v = \begin{bmatrix} -0.0985 & 0.0118 & 0.0644 \\ -0.0886 & -0.1265 & -0.2597 \\ -0.0380 & -0.0627 & 0.0503 \end{bmatrix}.$$

Step 3: 确定准则权重.

$$\max \left\{ 0.5 \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^3 w_j (1 - v_{ij}/v_{lj})^2 - 0.5 \sum_{j=1}^2 (1 - w_j/w_{j+1})^2 \right\}.$$

s.t. $0.4 \leq w_1 \leq 0.6,$
 $0.3 \leq w_2 \leq 0.4,$
 $0.1 \leq w_3 \leq 0.3,$
 $w_3 \leq w_2 \leq w_1,$
 $\sum_{j=1}^3 w_j = 1, w_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \quad (11)$

对决策矩阵进行标准化处理, 解得3种类型决策者的最优化准则权重均为 $W = \{0.4, 0.3, 0.3\}$.

Step 4: 计算各方案的综合改进前景值, 并对各方案进行排序, 见表2.

表2 排序结果

| | 冒险型 | 中间型 | 保守型 |
|-------|---|---------|---------|
| u_1 | -0.0521 | -0.0370 | -0.0165 |
| u_2 | -0.2859 | -0.2197 | -0.1513 |
| u_3 | -0.0514 | -0.0376 | -0.0189 |
| 排序 | $A_2 \prec A_1 \prec A_3 \quad A_2 \prec A_3 \prec A_1 \quad A_2 \prec A_3 \prec A_1$ | | |

5 结论

针对决策信息为直觉模糊数的随机多准则决策问题,本文提出了一种基于改进前景理论的直觉模糊多准则决策方法.该方法首先给出了一个新的直觉模糊记分函数,依据该记分函数可将直觉模糊数转化为实数.鉴于在实际中决策者并非完全理性,并且决策者的风险态度具有差异性,故通过引入改进前景理论,将实数矩阵转化为改进前景决策矩阵.针对定权问题,本文建立了以准则值总差异最大化、准则权重差异最小化为目标函数,并以权重信息部分已知为约束条件的非线性二次偏差优化定权模型.该模型克服了传统定权方法仅关注准则权重的公平性而忽略准则值分布的问题.最后,结合得到的前景决策矩阵和准则权重模型给出了确定最优方案的决策方法.在未来研究中,可进一步考虑区间犹豫模糊数的随机多准则决策问题.

参考文献(References)

- [1] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 20(1): 87-96.
- [2] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. *Information and Control*, 1965, 8(3): 338-353.
- [3] Chen S M, Tan J M. Handling multi-criteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, 67(2): 163-172.
- [4] Hong D H, Choi C H. Multi-criteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 114(1): 103-113.
- [5] 高建伟, 刘慧晖, 谷云东. 基于前景理论的区间直觉模糊多准则决策方法[J]. *系统工程理论与实践*, 2014, 34(12): 3175-3181.
(Gao J W, Liu H H, Gu Y D. Interval-valued intuitionistic fuzzy multi-criteria decision-making methods based on prospect theory[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2014, 34(12): 3175-3181.)
- [6] Ye J. Improved method of multi-criteria fuzzy decision-making based on vague sets[J]. *Computer-Aided Design*, 2007, 39(2): 164-169.
- [7] 吴冲, 刘千, 万翔宇. 基于改进得分函数的直觉模糊多属性决策方法[J]. *统计与信息论坛*, 2014, 29(1): 3-8.
(Wu C, Liu Q, Wan X Y. Intuitionistic fuzzy multi-criteria decision-making approach based on prospect score function[J]. *Statistics & Information Forum*, 2014, 29(1): 3-8.)
- [8] 王坚强, 李婧婧. 基于记分函数的直觉随机多准则决策方法[J]. *控制与决策*, 2010, 25(9): 1297-1306.
(Wang J Q, Li J J. Intuitionistic random multi-criteria decision-making approach based on score functions[J]. *Control and Decision*, 2010, 25(9): 1297-1306.)
- [9] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk[J]. *Econometrica*, 1979, 47(2): 263-291.
- [10] 王坚强, 孙腾, 陈晓红. 基于前景理论的信息不完全的模糊多准则决策方法[J]. *控制与决策*, 2009, 24(8): 1198-1202.
(Wang J Q, Sun T, Chen X H. Multi-criteria fuzzy decision-making method based on prospect theory with incomplete information[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(8): 1198-1202.)
- [11] 马健, 孙秀霞. 基于效用曲线改进的前景理论价值函数[J]. *信息与控制*, 2011, 40(4): 501-506.
(Ma J, Sun X X. Modified value function in prospect theory based on utility curve[J]. *Information and Control*, 2011, 40(4): 501-506.)
- [12] Bernoulli D. Exposition of a new theory on the measurement of risk[J]. *Econometrica*, 1954, 22(1): 22-36.
- [13] Fullér R, Majlender P. On obtaining minimal variability OWA operator weights[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2003, 136(2): 203-215.
- [14] Wang Y M, Luo Y, Liu X W. Two new models for determining OWA operator weights[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2007, 52(2): 203-209.
- [15] Yari G, Chaji A R. Maximum Bayesian entropy method for determining ordered weighted averaging operator weights[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2012, 63(1): 338-342.

(责任编辑: 李君玲)