

# 复杂网络环境下群体投票规则的评价模型 ——基于民主的视角

郭春香<sup>1</sup>, 王栋志<sup>2,†</sup>, 谭越<sup>1</sup>

(1. 四川大学 商学院, 成都 610065; 2. 西南科技大学 计算机科学与技术学院, 四川 绵阳 621010)

**摘要:** 基于复杂网络投票框架, 构建以全局最优候选人的评价函数作为 Condorcet 规则与多数赞成规则决策结果的评价标准. 通过引入投票者观点支持域, 以及全局最优候选人的有效性判定条件, 构造“妥协度-支持度”置换度指标. 设置支持度与妥协度的不同目标优先级, 采用一种基于 Delaunay 三角剖分的全局最优化算法, 求出全局最优候选人搜索解, 并建立评价函数衡量投票规则的优劣. 数值仿真表明, 在大多数偏好网络下, 所提出的评价标准能够更准确地衡量 Condorcet 规则与多数赞成规则所选获胜者偏离投票群体真实意愿的程度.

**关键词:** Condorcet 规则; 投票; 多数赞成规则; 群决策; 复杂网络

中图分类号: TP273

文献标志码: A

## Evaluation model of group voting rules in complex network — Based on perspective of democracy

GUO Chun-xiang<sup>1</sup>, WANG Dong-zhi<sup>2,†</sup>, TAN Yue<sup>1</sup>

(1. Business School, Sichuan University, Chengdu 610065, China; 2. School of Computer Science and Technology, Southwest University of Science and Technology, Mianyang 621010, China)

**Abstract:** Based on the voting framework of complex networks, an evaluation function of global optimal winners, which can act as a criterion for evaluating the decision of the Condorcet rule and the majority approval rule, is established. By introducing voters' point supporting region and setting the effectiveness decision condition for the optimal candidate, we construct a “compromise-support” index. With the different priority between compromise and support, we can solve the search solution for the global optimal candidate using a global optimization algorithm by the Delaunay triangle partition, and present the evaluation function to measure some voting rules. Numerical simulations show that, in most networks, the proposed evaluation function can measure more accurately the deviation degree to people's real willing for the Condorcet rule and the majority approval rule.

**Keywords:** Condorcet method; voting; majority approval rule; group decision; complex networks

## 0 引 言

投票表决作为民主决策的一种重要方式, 其投票规则的制定不仅需要体现投票者的效用(即偏好), 同时要求能由投票者的偏好信息确切地选出唯一的获胜者<sup>[1]</sup>. 目前虽然存在大量的投票规则, 如多数赞成规则、Borda 计分规则、Kemeny 规则等, 但由于没有统一的评价标准, 最佳投票规则并不存在<sup>[2]</sup>.

Arrow<sup>[3]</sup> 早期提出了构建投票规则的公理化评价体系, 并指出当前基于选票的投票模型存在严重

的局限性. 虽然投票群体中的每个成员的偏好(即对候选人优劣的排序)是传递的, 但用 Condorcet 规则对候选人进行两两比较, 基于半数规则得出的排序不再具有传递性而出现循环. 这种现象称为 Condorcet 效应, 也称投票悖论. 由于 Arrow 的公理化评价体系对投票规则的性质定义过于苛刻, 同时一些性质之间也被证明存在矛盾, 并不适用于投票规则的评价与选择. Blake 等<sup>[4]</sup> 则是采用实证的方式, 研究不同数据集下的社会选择函数的特点与性质, 构建基于数据分析

收稿日期: 2017-08-05; 修回日期: 2017-10-31.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71471123); 四川省软科学科技计划项目(017ZR0030); 中央高校基本科研业务费专项基金项目(skqy201621).

责任编辑: 李登峰.

作者简介: 郭春香(1971—), 女, 教授, 博士生导师, 从事数据驱动的行为决策等研究; 王栋志(1993—), 男, 硕士生, 从事数据挖掘、复杂网络的研究.

†通讯作者. E-mail: wdz1222@126.com.

下的投票规则评价模型。

面临日益复杂的民主投票环境,例如英国脱欧、美国大选等,Noltemeier等<sup>[5]</sup>提出利用复杂网络理论探究民主投票问题:1)投票规则是否集结投票群观点偏好;2)当前投票规则是否能够得到高质量的决策结果.Gouret等<sup>[6]</sup>提出基于复杂网络的Downsian投票模型,将投票人与候选人映射为多维空间中的节点,多维空间中的每个维度衡量投票者对候选人的考察因素,并利用节点距离反映投票者的效应即偏好.Bhadury等<sup>[7]</sup>进一步将偏好距离赋予权重来表示投票人对候选人在不同维度的重要程度,投票规则选择出的获胜者应该是投票者对候选人的加权欧氏距离的最大值.Noltemeier等<sup>[5]</sup>则提出一种特殊的树状拓扑网络结构,并在该结构上提出最优Condorcet与Simpson获胜者的搜索算法来求解单一的社会偏好模型。

为了衡量当前投票规则是否能够得到高质量的投票结果,不少学者采用优化理论,通过优化目标函数构造全局最优候选人作为评价投票规则结果的评价标准.如Menezes等<sup>[8]</sup>采用最优选址策略的思想,利用韦伯问题的目标函数作为Condorcet规则的评价函数,将Condorcet规则最优解与韦伯问题的最优解的比值即相对效用作为衡量Condorcet规则的质量函数.Sayeed<sup>[9]</sup>在复杂网络框架下证明了利用韦伯问题作为Condorcet解的评价函数,其相对效用的最大上界为3.同时,Dressler<sup>[10]</sup>进一步证明了当投票者对候选人的偏好距离采用无穷范数与1-范数时,Condorcet最优解是韦伯问题的最优解.Menezes等<sup>[8]</sup>基于复杂网络的投票研究均假设存在一个“全局决策人”,挑选全局最优候选人作为评价投票规则产生的获胜者,从而最小化投票群体的妥协程度,即最优韦伯问题目标函数.然而“全局决策者”在挑选全局最优候选人的过程未考虑投票人的妥协底线,满足全局最小妥协程度的最优候选人反而有可能得不到任意投票者的支持。

本文在相关文献研究的基础上,在社会网络视角的投票框架下,引入偏好支持域的概念,提出了全局最优候选人的有效性判定条件.当面临支持度与妥协度不相协调的困局时,以不同的目的设定支持度与妥协度的优先级,并采用一种基于约束的Delaunay三角剖分算法,求出全局最优候选人搜索解,从而在“公平”的评价标准下选择出满足有效性条件的全局最优获胜者。

## 1 预备知识

投票规则本质上都是基于评分排序的方式来确定获胜者,在社会网络视角的投票问题中,将“不支持”、“稍微支持”、“比较支持”诸如此类的定性描述量化为每个投票者对候选人的偏好距离作为候选人的得分,表达投票者对候选人的喜好程度.本文主要探讨多数赞成规则与Condorcet规则在复杂网络下的评价问题。

### 1.1 多数赞成规则

在多数赞成投票规则中,投票者的选票代表一组未经排序的候选人名单,获得最多选票的候选人获胜.如果存在平局,则通过随机选择来打破平局.若投票者*i*对候选人*j*的偏好距离 $d_{ij}$ 小于 $\lambda_i$ ,则表示投票者*i*对候选人*j*持支持态度, $\lambda_i$ 表示投票者*i*的偏好阈值.设 $X^A$ 为多数赞成规则选出的获胜者集,多数赞成规则的数学形式描述为

$$v = \max_{j \in M} \sum_{i \in N} w_i \delta(d_{ij}, \lambda_i); \quad (1)$$

$$S = \left\{ j \in M \mid \sum_{i \in N} w_i \delta(d_{ij}, \lambda_i) = v \right\}; \quad (2)$$

$$X^A = \begin{cases} S, & |v| > 0; \\ 0, & \text{otherwise}; \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\delta(d_{ij}, \lambda_i)$ 为克罗内克函数.若投票者*i*对候选人*j*的偏好距离 $d_{ij}$ 小于投票者*i*的支持域半径 $\lambda_i$ ,则克罗内克函数值为1,否则为0; $|v| > 0$ 为获胜者集合中的元素个数; $w_i$ 为权重, $N$ 为投票人的集合。

### 1.2 Condorcet规则

Condorcet规则通过候选者之间的成对比较最终选出明确而惟一的获胜者.若某候选人在与其他候选人的成对比较中以过半数选票打败对方,则称该候选人为Condorcet获胜者.也就是说,Condorcet获胜者在与其余候选人比较的过程中获得最少的选票应过半数.在复杂网络框架下,将每个参与投票系统的个体映射成为复杂网络中的节点.因此本文将选票的比较改进为偏好距离的对比,在两个投票人对某个候选人偏好距离的比较中,该候选人能从偏好距离更近的投票人节点中获得较高的效用.两两对比偏好距离产生Condorcet获胜者的过程,即最小化如下目标函数:

$$v_j = \min_{k \neq j \in M} \left\{ \sum_{d_{ij} \leq d_{ik}} w_i \right\}, \quad (4)$$

此处  $M$  表示候选人集合. 当  $\forall k \in M, v_j > v_k$  且满足  $v_j \geq 0.5$  时, 候选人  $j \in M$  为 Condorcet 获胜者; 如果没有任何候选人  $j \in M$  满足  $v_j \geq 0.5$ , 则获得目标函数数值最大的候选人作为最终的获胜者, 称为 Simpson 获胜者.

## 2 复杂网络的构建

本节构造基于复杂网络的投票系统, 网络结构主要基于以下两个重要假设:

1) 投票网络中所有投票者(节点)对候选人的支持程度均独立遵循自身真实意愿, 即自身的偏好强度<sup>[11-12]</sup>.

2) 假设存在一个全局“仁慈”的决策者, 该决策者知道投票网络中每一个投票者的偏好强度与候选人的详细信息, 为了“顾全大局”而需要权衡投票者节点的妥协程度与候选人的支持程度, 以选出一个尽量让所有投票节点满意的最优候选人作为衡量不同投票规则的标准.

用  $N$  代表投票网络中一系列节点的集合, 每个投票者  $i \in N$  代表网络中的一个节点; 用  $M$  代表候选人集合, 候选人节点  $j \in M$ ;  $x_i$  代表投票者节点  $i \in N$  投票网络中所处的位置, 即观点. 本文主要讨论在二维空间中的复杂网络.  $w_i$  描述每个投票者节点的权重, 代表具有相同偏好的一组投票人的个数占总共投票者人数的比例, 其中  $w_i \in (0, 1)$  必须满足

$$\sum_1^N w_i = 1. \quad (5)$$

**定义1** 投票者节点的偏好强度. 将投票者节点  $i$  到候选者节点  $j$  在  $l_p (p \geq 1)$  准则下的距离函数  $f: R^{r+} \rightarrow R^+$  定义为投票者  $i$  对候选者  $j$  的偏好强度, 即

$$d_{ij} = \left( \sum_{k=1}^r \|x_i - x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (6)$$

投票者节点到候选人节点的偏好强度值越小, 说明该投票者对候选人的支持程度越高.

**定义2** 投票者节点的观点支持域. 以投票者  $i \in N$  为圆心,  $\lambda_i$  为半径构成投票者节点  $i$  的支持域  $S_i, S_i = \{y \| \|x_i - y\|_n \leq \lambda_i\}, y \in R^{r+}$ .

支持域有效地衡量了投票者的偏好范围. 给定投票者  $i \in N$  的偏好支持域半径  $\lambda_i$ , 当  $d_{ij} \leq \lambda_i, j \in M$  时, 投票者对候选者持赞成态度; 反之, 则持反对态度. 这样, 将传统投票系统中的支持或者反对这两种离散状态连续化, 并用复杂网络的距离来反映投票者对候选人的偏好强度.

**定义3** 候选人支持度. 若某一候选人节点落入多个投票者节点构成的交叉支持域内, 则该候选人的支持度为这些支持域所对应的投票者的权值之和. 设给定投票网络, 所有投票者节点  $i \in N$  对候选人  $j \in M$  的偏好强度为  $d_{ij}, \lambda_i$  为投票者节点  $i$  的观点支持域半径, 则候选人节点  $j \in M$  所获得的支持度为

$$s_j = \sum_{i=1}^N d(w_i), d(w_i) = \begin{cases} w_i, & d_{ij} \leq \lambda_i; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (7)$$

通过上述定义, 投票系统可以由一组具有不同偏好的带权节点构成的复杂网络表示.

## 3 全局最优候选人搜索模型

大多数民主投票问题中, 全局最优候选人的选择面临妥协程度与支持程度不相协调的难题. 全局决策者在面临投票群体意见分歧较大的情况时, 需要权衡最优候选人的支持程度与妥协程度, 然后运用他的判断能力分析两者之间的重要性, 优先考虑他认为最优候选人需要满足的指标. 在该指标达到前, 其他指标可以暂缓甚至放弃. 本节提出最优候选人在支持度和妥协度指标不可协调下的全局最优候选人搜索问题.

### 3.1 改进韦伯问题

传统韦伯问题<sup>[13-14]</sup>所挑选的获胜者是寻找投票网络内的全局最优候选人, 即搜索所有带权投票者节点的偏好距离和最小的节点. 目标是全局最小化投票者的妥协程度, 其目标函数如下:

$$\min f(y) = \sum_{i=1}^N w_i \|x_i - y\|. \quad (8)$$

令  $X^W$  为目标函数(8)的最优解, 则最优解可表示为

$$X^W = \operatorname{argmin}_{y \in R^{r+}} f(y). \quad (9)$$

**定理1**<sup>[13-14]</sup> 如果给定节点  $x_i (i \in N)$  是非共线的, 则  $f$  是严格的凸函数.

**定理2**<sup>[13-14]</sup> 如果全局最优候选人为投票网络中真实存在的节点, 即  $x_k, k \in N$ , 当且仅当  $w_k \geq R_k$  时, 有

$$R_k = \sum_{i=1, i \neq k}^N w_i \frac{x_i - x_k}{\|x_i - x_k\|}. \quad (10)$$

定理1保证了全局最优候选人的存在性. 由于复杂网络的复杂性和非线性特征, 可利用 Weiszfeld 算法<sup>[14]</sup>得到目标函数的最优解. 每个人的偏好强度及其对理想候选人的标准不同, 所生成的投票网络节点必定是非共线的, 因此该定理保证了整个网络系统必

定能够找到惟一的理想候选人。

定理2则说明在一定条件下,当投票网络中的所有节点为投票者节点的同时也是竞争者,也可以成为获胜者。然而,在具有观点支持域的复杂网络投票系统中,定理1虽然保证了韦伯问题最优解的存在性,该最优解最小化了全局投票群的妥协程度,但由于投票群的偏好分布过于分散,使得全局最优候选人节点落在了所有候选人的支持域之外,即该全局最优候选人得不到任何一位投票者节点的支持。

**定义4** 全局最优候选人的有效性。假设所有投票人基于自身真实意愿(偏好)投票,全局最优候选人选票应过半。设存在全局最优候选人 $j$ ,该全局候选人的有效性判定条件为

$$\sum_{i=1}^N w_i v_i \geq 0.5, v_i = \begin{cases} 1, & d_{ij} \leq \lambda_i; \\ 0, & d_{ij} > \lambda_i. \end{cases} \quad (11)$$

韦伯问题在具有偏好支持域的投票系统中存在着局限性<sup>[15]</sup>,评价函数首先应具有有效性。在传统的投票系统中,不同的投票规则都要求所选择的候选人所获得的支持度过半数,在此基础上,从满足过半数条件的候选人中决胜出获胜者,故应将支持度过半数也作为评价标准是否有效的衡量方式。

**定理3**<sup>[16]</sup> 设 $X$ 为任意目标优先级下的全局最优候选人集合,若 $X \notin \{\emptyset\}$ ,则 $S = \{X | X \in CH\}$ ,其中 $CH$ 为 $X^A$ 的支持节点支持域所构成的交叉区域, $CH = \{y \in R^{r+} | \|y - x_i\| \leq \lambda_i, i = 1, 2, \dots, k\}$ , $k$ 为支持节点的数量。

为了避免传统韦伯问题的缺陷,应对评价函数的最优化目标作有效性约束,即最优理想获胜者应满足过半数条件。其次,由于在传统投票网络中加入了支持域的概念,使之更加贴近现实决策场景。满足有效性条件的候选人为了最小化整个投票群的妥协程度,其数学描述为:

设 $X^{OPT}$ 为全局候选人节点,则该节点需要使下述目标函数最小,其中 $v_i \in \{0, 1\}$ :

$$\begin{aligned} \min_{y \in R^2} & \sum_{i=1}^N w_i [\|x_i - y\| v_i + (\|x_i - y\| - \lambda_i)(1 - v_i)]. \\ \text{s.t.} & \|x_i - y\| v_i \leq \lambda_i, i = 1, 2, \dots, N; \\ & 0.5 \leq \sum_{i=1}^N w_i v_i \leq 1. \end{aligned} \quad (12)$$

带有约束的韦伯问题(12)被证明是非线性凸优化问题,本文利用Drezner等<sup>[17-19]</sup>提出的全局优化技术Big triangle small triangle(BTST)算法实现对该问

题的求解,求解步骤如下。

**Step 1:** 由定理3可知,最优化节点必定存在于多个支持域相交的凸包内及边界上。由边界顶点构建Delaunay三角剖分网络,经过剖分算法得到的三角形区域包含了支持域所形成的凸包区域,因而作为搜寻的初始区域。

**Step 2:** 计算每个三角形顶点的目标函数值。若三角形中节点的最大支持度小于0.5,则将该三角形删除,同时在剩余的每个小三角形中,将最小目标函数值下界记为LB,上界记为UB,将所有下界值中的最大目标函数值记为 $\overline{LB}$ ,所有满足 $UB \leq \overline{LB}$ 的三角形被删除。

**Step 3:** 在剩余的三角形当中,连接每个小三角形边的中点,形成4个小三角形。重复计算Step2,直到没有三角形存留。最终 $\overline{LB}$ 所在节点记为全局最佳候选人,其目标函数值最小。

根据上述算法,可计算出满足超半数支持,同时加权距离和最小的最优候选人。图1展示了具有3个投票人的偏好网络,其中上三角与下三角分别代表本文所提出改进韦伯问题最优解与传统韦伯问题的最优解。

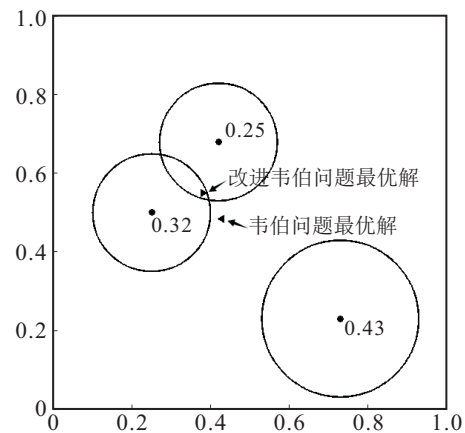


图1 改进韦伯问题

### 3.2 全局多数赞成获胜者

改进的韦伯问题是在保证最优获胜者有效性的前提下,“全局决策者”先最大化获胜者的支持度,其次最小化全局妥协程度。显然,若全局最优多数赞成获胜者不具备有效性,则改进韦伯问题不存在最优解。

假设存在一个全局的最优多数赞成的候选人 $X^A$ (有可能是真实存在的候选人节点,也可能是整个平面内虚拟的一点),该节点一定是在整个投票网络中获得最高支持度的节点。下面给出全局最优多数赞成候选人的数学描述:

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{i=1}^N w_i v_i; \\
& \min_{y \in R^2} \sum_{i=1}^N w_i [\|x_i - y\| v_i + (\|x_i - y\| - \lambda_i)(1 - v_i)]. \\
& \text{s.t. } \|x_i - y\| v_i \leq \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, N; \\
& 0.5 \leq \sum_{i=1}^N w_i v_i \leq 1.
\end{aligned} \quad (13)$$

其中  $S_i$  为以投票者节点为圆心构成的支持域, 即  $S_i = \{y \mid \|x_i - y\| \leq \lambda_i\}$ . 求解全局最优多数赞成获胜者的求解思路与改进韦伯问题思路相似.

## 4 评价函数的构建

### 4.1 评价函数与RE指标

评价函数的制定需要考虑两个方面: 1) 候选人依据投票规则胜出时, 考虑投票群体的妥协程度; 2) 考虑候选人在整个网络中的支持度. 上述两个方面都与候选人(无论是真实存在还是虚拟)在网络中的位置有关, 候选人节点落在投票者支持域的交集区域, 体现了候选人的支持度, 同时该候选人与非支持域边界的距离则反映了不支持该候选人所需要做出的妥协程度. 构建评价函数如下:

$$Z(y) = \sum_{i=1}^N w_i [\|x_i - y\| - \lambda_i(1 - v_i)], \quad (14)$$

其中  $v_i = \delta(d_{ij}, \lambda_i)$ . 评价函数(14)表明: 候选人节点到不支持该候选人的那些投票者支持域边界的距离越远, 投票者节点的权值越高, 即对该候选人的不满意程度越高. 设  $X$  为投票规则所选出的胜出者,  $Y$  为全局最优候选人, 该投票规则的优劣可由下式衡量:

$$\text{RE} = \frac{Z(X)}{Z(Y)}. \quad (15)$$

RE 指标为投票规则产生的候选人与由某种目标优先级条件下产生的全局最优候选人的评价函数值的比率, 体现了投票规则所选择的获胜者与全局理想获胜者的接近程度. 若 RE 越接近 1, 则说明由该投票规则选择的候选人在整个网络中的满意程度越高, 越接近全局理想获胜者.

**定理 4** 设  $X^W$ 、 $X^{\text{OPT}}$  分别是韦伯问题与改进后韦伯问题的最优解. 当  $X^W$ 、 $X^{\text{OPT}}$  均满足全局最优的有效性判定条件时, 若以妥协度  $Z$  函数作为两种全局最优候选人的评价函数, 则有  $Z(X^W) > Z(X^{\text{OPT}})$ . 设 CH 为满足有效性判定条件的多个支持域相交的凸包内及边界, 则当  $X^W, X^{\text{OPT}} \in \text{CH}$  时, 有  $Z(X^W) = Z(X^{\text{OPT}})$ .

**证明**  $X^W$ 、 $X^{\text{OPT}}$  分别是韦伯问题与改进后韦伯问题的最优解, 则  $X^W$ 、 $X^{\text{OPT}}$  均满足全局最优候选人的判定条件. 由定理 3 可知  $X^W, X^{\text{OPT}} \in \text{CH}$ , 其中 CH 为多个支持域相交的凸包内及边界. 设向量  $v_w = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ,  $v_i \in \{0, 1\}$ , 用于表示是否落于  $v_i$  偏好支持域内, 将改进韦伯问题的目标函数改写为如下形式:

$$\min_{y \in R^2} \sum_{i \in \text{CH}} w_i \|x_i - y\| - \sum_{i \in \text{CH}} w_i \lambda_i (1 - v_i). \quad (16)$$

可以看出, 在加入投票者偏好支持域框架下的韦伯问题不仅需要优化全局最优候选人到每位投票者节点的偏好距离, 同时通过优化  $v_w$  决定全局最优节点是否落入每位投票者节点的偏好支持域, 使得全局最优候选人的评价函数值达到最优. 韦伯问题在不考虑偏好支持域条件下(即优化上述目标函数的第 1 部分, 但两部分的分别最优不一定使得目标函数(16)达到全局最优), 假设存在一条从  $X^W$  到  $X^{\text{OPT}}$  的最优解路径, 可通过优化向量  $v_w$  实现, 该向量指示最优解是否存在于投票群的支持域内. 假设  $X^{\text{OPT}'}$  为改进韦伯问题的次优解, 故  $\exists v'_w \subset v_w$  将其取值改变为  $v'_i = 1 - v_i (v_i \in v'_w)$  使得  $Z(X^W) > Z(X^{\text{OPT}'}) > Z(X^{\text{OPT}})$ , 故得证.  $\square$

### 4.2 妥协度与支持度的权衡

在意见分歧较大的投票网络中, 全局决策者在对全局最优候选人进行挑选时, 需要对投票者节点的妥协度与候选者节点的支持度之间作出权衡. 本节引用多目标决策方法中置换度的概念, 便于使决策人在支持度与妥协度间进行比较. 设全局多数赞成最优候选人为  $x^0$ , 改进韦伯问题最优候选人为  $x^1$ . 这两个最优候选人相应的目标函数分别为

$$\begin{aligned}
f(x^0) &= (1 - f_1(x^0), f_2(x^0)), \\
f(x^1) &= (1 - f_1(x^1), f_2(x^1)).
\end{aligned} \quad (17)$$

其中:  $f_1$  代表投票者节点的总妥协度即  $Z$  函数值,  $f_2$  为最优候选节点的支持度. 将  $f_1$  与  $f_2$  的置换率记作  $T(x^0, x^1)$ , 且令

$$\begin{aligned}
T(x^0, x^1) &= \\
& \frac{(1 - f_1(x^0)) - (1 - f_1(x^1))}{f_2(x^0) - f_2(x^1)} = \\
& \frac{f_1(x^1) - f_1(x^0)}{f_2(x^0) - f_2(x^1)}.
\end{aligned} \quad (18)$$

直观上看, 置换率指标表示当一个指标优化的同时是否能够带动另一个指标的提升或优化, 并间接地衡量投票群体观点(偏好)的离散程度. 置换率指标  $T$

的取值有3种情况:

1) 当投票网络偏好分布较为分散,投票者意见分歧较大时,全局候选人的挑选面临支持度与妥协度为不可相互协调的困局时,  $T < 0$ , 即最优解的搜索过程中想要减少一个单位妥协度时必定要在支持度上作出牺牲;

2) 若投票网络中投票者的意见偏好比较集中,则  $T > 0$ , 即支持度与妥协度是两个相互协调的指标,随着增加一个单位的支持度即可减小一定程度的妥协度,这意味着在全局多数赞成模型的最优解与改进韦伯问题的最优解之间存在更优的可协商解;

3) 当  $T = 0$  或  $T = \infty$  时,改进韦伯问题的解与全局多数赞成的解同时落入支持度相同的投票者偏好支持域的相交区域内,为了最小化妥协程度,改进韦伯问题的最优解与全局多数赞成的最优解必收敛为同一点,此时整个投票网络存在唯一的全局最优获胜者.

## 5 数值实验

本节利用 Matlab 实现对投票网络的仿真模拟,主要验证以下3个问题:

1) 通过仿真验证改进的韦伯问题与全局多数赞成模型下的全局最优候选人作为投票规则选择的评价标准相比其他全局最优候选人搜索模型(全局期望候选人、传统韦伯问题)具有良好的普适性,即在大部分偏好网络结构下通过有效性检验.

2) 通过比较不同全局最优候选人的评价指标,即支持度与妥协度  $Z$  函数,衡量不同全局候选人搜索模型的优劣.

3) 通过计算 Condorcet 规则与多数赞成规则在不同全局评价规则下的最小、最大与平均 RE 偏差度,同时计算不同全局候选人之间的“支持度-妥协度”置信度,说明决策者在面临投票是如何通过 RE 偏差度与置信度来选择合适的标准与相应的投票规则.

为了便于问题的说明,定义如下变量:  $X^M$  为全局期望候选人;  $X^W$  为韦伯问题最优解;  $X^{\bar{W}}$  为改进韦伯问题最优解;  $X^{\bar{A}}$  为全局多数赞成候选人;  $X^C$  为 Condorcet 获胜者;  $X^A$  为多数赞成获胜者.

本次模拟实验构造的复杂网络参数为:投票者节点个数  $N = 20$ , 候选者节点个数  $M = 3$ , 投票者节点与候选者节点在投票网络中的位置、支持域半径按照  $[0, 1]$  区间内均匀分布产生,投票者节点权重按照权值和为1的约束下随机生成.

### 5.1 全局最优候选人有效性检验

根据定义4,全局最优候选人需要满足有效性条件才能作为衡量不同投票规则质量好坏的标准,通过模拟,统计全局期望、全局多数赞成、韦伯问题与改进韦伯问题4种全局候选人搜索模型的有效解的比例,统计结果如图2所示.

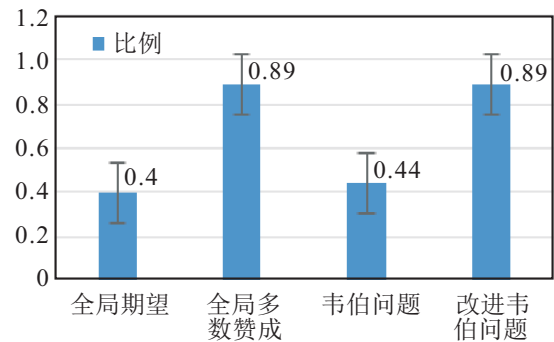


图2 有效性检验

图2展示了在不同的投票偏好网络下的有效性检验结果.传统的韦伯问题与全局期望所得最优候选人有效性占比分别为0.44和0.4,说明在大多偏好网络下,两者不满足有效性判定条件.而改进韦伯问题与全局多数赞成候选人在大多偏好网络下具有良好的普适性.结果说明在大多数情况下,全局理想候选人在不同的目标优先级下均存在,可以将支持度过半数作为全局最优候选人的有效性检验条件.同时,改进的韦伯问题与全局多数赞成规则下的最优获胜者拥有相同的有效性检验比例,验证了当改进韦伯问题存在最优解即存在获胜者时,全局多数赞成也必然存在最优解.

### 5.2 全局候选人的妥协度与支持度

在面临支持度与妥协度不可协调的困局时,全局决策者在挑选全局最优候选人时,依据设置目的优先级的方式解决支持度与妥协度的权衡问题.本节针对全局多数赞成与改进韦伯问题的搜索模型,设置支持度与妥协度以不同的目的优先级,引入置换度的概念,阐述在不同投票网络偏好分布参数下如何选择合适的全局最优候选人作为评价投票规则的标准.

模拟计算全局多数赞成候选人与改进韦伯问题候选人的支持度与妥协度.若改进韦伯问题与全局多数赞成最优解存在,则相应的支持度分别为  $S^{\text{OPT}}$ 、 $S^{\bar{A}}$ , 相应的妥协度  $Z$  函数为  $Z(S^{\text{OPT}})$ 、 $Z(S^{\bar{A}})$ , 这两个指标存在如下关系:

$$S^{\text{OPT}} \leq S^{\bar{A}}, Z(X^{\text{OPT}}) \leq Z(X^{\bar{A}}). \quad (19)$$

表1计算了全局多数赞成、改进韦伯问题、全局

期望和韦伯问题的最优候选人的平均支持度与妥协度的平均值与方差. 由表1可以看出, 本文所提出的全局多数与改进韦伯问题的最优候选人的平均支持度均满足有效性检验条件, 而传统的韦伯问题与全局期望候选人的平均支持度在大多偏好网络结构下不过半数, 将之作为评价标准会对投票规则产生较大误差. 其次从支持度的方差可以看出, 本文所提出最优候选人相比当前已有的研究方法得到的候选人具有更小的支持度方差, 说明在大多偏好网络结构下结果更稳定. 从妥协度的角度来看, 虽然后两种全局候选人模型获得了比本文较小的平均妥协度, 但这是以牺牲支持度为代价, 而妥协度方差在4种方法上表现无明显差距, 故从整体来看, 本文所提出的两种全局最优候选人标准, 即全局多数与改进韦伯问题最优候选人作为评价标准更为客观准确.

表1 支持度与妥协度的平均值与方差

全局候选人	平均支持度	支持度方差	平均妥协度	妥协度方差
全局多数赞成	0.632 841	0.084 389 8	0.257 255	0.027 178
改进韦伯问题	0.520 78	0.020 323 5	0.204 182	0.037 374
全局期望	0.487 816	0.137 3	0.192 147	0.030 718
韦伯问题	0.498 865	0.122 011	0.190 746	0.033 65

### 5.3 评价标准与投票规则的选择

满足有效性条件的全局最优候选人可以作为评价多数赞成规则与Condorcet规则质量好坏的标准, 但是在具有偏好强度的复杂网络框架下, 给定评价投票规则好坏的统一评价指标Z函数, 利用投票规则所选获胜者与全局最优候选人在同一评价指标下的相对效用(比率)即RE偏差度可以衡量投票质量的好坏.

投票规则所选获胜者与理想获胜者之间的RE偏差度越接近于1, 表明投票规则越具有优越性, 其接近程度利用偏差度与1的差值的绝对值表示, 即

$$\Delta C = |\text{RE}(X) - 1|. \quad (20)$$

本文分别对以下两种情况作数值分析加以讨论(相关数据见表2):

- 1) Condorcet规则与多数赞成规则为同一候选人, 即下文中案例1的数值结果.
- 2) Condorcet规则与多数赞成规则为不同的候选人, 即下文中案例2的数值结果.

表2 全局最优候选人指标

案例编号	全局最优候选人	决策变量		目标函数	
		$x_1$	$x_2$	Z值	支持度
案例1	全局期望	0.648 4	0.561 8	0.186 0	0.384 4
	韦伯问题	0.657 9	0.628 5	0.202 3	0.470 8
	改进韦伯问题	0.637 4	0.617 8	0.237 8	0.516 7
	全局多数赞成	0.733 4	0.579 3	0.239 1	0.547 1
案例2	全局期望	0.485 9	0.415 8	0.172 8	0.336 4
	韦伯问题	0.458 4	4.404 3	0.202 3	0.405 2
	改进韦伯问题	0.209 9	0.394 8	0.280 5	0.514 9
	全局多数赞成	0.197 8	0.422 5	0.284 1	0.514 9

从比较计算结果可以看出, 案例1与案例2中虽然全局期望与韦伯问题两种全局候选人具有更小的妥协度, 但只有改进韦伯与全局多数赞成候选人满足有效性条件, 才可以作为投票规则的评价标准. 各全局候选人在网络中表示如图3所示.

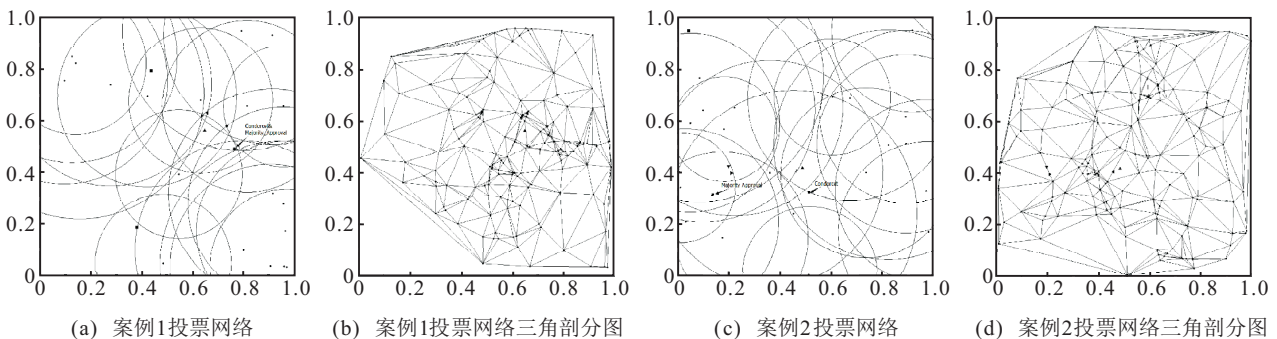


图3 有效性检验

由于有效性判定条件的全局候选人不止一位, 故需进一步考虑如何选择最优的全局候选人. 首先需要计算改进韦伯问题最优解与全局多数赞成最优解之间的置换度. 根据置换度的定义, 改进韦伯问题最

优解与全局多数赞成最优解之间的置换度分别以妥协度与支持度为优化的最高优先级, 其置换度一方面衡量了投票群偏好分布的集中程度, 另一方面其数值的高低给全局最优候选人的选取提供了可靠的参考

依据. 案例1与案例2的置换度计算结果如表3所示.

表3 置换度

置换度	案例1	案例2
$T(x^0, x^1)$	-0.0428	$\infty$

案例1中置换度结果小于0,说明当前偏好网络的意见分歧较大,支持度与妥协度为两个不可协调的指标,故全局候选人只能优先考虑当前最为重要的属性作为决策当前投票网络中的全局最优候选人,即全局最优候选人只能在改进韦伯问题最优解与全局多数赞成最优解之间挑选. 而案例2中置换度等于 $\infty$ ,说明此时改进韦伯问题与全局多数赞成的最优解收敛为同一点. 由表2可看出,两者存在于相同的支持域内,妥协度仅有较小的差距. 该误差由模型造成,可忽略不计. 此时案例2中,可从改进韦伯问题或全局多数赞成的最优解中任选其一即可作为投票规则的评价准则. 更进一步,需要计算每种投票规则下的获胜者相对于全局最优候选人的RE偏差度. 结果表明,案例1中Condorcet规则与多数赞成两种投票规则选择了相同的候选人作为获胜者,如图3(a)箭头所指即为最终获胜者,故在该投票网络中不存在投票规则的选择问题. 另外观察该获胜者相对于全局多数赞成的最优解的偏差程度相较于其他全局候选人能获得最小的RE偏差度( $RE = 0.9173$ ),故在该次投票中选择全局多数赞成模型的最优解作为最终全局最优候选人. 案例2中,两种投票规则选择了不同的候选人作为获胜者(如图3(c)中两个不同的箭头标识出不同投票规则所选出获胜者),故需要考虑两者在改进韦伯问题或是全局多数赞成的最优解下的偏差度( $RE(X^A, X^{\bar{W}}/X^{\bar{A}}) = 0.4857, RE(X^C, X^{\bar{W}}/X^{\bar{A}}) = 1.1345$ ). 结果显示,多数赞成规则所选获胜者更接近全局最优获胜者,故在案例2中的投票偏好分布下,使用多数赞成规则能够考虑大部分投票者的偏好,是决策者考虑采用的最佳投票规则.

根据上述两个案例可以将评选标准(全局期望、韦伯问题、改进韦伯问题、全局多数赞成的最优解)与投票规则(Condorcet规则与多数赞成)的评选流程总结如下:

1) 依据全局多数赞成候选人搜索算法计算全局多数赞成候选人支持度. 若该候选人不满足有效性判定条件,则该投票网络不存在一个使投票群满意的最佳候选人;若全局多数赞成候选人存在,则计算改进韦伯问题的最优解的支持度与妥协度,并计算两者

之间的置换度. 若置换度小于0,则说明评价标准在全局多数候选人与改进韦伯候选人中产生. 若置换度大于0,则考虑计算韦伯问题与全局期望候选人,并计算两者支持度,查看是否满足过半数条件,若满足条件则加入全局候选人集合,并根据下一步确认最终的评选标准. 若置换度等于0或者等于 $\infty$ ,则全局最优候选人在改进韦伯问题与全局多数赞成候选人中选择其一即可.

2) 查看不同的投票规则(Condorcet与多数赞成规则)是否选择了同一候选人作为最终的获胜者,同时计算上述两种投票规则在全局候选人集中的每个全局候选人下的RE偏差度. 若选择同一候选人作为获胜者,则投票规则任选其一即可,评价规则选择全局候选人集合中RE偏差度最小的全局候选人作为评价标准. 若选择了不同的候选人作为最终的获胜者,同时全局候选人不止一位时,则群决策组织者需要考虑当前投票规则评选最重要的因素,即需要考虑支持度与妥协度的优先级顺序,以此从全局候选人中挑选出一位全局最优候选人后,与该全局最优候选人具有最小RE偏差度的投票规则作为最终的该次群决策的主要投票规则.

注1 图3(a)和图3(c)展示了本次数值实验按照上述网络参数生成的随机投票网络,圆形实心节点代表投票节点、黑色圆圈是每个投票者的偏好支持域. 各真实候选人用黑色正方形表示,而全局候选人用以下不同的符号加以区分: $X^{\bar{W}}$ 为右三角、 $X^W$ 为左三角、 $X^M$ 为上三角、 $X^{\bar{A}}$ 为下三角. 同样的全局候选人在三角剖分网络中位置也以上述符号区分. 图3(b)和图3(d)展示了在该偏好网络参数下的Delaunay三角剖分网络,网络中的每个三角形区域代表了不同投票者节点支持域所构成的交集区域.

## 6 结论

本文构建了基于复杂网络的投票系统,提出全局最优获胜者的判定条件,在此基础上假设存在一个“全局”的决策者,该全局决策者综合投票网络偏好信息,权衡候选人的支持程度、妥协程度,提出一种基于约束的Delaunay三角剖分的全局最优获胜者搜索算法,从而“公平”地选择唯一的全局最优获胜者,作为评价投票规则的评价标准. 实验结果表明,当意见分歧较大时,本文所提出全局最优候选人作为投票规则的评价标准,能够更准确的衡量Condorcet规则与多数赞成规则所选获胜者偏离投票群真实意愿的程度. 由于投票者之间存在信任传递现象,投票者的观

点(偏好)也在发生变化,如何构建动态复杂网络下的投票系统对研究当前越来越复杂的民主投票进程具有重要意义.

#### 参考文献(References)

- [1] Sinopoli F D. Sophisticated voting and equilibrium refinements under plurality rule[J]. *Social Choice & Welfare*, 2000, 17(4): 655-672.
- [2] Brams S J, Fishburn P C. Chapter 4 voting procedures[J]. *Handbook of Social Choice and Welfare*, 2002, 8(2): 173-236.
- [3] Arrow K J. *Social choice and individual values*[M]. Yale University Press, 2012.
- [4] Blake D J, Payton A L. Balancing design objectives: Analyzing new data on voting rules in intergovernmental organizations[J]. *Review of International Organizations*, 2015, 10(3): 377-402.
- [5] Noltemeier H, Spoerhase J, Wirth H C. Multiple voting location and single voting location on trees[J]. *European J of Operational Research*, 2007, 181(2): 654-667.
- [6] Gouret F, Hollard G, Rossignol S. An empirical analysis of valence in electoral competition[J]. *Social Choice & Welfare*, 2011, 37(2): 309-340.
- [7] Bhadury J, Griffin P M, Griffin S O, et al. Finding the majority-rule equilibrium under lexicographic comparison of candidates[J]. *Social Choice & Welfare*, 1998, 15(4): 489-508.
- [8] Menezes M B C, Huang R. Comparison of condorcet and Weber solutions on a plane: Social choice versus centralization[J]. *Computers & Operations Research*, 2015, 62: 350-355.
- [9] Sayeed F. Sovereign default of iceland: Voting outcomes of the referenda 2010 and 2011 conducted for the approval of the icesave bill[J/OL]. (2015-02-27)[2017-06-12]. <https://ssrn.com/abstract=2571216>.
- [10] Dressler S. A long-run, short-run, and politico-economic analysis of the welfare costs of inflation[J]. *J of Macroeconomics*, 2016, 47(B): 255-269.
- [11] Weber E. Measuring welfare from ambulatory surgery centers: A spatial analysis of demand for healthcare facilities[J]. *J of Industrial Economics*, 2014, 62(4): 591-631.
- [12] Buckley N, Cuff K, Hurley J, et al. Support for public provision of a private good with top-up and opt-out: A controlled laboratory experiment[J]. *J of Economic Behavior & Organization*, 2015, 111: 177-196.
- [13] Drezner Z, Menezes M B C. The wisdom of voters: evaluating the Weber objective in the plane at the Condorcet solution[J]. *Annals of Operations Research*, 2016, 246(1/2): 205-226.
- [14] Weiszfeld E, Plastria F. On the point for which the sum of the distances to  $n$ , given points is minimum[J]. *Annals of Operations Research*, 2009, 167(1): 7-41.
- [15] Stiffler S A. Application of the maximal covering location problem to habitat reserve site selection[J]. *Int Regional Science Review*, 2016, 39(1): 18-32.
- [16] Wendel R E, Thorson S J. Some generalizations of social decisions under majority rules[J]. *Econometrica*, 1974, 42(5): 893-912.
- [17] Drezner Z, Klamroth K, Schöbel A, et al. *The Weber problem*[C]. Facility location. Berlin: Springer, 2002: 1-36.
- [18] Davis P S, Ray T L. A branch-bound algorithm for the capacitated facilities location problem[J]. *Naval Research Logistics*, 2015, 16(3): 331-344.
- [19] Hotelling H. Stability in competition[J]. *Economic J*, 1929, 39(153): 41-57.

(责任编辑: 孙艺红)