

# 一种基于参考点约束支配的NSGA-III算法

毕晓君, 王 朝<sup>†</sup>

(哈尔滨工程大学 信息与通信工程学院, 哈尔滨 150001)

**摘 要:** 针对带约束的高维多目标优化问题, 设计一种基于参考点的约束支配关系(RPCDP), 将可行解与不可行解作为一个整体看待, 进而综合考虑它们的收敛性、多样性和可行性, 并基于此提出用于解决约束高维多目标优化问题的NSGA-III算法. 将所提出算法与著名的3种约束高维多目标进化算法进行对比, 实验结果表明在标准测试函数集CDTLZ上, 相对于其他算法, 所提出算法的解集具有更好的收敛性和分布性.

**关键词:** 约束高维多目标优化; 参考点; 约束处理; 收敛性; 多样性; 可行性; NSGA-III

**中图分类号:** TP18      **文献标志码:** A

## A reference point constrained dominance-based NSGA-III algorithm

BI Xiao-jun, WANG Chao<sup>†</sup>

(College of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

**Abstract:** For constrained many-objective optimization problems, a reference point-based constrained dominance principle(RPCDP) is designed, regarding the feasible solutions and infeasible solutions as a whole and considering the convergence, the diversity and the feasibility simultaneously. Then on this basis, an improved NSGA-III algorithm is proposed. The experimental results on CDTLZ test suite show that compared with three state-of-the-art constrained many-objective evolutionary algorithms, the proposed algorithm has better performance on convergence and distribution.

**Keywords:** constrained many-objective optimization; reference point; constraint handling; convergence; diversity; feasibility; NSGA-III

## 0 引 言

高维多目标优化问题(MaOPs)是指目标维数大于3的多目标优化问题,是科学研究和工程应用领域普遍存在的一类问题,因其目标数众多,解之间的优劣关系难以评价,成为目前进化算法领域公认的研究难点和热点<sup>[1-3]</sup>. MaOPs包含无约束条件和有约束条件两类.目前,高维多目标进化算法已广泛应用于求解无约束条件的MaOPs.然而,实际工程应用中更多的是有约束条件的MaOPs,比如航空管制问题<sup>[4]</sup>、水资源管理问题<sup>[5]</sup>等.约束MaOPs的难点在于高维特征:一是目标维数多带来的算法收敛性不足;二是高维空间中的约束条件使得可行域的拓扑形状更为复杂,给算法多样性维护带来更大挑战.

目前针对此问题的研究还处于起步阶段,相关文献都是利用参考点(RP)引导个体进化,具有较

好的收敛效果.文献[5]基于MOEA/D算法提出C-MOEA/D,通过引入Deb约束比较准则分别对其更新过程和锦标赛选择过程进行改进,在更新过程中首先比较约束违反度,然后再聚合函数进行比较;在锦标赛选择过程中,也是首先注重可行解或是约束违反度小的解.同时,文献[5]基于NSGA-III框架<sup>[6]</sup>提出C-NSGA-III,首先通过在环境选择阶段引入Deb约束比较准则对种群进行非支配排序;然后通过锦标赛机制优先选择可行解.这两种算法都只是在高维多目标进化算法的基础上简单加入Deb约束比较准则,并没有将高维特征与约束处理技术相结合.文献[7]通过在MOEA/DD算法中引入约束处理机制提出C-MOEA/DD,不再一味强调可行解优于不可行解,而是综合考虑不可行解的约束违反度和小生境数,保留位于稀疏区域的不可行解,但匹配选择阶段还是过分注

收稿日期: 2017-08-11; 修回日期: 2017-11-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61175126); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(HEUCFP201709).

责任编委: 魏秀琨.

作者简介: 毕晓君(1964—),女,教授,博士,从事信息智能处理技术、智能优化算法等研究; 王朝(1989—),男,博士生,从事信息智能处理技术、高维多目标优化的研究.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: wangzhao@hrbeu.edu.cn.

重可行解优于不可行解,没有充分利用稀疏区域的不可行解.文献[8]提出C-RVEA,利用在目标空间中均匀分布的参考点对种群进行聚类,在每一类里选择一个解:如果全是不可行解,则选择约束违反度小的;如果全是可行解,则选择角度聚合函数值小的;如果既有可行解又有不可行解,则优先选择聚合函数值小的可行解.尽管每一类里还是可行解优于不可行解,但是聚类操作却在一定程度上保留了位于稀疏区域的不可行解.但匹配选择阶段对可行解和不可行解的重要性同等看待,具有很大的盲目性,不利于种群进化.这两种算法虽然考虑了高维特征,保留了位于稀疏区域的不可行解,但两者的结合仅限于环境选择阶段,对匹配选择阶段选择怎样的个体产生后代没有充分考虑.

为了将高维特征与约束处理技术有效结合,本文提出一种基于参考点约束支配(RPCDP)的NSGA-III算法,简称NSGA-III-RPCDP.首先,设计一种基于参考点的约束支配关系RPCDP,不再将可行解与不可行解割裂看待,而是综合考虑他们的收敛性,多样性和可行性;然后,基于此约束支配关系对种群进行非支配排序,并采用个体到参考点的垂直距离进行多样性评估;最后,在匹配选择阶段,设计基于RVCDP划分的等级和个体垂直距离的锦标赛选择机制.

## 1 相关背景知识

### 1.1 约束高维多目标优化问题的数学描述

不失一般性,以最小化为例,一个具有 $n$ 个决策变量, $M$ 个目标函数以及 $J+K$ 个约束条件的约束优化问题的数学描述为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in R^n} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_M(\mathbf{x}))^T. \\ \text{s.t. } g_j(\mathbf{x}) &\geq 0, j = 1, 2, \dots, J; \\ h_k(\mathbf{x}) &= 0, k = 1, 2, \dots, K. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ 为决策向量, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_M(\mathbf{x}))^T \in R^M$ 为目标向量, $R^n$ 为 $n$ 维决策空间, $R^M$ 为 $M$ 维目标空间, $g_j(\mathbf{x})$ 为第 $j$ 个不等式约束条件, $J$ 为不等式约束条件的个数, $h_k(\mathbf{x})$ 为第 $k$ 个等式约束条件, $K$ 为等式约束条件的个数.如果解 $\mathbf{x}$ 满足式(1)中的所有约束条件,则称 $\mathbf{x}$ 为可行解;如果 $\mathbf{x}$ 不完全满足式(1)中的约束条件,则称 $\mathbf{x}$ 为不可行解.当 $M > 3$ 时,称式(1)为约束MaOPs.将约束条件转化为约束违反度函数

$$CV(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^J \langle g_j(\mathbf{x}) \rangle + \sum_{k=1}^K |h_k(\mathbf{x})|, \quad (2)$$

其大小称为约束违反度.其中当 $\alpha < 0$ 时, $\langle \alpha \rangle$ 返回 $\alpha$ 的绝对值;当 $\alpha \geq 0$ 时, $\langle \alpha \rangle$ 返回0.可行解的约束违反度 $CV = 0$ .

### 1.2 NSGA-III算法

NSGA-III的基本框架与NSGA-II类似,不同之处在于多样性维护策略,NSGA-III采用了一组均匀分布的参考点来维护种群多样性,参考点规模为 $H$ .假定第 $t$ 代大小为 $N(N \approx H)$ 的父代种群 $P_t$ ,子代种群为 $Q_t$ ,则合并种群为 $U_t = P_t \cup Q_t$ ,大小为 $2N$ .为了从 $U_t$ 里选择 $N$ 个个体进入下一代,首先采用Pareto非支配排序将 $U_t$ 划分为不同的等级层,如 $F_1, F_2$ 等等;然后依次将每一层的个体加入到一个新的种群 $S_t$ ,直至 $S_t$ 大于或等于 $N$ .假设最后加入的等级层是 $l$ 层,称作临界层, $S_t/F_l$ 中的个体直接存活到下一代种群 $P_{t+1}$ ,剩余个体还需依据多样性维护策略从 $F_l$ 中选取.NSGA-III通过基于参考点的小生境技术进行选择,具体过程如下:首先,对 $S_t$ 进行端点归一化以使不同目标的范围相同,归一化后 $S_t$ 的理想点即为原点;然后,计算 $S_t$ 中每一个个体到参考线(参考点与原点的连线)的距离,将该个体关联到具有最小垂直距离的那个参考点上,定义第 $j$ 个参考点的小生境数为 $\rho_j$ ,它表示 $S_t/F_l$ 中与第 $j$ 个参考点相关联的个体数.待所有参考点的小生境数计算完毕,选择与 $F_l$ 关联的参考点集中具有最小 $\rho_j$ 的参考点 $\bar{j}$ .如果 $\rho_{\bar{j}} = 0$ ,则选取与之垂直距离最小的个体添加到 $P_{t+1}$ ,同时 $\rho_{\bar{j}}$ 增加1;如果 $\rho_{\bar{j}} > 0$ ,则从 $F_l$ 与之相关联的个体中随机选择一个个体添加到 $P_{t+1}$ ,同时 $\rho_{\bar{j}}$ 增加1.上述小生境技术将会反复执行,直至 $P_{t+1}$ 的个体数达到 $N$ .

## 2 基于参考点约束支配的NSGA-III算法

针对约束MaOPs,目前普遍采用高维多目标进化算法简单加上约束处理技术,然而其无法将高维特征与约束处理技术进行有效结合.针对此问题提出

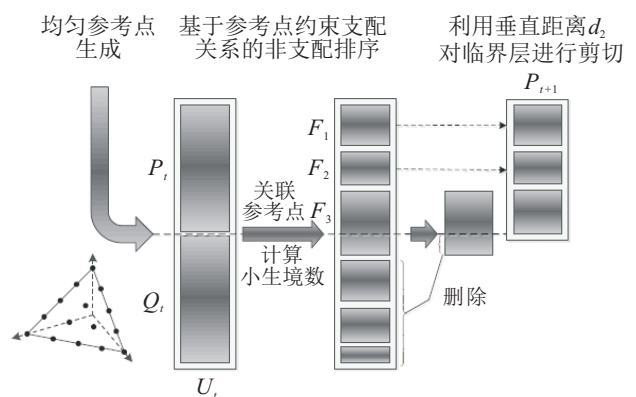


图1 NSGA-III-RPCDP的基本框架

NSGA-III-RPCDP算法,首先设计一种基于参考点的约束支配关系;然后基于此关系改进NSGA-III算法环境选择过程和匹配选择过程.NSGA-III-RPCDP算法的基本框架如图1所示.

### 2.1 关联参考点和计算小生境数

关联参考点和计算小生境数的方法与原始NSGA-III算法相同,其作用是设计参考点约束支配关系,取代NSGA-III中Pareto支配关系对 $U_t$ 进行非支配排序.关联参考点首先需要计算个体到参考线的垂直距离,个体 $x$ 到第 $j$ 条参考线 $L$ 的投影距离和垂直距离计算公式为

$$d_{j,1}(\mathbf{x}) = \frac{\|(\mathbf{F}(\mathbf{x}))^T \mathbf{z}^j\|}{\|\mathbf{z}^j\|},$$

$$d_{j,2}(\mathbf{x}) = \left\| \mathbf{F}(\mathbf{x}) - d_{j,1}(\mathbf{x}) \left( \frac{\mathbf{z}^j}{\|\mathbf{z}^j\|} \right) \right\|. \quad (3)$$

其中: $\mathbf{z}^j$ 为参考线 $L$ 的坐标向量; $(\mathbf{F}(\mathbf{x}))^T \mathbf{z}^j$ 为目标向量 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 与参考线 $\mathbf{z}^j$ 的内积,即 $\|(\mathbf{F}(\mathbf{x}))^T \mathbf{z}^j\| \cdot \cos \theta$ , $\theta$ 代表目标向量与参考线 $L$ 的夹角.关联参考点需要利用垂直距离 $d_2$ 找到离个体 $\mathbf{x}$ 最近的参考点.此时,个体到关联参考点的投影距离 $d_1(\mathbf{x})$ 可以表征其收敛性,其值越小收敛性越好,将用于环境选择第1阶段基于参考点的约束支配;个体到关联参考点的垂直距离 $d_2(\mathbf{x})$ 表征其多样性,其值越小多样性越好,将用于环境选择第2阶段多样性评估.第 $j$ 个参考点的小生境数为 $\rho_j$ ,它表示 $U_t$ 中与第 $j$ 个参考点相关联的可行解个数,并取与之相关联的个体 $\mathbf{x}$ 的小生境数 $\text{RPniche}(\mathbf{x}) = \rho_j$ ,定义 $\text{RP}(\mathbf{x})$ 表示个体 $\mathbf{x}$ 关联的参考点.值得注意的是与第 $j$ 个参考点关联的不可行解不计小生境数.

### 2.2 基于参考点的约束支配关系

Deb约束支配关系<sup>[9]</sup>是目前应用最广的一种约束处理方法,现有约束处理技术都是在它的基础上改进的<sup>[10-11]</sup>.Deb约束支配关系定义如下:个体 $\mathbf{x}$ 约束支配个体 $\mathbf{y}$ ,需满足以下3个条件之一.

- 1) 个体 $\mathbf{x}$ 是可行解而个体 $\mathbf{y}$ 是不可行解;
- 2) 个体 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 都是不可行解时, $\text{CV}(\mathbf{x}) > \text{CV}(\mathbf{y})$ ;
- 3) 个体 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 都是可行解时,个体 $\mathbf{x}$ Pareto支配个体 $\mathbf{y}$ .

前两个条件虽然可以促使不可行解向可行区域逼近,然而却一味强调可行解优于不可行解,会限定进化只在可行域内进行,使得对于可行域较小或具有多个不连通可行域的约束优化问题,算法极易局部收敛,不利于种群的多样性维护<sup>[12]</sup>.假如种群中个体都是可行的,其优劣仅凭约束违反度这一数值进行评

价,会使不可行域个体的多样性严重降低<sup>[13]</sup>.如果可行解的比率很小,则第3个条件不利于种群向未知可行区域扩展,除非大部分解都是可行的,才能满足一定的多样性.对于约束MaOPs,由于高维空间中的约束条件使得可行域的拓扑形状更为复杂,对算法的多样性要求更高<sup>[7]</sup>.

基于以上分析,提出一种基于参考点的约束支配关系RPCDP.它是采用NSGA-III中的均匀参考点将目标空间划分为多个子区域,通过利用不可行解的目标函数值定位其所在的子区域,并利用小生境机制判断其稀疏性.不可行解的目标函数值能代表不可行解在目标空间中的位置,其位置的分布对于种群的多样性起着很重要的作用,因此需要选择位于稀疏区域的不可行解提高种群多样性.

RPCDP有以下3条准则:

- 1) 如果 $\mathbf{x}$ 为可行解, $\mathbf{y}$ 为不可行解,则可行解 $\mathbf{x}$ 约束支配不可行解 $\mathbf{y}$ ,需满足 $\text{RPniche}(\mathbf{y}) > 0$ .
- 2) 如果 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 均为不可行解,则不可行解 $\mathbf{x}$ 约束支配不可行解 $\mathbf{y}$ ,需满足以下情况之一:
  - i) 当 $\text{RP}(\mathbf{x}) = \text{RP}(\mathbf{y})$ 时,有 $\text{CV}(\mathbf{x}) < \text{CV}(\mathbf{y})$ ;
  - ii) 当 $\text{RP}(\mathbf{x}) \neq \text{RP}(\mathbf{y})$ 时,有 $\text{RPniche}(\mathbf{x}) = 0$ 且 $\text{RPniche}(\mathbf{y}) > 0$ ;
  - iii) 当 $\text{RP}(\mathbf{x}) \neq \text{RP}(\mathbf{y})$ 时,有 $\text{CV}(\mathbf{x}) < \text{CV}(\mathbf{y})$ 且 $\text{RPniche}(\mathbf{x}) > 0, \text{RPniche}(\mathbf{y}) > 0$ .
- 3) 如果 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 均为可行解,则可行解 $\mathbf{x}$ 约束支配可行解 $\mathbf{y}$ ,需满足以下情况之一:
  - i) 当 $\text{RP}(\mathbf{x}) = \text{RP}(\mathbf{y})$ 时,有 $d_1(\mathbf{x}) < d_1(\mathbf{y})$ ;
  - ii) 当 $\text{RP}(\mathbf{x}) \neq \text{RP}(\mathbf{y}), d_1(\mathbf{x}) < d_1(\mathbf{y})$ 时,有 $\text{RPniche}(\mathbf{x}) < \text{RPniche}(\mathbf{y})$ .

第1条准则规定只有当不可行解的小生境数大于1,也就是不位于稀疏区域时,可行解才约束支配不可行解;反之,位于稀疏区域的不可行解与可行解互不支配,如图2中 $\text{RPniche}(\mathbf{y}^1) = 1, \text{RPniche}(\mathbf{y}^2) = 0$ ,因此可行解 $\mathbf{x}$ 是约束支配 $\mathbf{y}^1$ ,与 $\mathbf{y}^2$ 互不支配.这样便

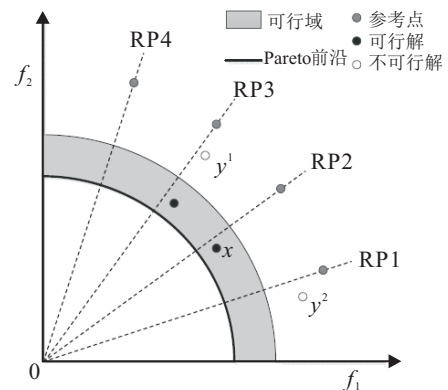


图2 RPCDP第1条准则

打破了Deb准则可行解始终支配不可行解,加大了对未知可行区域的探索,提高了种群多样性.

第2条准则有两种情形:当两个不可行解关联同一个参考点时,只需比较约束违反度,如图3中 $y^3$ 和 $y^4$ 都关联参考点RP4,只需比较 $CV(y^3), CV(y^4)$ ;当两个不可行解关联不同参考点时,稀疏区域的不可行解支配非稀疏区域的不可行解;当两个不可行解关联不同参考点且都不位于稀疏区域时,比较两个个体约束违反度,如图3中稀疏区域的 $y^2$ 是支配非稀疏区域的 $y^1$ ,而 $y^1$ 和 $y^5$ 由于都是位于非稀疏区域,是以约束违反度的大小评价解的优劣.当两个不可行解都位于稀疏区域时,两者互不支配,不管其约束违反度,如图3中 $y^1$ 和 $y^3$ 是互不支配关系.这样摒弃了Deb准则中只以约束违反度定义不可行解的优劣,通过计算小生境数评价不可行解的稀疏性,很好地将不可行解的约束违反度和目标函数信息进行融合,显著提高了不可行解集的多样性.

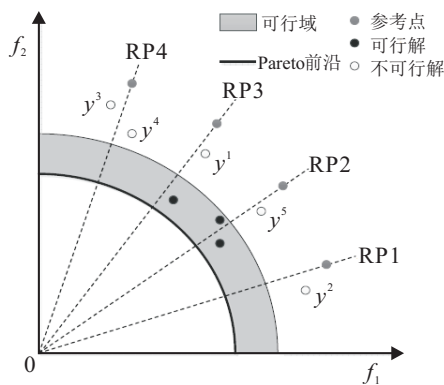


图3 RPCDP第2条准则

由于在高维空间中,种群中个体几乎都是互不支配的,Pareto支配关系无法产生足够的选择压力去促使种群进化.为此,第3条准则对于可行解不再采用Pareto支配关系,而是通过参考点定义的投影距离和小生境数来比较个体,不仅能提高个体选择压力,而且能维护种群多样性.如图4中,关联同一参考点的

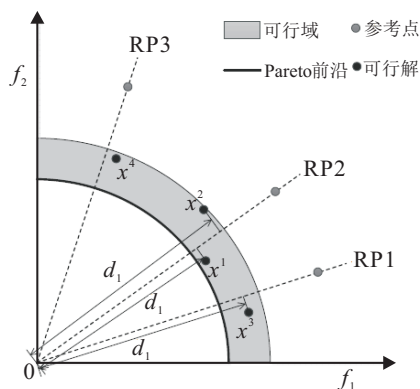


图4 RPCDP第3条准则

$x^1$ 和 $x^2$ 比较投影距离,由于 $d_1(x^1) < d_1(x^2)$ ,可行解 $x^1$ 支配可行解 $x^2$ ;对于关联不同参考点的 $x^2$ 和 $x^3$ ,由于 $d_1(x^3) < d_1(x^2)$ 且 $RPniche(x^3) < RPniche(x^2)$ , $x^2$ 支配 $x^3$ .但对于 $x^1$ 和 $x^3$ ,尽管 $d_1(x^1) < d_1(x^3)$ ,但 $RPniche(x^1) > RPniche(x^3)$ ,所以 $x^1$ 和 $x^3$ 是互不支配的.

综上所述,RPCDP具备以下优点:1)通过保留稀疏区域的不可行解,加大对未知可行区域的探索,保证了搜索到的Pareto前沿的分布性;2)不再采用高维目标向量进行Pareto支配关系比较,而是采用投影距离、小生境数和约束违反度3维数值进行比较,支配概率不会随目标数的增加而减小,相比基于目标函数值的比较更能区分个体的优劣,提高收敛性.

### 2.3 改进的匹配选择

匹配选择旨在选择收敛性和多样性均优的个体进行交叉变异,对算法的性能起着重要的作用.C-NSGA-III的匹配选择与环境选择机制一样,过分强调可行解优于不可行解,使得产生的子代个体大部分在父代可行解周围,不利于对未知可行区域的探索;而稀疏区域的不可行解代表对未知可行区域的开发,其产生的子代很有可能随着进化进程快速逼近可行区域.因此,在匹配选择阶段,加强对稀疏区域的不可行解的选择对算法快速逼近可行区域起着重要的作用.

基于上述环境选择的设计思路,可以直接利用参考点约束支配关系划分的等级与个体的垂直距离进行锦标赛选择,具体过程如下:随机从种群中挑选两个个体,如果一个个体的约束等级层优于另一个个体,则选择前者加入匹配池;如果两个个体所处等级层相同,则垂直距离小的个体加入匹配池,重复选择 $N$ 次,生成规模为 $N$ 的匹配池用于产生后代种群.

### 2.4 算法流程

为便于理解,下面给出本文算法的具体步骤.

Step 1: 初始化参数.包括最大进化代数 $G_{max}$ 、参考点规模 $H$ ,种群规模 $N \approx H$ ,令迭代次数 $t = 0$ ;

Step 2: 在决策空间里随机生成 $N$ 个个体,构成初始种群 $P_0$ ,计算目标函数值和约束违反度,按照Das等<sup>[14]</sup>提出的标准边界交叉(NBI)方法生成均匀分布的参考点集 $Z$ ;

Step 3: 计算种群 $P_t$ 中个体关联的参考点、投影距离、垂直距离及小生境数,基于2.2节定义的约束支配关系对种群进行非支配排序,划分等级层;

Step 4: 基于2.3节的匹配选择并利用交叉变异算

子产生子代种群 $Q_t$ ,计算其目标函数值和约束违反度,关联参考点,计算投影距离、垂直距离及小生境数;

Step 5: 合并父代种群和子代种群,基于2.2节定义的参考点约束支配关系对合并种群 $U_t$ 进行非支配排序,划分等级层;

Step 6: 利用垂直距离 $d_2$ 对临界层进行剪切,选择 $N$ 个体作为下一代种群 $P_{t+1}$ ;

Step 7: 判断是否达到 $G_{\max}$ ,是则输出 $P_{t+1}$ ,否则,转到Step 4.

C-NSGA-III和NSGA-III-RPCDP都基于NSGA-III算法框架,但不同之处在于:

1) 在环境选择阶段,C-NSGA-III是将均匀分布的参考点用于分布性维护阶段,而NSGA-III-RPCDP是用于个体收敛性的比较进行非支配排序,在保证分布性的同时提高个体选择压力;

2) C-NSGA-III中的参考点只用于对可行解进行选择,而NSGA-III-RPCDP的参考点既对可行解的多样性进行评价,又对不可行解的稀疏性进行判别,将种群作为一个整体考虑,能融合不可行解的目标函数信息;

3) 在匹配选择阶段,C-NSGA-III采用Deb约束支配关系比较个体,而NSGA-III-RPCDP采用参考点约束支配关系划分的等级和垂直距离综合比较个体.

### 3 仿真实验与结果分析

为了测试本文算法NSGA-III-RPCDP的性能,选取著名的3种约束高维多目标进化算法进行对比,分别是C-MOEA/DD<sup>[7]</sup>、C-NSGA-III<sup>[5]</sup>和C-RVEA<sup>[8]</sup>.所有的算法都是在多目标进化算法开源平台PlatEMO<sup>[15]</sup>上运行.实验仿真都是在Intel Pentium、4G内存、2.6GHz主频,win10 64位操作系统的计算机上运行.

#### 3.1 测试函数及评价指标

文献[5]基于高维多目标测试集DTLZ<sup>[16]</sup>,提出约束高维多目标优化测试函数集CDTLZ,包括3种类型的约束问题:在第1类约束问题中,最优前沿保持不变,只是在靠近最优前沿的区域会存在不可行目标区域,增加了算法收敛到最优前沿的困难;第2类约束问题将最优前沿上一部分解变为不可行解,测试算法处理不连续前沿的能力;不同于第1、第2类约束只引入一个约束条件,第3类约束问题引入了多个约束条件,其最优前沿不再是原始问题的最优前沿,而是由多个约束边界组合而成.评价指标采用反向世

代距离IGD(Inverted generation distance)<sup>[17]</sup>,能够同时评价解集的收敛性和分布性,为每个测试函数生成10 000个均匀分布的非支配解近似表征Pareto前沿.

#### 3.2 实验参数设置

算法在每一例测试函数上独立运行30次.交叉算子采用模拟二进制交叉, $\eta_c=30$ ,交叉率为 $p_c=1.0$ ;变异算子采用多项式变异, $\eta_m=20$ , $p_m=1/V$ .4种算法的种群大小相同,且按文献[6]设置.C-MOEA/DD中邻域大小 $T=20$ ,邻域个体选择概率 $\delta=0.9$ ,惩罚参数 $\theta=5$ ;C-RVEA中惩罚因子变化率 $\alpha=2$ ,参考点调整频率 $f_r=0.1$ .

#### 3.3 实验结果分析

NSGA-III-RPCDP与C-MOEA/DD、C-NSGA-III和C-RVEA在CDTLZ上IGD的统计结果如表1~表3所示,分别为30次独立运行结果的平均值与标准差,其中最好的结果用黑色加粗表示.另外,为了比较NSGA-III-RPCDP与另外3种算法获得的平均IGD值之间差异的显著性,本文采用Wilcoxon秩和检验进行两两比较,显著性水平取0.05,表中“+”、“-”、“ $\approx$ ”分别表示其他算法显著优于、显著劣于和无差别于NSGA-III-RPCDP.

由表1可看出:对于第1类约束问题,C-MOEA/DD和NSGA-III-RPCDP获得的结果明显优于C-NSGA-III和C-RVEA,其原因在于这两种算法保护稀疏区域不可行解,提高了种群的多样性.对于C1-DTLZ1问题,C-MOEA/DD在目标3和目标5上取得了最优结果,而NSGA-III-RPCDP取得了余下高维目标例子的最优结果.对于C1-DTLZ1问题,在高维空间中的可行域相对变小,能够找到的可行解较少,一味强调可行解优于不可行解,易陷入局部最优,保护稀疏区域的不可行解有助于种群探索未知的可行区域,可以多方向地抵达Pareto前沿,提高种群多样性.对于C1-DTLZ3问题,在进化的进程中有一条难以逾越的不可行域,C-NSGA-III和C-RVEA均无法穿过,这是因为这两种算法都是强调可行解优于不可行解,往往会删除更接近Pareto前沿的不可行解保留远离Pareto前沿的可行解,使得进化停滞不前,尽管C-MOEA/DD在环境选择阶段也保留稀疏区域的不可行解,但在匹配选择阶段还是可行解优于不可行解,NSGA-III-RPCDP在这两个阶段都强调对稀疏区域不可行解的保护,因此能取得更好的结果.

由表2可以看出:对于第2类约束问题,NSGA-III-RPCDP在C2-DTLZ2和高维的C2-DTLZ2-Convex

表1 4种算法在不同目标维数的C1-DTLZ1和C1-DTLZ3测试例子上获得的IGD平均值与标准差

函数	M	G <sub>max</sub>	C-MOEA/DD	C-NSGA-III	C-RVEA	NSGA-III-RPCDP
C1-DTLZ1	3	500	<b>2.037 1e-2 (1.50e-4) +</b>	2.037 6e-2 (2.08e-4) +	2.046 9e-2 (9.36e-5) +	2.326 1e-2 (1.13e-3)
	5	600	<b>5.135 2e-2 (2.90e-4) +</b>	5.160 3e-2 (4.10e-4) +	5.242 4e-2 (1.11e-4) +	5.557 5e-2 (1.24e-3)
	8	800	1.206 6e-1 (2.98e-4) -	1.247 0e-1 (1.15e-2) -	1.192 9e-1 (1.39e-3) -	<b>1.077 9e-1 (6.26e-4)</b>
	10	1000	1.317 9e-1 (8.07e-4) -	1.361 7e-1 (7.93e-3) -	1.304 0e-1 (1.28e-3) -	<b>1.258 4e-1 (7.77e-4)</b>
	15	1500	2.422 0e-1 (1.03e-1) -	1.996 6e-1 (9.80e-4) +	1.944 3e-1 (6.32e-3) -	<b>1.903 0e-1 (4.21e-3)</b>
C1-DTLZ3	3	1000	8.661 0e-2 (3.05e-2) -	8.013 3e+0 (6.31e-3) -	8.023 1e+0 (1.44e-2) -	<b>6.415 7e-2 (3.55e-2)</b>
	5	1500	2.160 1e-1 (1.60e-2) -	1.157 1e+1 (1.02e-2) -	1.158 8e+1 (1.14e-2) -	<b>1.153 9e-1 (2.29e-3)</b>
	8	2500	3.159 6e-1 (6.90e-2) -	1.166 8e+1 (7.83e-2) -	1.165 2e+1 (1.67e-2) -	<b>1.171 1e-1 (1.31e-2)</b>
	10	3500	2.412 8e-1 (5.72e-3) -	1.426 7e+1 (5.12e-2) -	1.421 4e+1 (1.37e-2) -	<b>1.427 4e-1 (4.23e-3)</b>
	15	5000	<b>1.420 7e-1 (1.24e-3) +</b>	1.463 0e+1 (2.26e-1) -	1.421 3e+1 (6.58e-3) -	1.445 3e-1 (3.09e-2)

表2 4种算法在不同目标维数的C2-DTLZ2和C2-DTLZ2-Convex测试例子上获得的IGD平均值与标准差

函数	M	G <sub>max</sub>	C-MOEA/DD	C-NSGA-III	C-RVEA	NSGA-III-RPCDP
C2-DTLZ2	3	250	4.972 5e-2 (5.80e-4) -	4.819 5e-2 (1.86e-4) -	4.962 5e-2 (1.22e-5) -	<b>4.416 5e-2 (4.27e-4)</b>
	5	350	1.408 0e-1 (3.86e-4) -	1.386 8e-1 (3.28e-4) -	1.395 4e-1 (5.77e-5) -	<b>1.349 5e-1 (6.59e-4)</b>
	8	500	2.922 5e-1 (1.33e-3) -	4.016 2e-1 (2.57e-1) -	2.929 5e-1 (6.48e-4) -	<b>2.521 3e-1 (1.29e-3)</b>
	10	750	2.704 7e-1 (2.43e-4) -	2.766 5e-1 (6.10e-2) -	2.644 7e-1 (1.05e-2) -	<b>2.278 3e-1 (1.86e-2)</b>
	15	1000	3.812 6e-1 (1.13e-1) -	3.809 5e-1 (8.77e-2) -	<b>2.507 9e-1 (1.68e-2) +</b>	3.612 3e-1 (4.97e-2)
C2-DTLZ2-convex	3	250	4.356 2e-2 (2.19e-4) -	<b>3.463 6e-2 (5.26e-4) +</b>	4.141 2e-2 (8.21e-4) -	4.059 0e-2 (2.21e-3)
	5	750	8.744 7e-2 (1.35e-3) -	<b>6.563 7e-2 (7.01e-4) +</b>	6.659 5e-2 (1.74e-3) +	6.870 8e-2 (4.52e-3)
	8	1500	1.320 9e-1 (1.13e-3) -	1.300 6e-1 (1.06e-3) +	<b>1.183 3e-1 (5.78e-3) +</b>	1.325 6e-1 (3.32e-3)
	10	2500	1.497 9e-1 (4.35e-4) -	1.135 8e-1 (2.24e-3) -	1.260 4e-1 (5.23e-3) -	<b>1.082 8e-1 (4.22e-2)</b>
	15	3500	1.850 8e-1 (1.70e-2) -	2.433 6e-1 (3.69e-2) -	1.685 4e-1 (2.81e-3) -	<b>1.503 8e-1 (2.01e-2)</b>

表3 4种算法在不同目标维数的C3-DTLZ1和C3-DTLZ4测试例子上获得的IGD平均值与标准差

函数	M	G <sub>max</sub>	C-MOEA/DD	C-NSGA-III	C-RVEA	NSGA-III-RPCDP
C3-DTLZ1	3	750	5.620 6e-2 (1.00e-2) -	<b>5.003 1e-2 (1.27e-2) +</b>	6.022 6e-2 (1.29e-2) -	5.076 1e-2 (1.21e-3)
	5	1250	<b>1.069 3e-1 (2.57e-4) +</b>	1.072 3e-1 (3.11e-4) +	1.075 6e-1 (1.32e-3) +	1.135 5e-1 (1.80e-3)
	8	2000	2.422 6e-1 (3.48e-4) -	2.401 9e-1 (1.12e-3) -	2.430 4e-1 (4.80e-3) -	<b>2.185 3e-1 (3.11e-3)</b>
	10	3000	2.656 8e-1 (2.60e-5) -	2.632 6e-1 (5.73e-4) -	2.789 1e-1 (2.57e-2) -	<b>2.521 6e-1 (2.77e-3)</b>
	15	4000	4.019 4e-1 (1.17e-3) +	4.014 3e-1 (1.82e-3) +	<b>3.997 3e-1 (7.86e-3) +</b>	4.681 7e-1 (1.23e-2)
C3-DTLZ4	3	750	2.703 3e-1 (3.23e-1) -	2.431 5e-1 (3.35e-1) +	<b>9.343 3e-2 (7.48e-4) +</b>	2.512 6e-1 (3.30e-1)
	5	1250	<b>2.436 8e-1 (1.42e-4) +</b>	3.214 1e-1 (1.62e-1) -	2.455 1e-1 (8.09e-4) +	2.661 7e-1 (2.40e-3)
	8	2000	<b>4.965 4e-1 (2.27e-5) +</b>	5.904 4e-1 (1.33e-1) ≈	4.972 6e-1 (5.19e-4) +	5.892 5e-1 (6.57e-2)
	10	3000	5.674 1e-1 (2.91e-5) +	5.690 1e-1 (6.20e-4) +	<b>5.669 7e-1 (7.31e-4) +</b>	5.932 2e-1 (8.39e-2)
	15	4000	7.919 2e-1 (1.19e-2) +	1.143 7e+0 (1.15e-1) -	<b>7.762 7e-1 (1.19e-2) +</b>	8.590 3e-1 (3.49e-2)

例子上取得了最好IGD结果. C-MOEA/DD、C-NSGA-III和C-RVEA都是在目标空间中预先设置均匀分布的参考点引导种群进化,如果Pareto前沿是连续的,则会是一个参考点对应一个个体,保持解集的分布性.对于第2类约束问题,由于约束条件的存在,使得问题的Pareto前沿变得不连续,这样会导致这3种算法有的参考点关联多个个体,而有的参考点没有个

体与之关联,严重影响种群分布性;NSGA-III-RPCDP虽然也采用了均匀分布的参考点,但是用于个体的比较与非支配排序并不存在参考点与个体一一对应的关系,因此能保证种群分布性.

由表3可以看出:对于第3类约束问题,NSGA-III-RPCDP在目标8和目标10的C3-DTLZ1获得了最好的结果,C-MOEA/DD在目标5的C3-DTLZ1以及

目标5和目标8的C3-DTLZ4上获得了最优结果,C-RVEA在目标15的C3-DTLZ1以及目标3、目标10和目标15的C3-DTLZ4上获得了最好结果.虽然第3类约束问题的Pareto前沿由约束边界组成,但求解难度并没有增加,种群的搜索过程几乎都是在可行域内进行,因此并不需要进行稀疏区域不可行解的保护操作.由于这类问题的Pareto前沿是完整连续的,基于均匀分布参考点的算法C-RVEA和C-MOEA/DD更具优势.尽管如此,NSGA-III-RPCDP算法中可行解的比较采用了新的比较准则,可以有效提升收敛能力,在强调收敛能力的C3-DTLZ1问题上具有一定优势.

最后从Wilcoxon秩和检验的统计结果中可以看出:在所有30例CDTLZ测试问题中,NSGA-III-RPCDP显著优于C-MOEA/DD 20次、优于C-NSGA-III 18次、优于C-RVEA 18次,由此说明在CDTLZ测试函数集上,本文算法相对于其他算法在IGD指标上具有较大的优势,具有最好的综合性能.

### 3.4 运行时间比较

为了比较4种算法的求解时间,以目标15为例,对各个算法在每一类问题运行30次的时间取平均,如图5所示,其中C2-DTLZ2\*为C2-DTLZ2-Convex缩写.

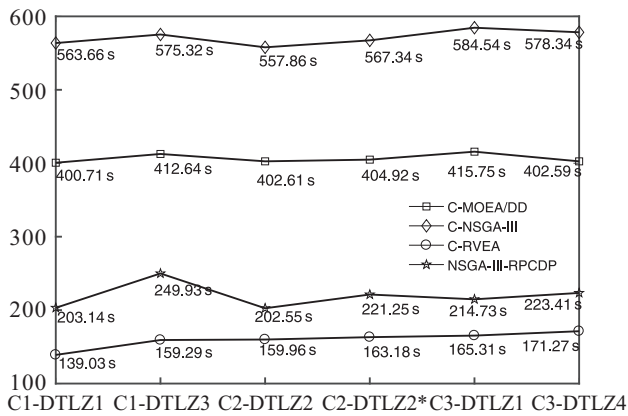


图5 4种算法在目标15问题上的运行时间

由图5可以看出:运行速度最慢的算法是C-NSGA-III,其所采用的非支配排序需要比较每一维目标值大小,在高维情况下耗时较长;而C-RVEA算法直接对聚类后的类内个体进行角度惩罚距离的比较,不需要进行非支配排序,运行速度最快;C-MOEA/DD算法虽然也需要非支配排序,但其设计了一种高效的序值更新方法,一定程度上缩短了运行时间;相比于C-NSGA-III算法的非支配排序需对15维目标值进行比较,NSGA-III-RPCDP算法的非支配排序只需比较投影距离、小生境数和约束违反度3维数值,

比较次数大大减少,运行时间显著少于C-NSGA-III算法,求解效率得到一定提高.

## 4 结论

为了将高维特征与约束处理技术进行有效结合,本文提出了一种基于参考点约束支配关系的NSGA-III-RPCDP算法.首先,将种群作为一个整体,设计一种基于参考点的约束支配关系,能有效保护稀疏区域的不可行解,提高种群多样性;然后,在环境选择过程中,利用此约束支配关系先对种群进行非支配排序,接着采用个体到参考点的垂直距离对个体的多样性进行评估,提高收敛性的同时保证了分布性;最后,在匹配选择阶段,设计基于RVCDP划分的等级和个体垂直距离的锦标赛选择机制,使之与环境选择过程协调一致.在标准约束高维多目标测试函数集CDTLZ上的实验结果表明:本文算法相比于另外3种算法,能更好地收敛到可行域,并保持可行域内的分布性.下一步工作将研究如何根据种群特性动态调整参考点的分布,使RPCDP能更加精细地评估个体的收敛性和分布性.

### 参考文献(References)

- [1] Li B, Li J, Tang K, et al. Many-objective evolutionary algorithms: A survey[J]. ACM Computing Surveys (CSUR), 2015, 48(1): 1-35.
- [2] 郑金华, 申瑞珉, 李密青, 等. 一种基于信息分离的高维多目标进化算法[J]. 软件学报, 2015, 26(5): 1013-1036. (Zheng J H, Shen R M, Li M Q, et al. Evolutionary algorithm based on information separation for many-objective optimization[J]. J of Software, 2015, 26(5): 1013-1036.)
- [3] von Lüken C, Barán B, Brizuela C. A survey on multi-objective evolutionary algorithms for many-objective problems[J]. Computational optimization and Applications, 2014, 58(3): 707-756.
- [4] Garcia J, Berlanga A, López J M M. Effective evolutionary algorithms for many-specifications attainment: Application to air traffic control tracking filters[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2009, 13(1): 151-168.
- [5] Jain H, Deb K. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point based nondominated sorting approach, Part I: Handling constraints and extending to an adaptive approach[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2014, 18(4): 602-622.
- [6] Deb K, Jain H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based

nondominated sorting approach, Part I: Solving problems with box constraints[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2014, 18(4): 577-601.

[7] Li K, Deb Q, Zhang Q, et al. An evolutionary many-objective optimization algorithm based on dominance and decomposition[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2015, 19(5): 694-716.

[8] Cheng R, Jin Y, Olhofer M, et al. A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2016, 20(5): 773-791.

[9] Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-Ii[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182-197.

[10] 龙文, 梁昔明, 徐松金, 等. 聚类佳点集交叉的约束优化混合进化算法[J]. 计算机研究与发展, 2012, 49(8): 1753-1761.  
(Long W, Liang X M, Xu S J, et al. A hybrid evolutionary algorithm based on clustering good-point set crossover for constrained optimization[J]. J of Computer Research & Development, 2012, 49(8): 1753-1761.)

[11] 孙浩, 杨景明, 刘醒, 等. 基于环境Pareto支配选择策略的有约束多目标差分进化算法[J]. 控制与决策, 2016, 31(1): 45-51.  
(Sun H, Yang J M, Liu X, et al. Differential evolution algorithm based on environment Pareto dominated selection strategy in constrained multi-objective optimization problem[J]. Control & Decision, 2016, 31(1): 45-51.)

[12] 王勇, 蔡自兴, 周育人, 等. 约束优化进化算法[J]. 软件学报, 2009, 20(1): 11-29.  
(Wang Y, Cai Z X, Zhou Y R, et al. Constrained optimization evolutionary algorithms[J]. J of Software, 2009, 20(1): 11-29.)

[13] Fan Z, Li W, Cai X, et al. Angle-based constrained dominance principle in moea/D for constrained multi-objective optimization problems[C]. 2016 IEEE Congress on Evolutionary Computation(CEC). Vancouver, 2016: 460-467.

[14] Das I, Dennis J E. Normal-boundary intersection: A new method for generating the pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems[J]. SIAM J on Optimization, 1998, 8(3): 631-657.

[15] Tian Y, Cheng R, Zhang X, et al. Platemo: A matlab platform for evolutionary multi-objective optimization[J]. IEEE Computational Intelligence Magazine, 2017, 12(4): 73-87.

[16] Deb K, Thiele L, Laumanns M, et al. Scalable test problems for evolutionary multiobjective optimization[C]. Evolutionary Multiobjective Optimization — A. London: Springer, 2005: 105-145.

[17] Zitzler E, Thiele L, Laumanns M, et al. Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2003, 7(2): 117-132.

(责任编辑: 孙艺红)

## 下 期 要 目

动态车辆路径问题的研究进展及发展趋势 .....	周鲜成, 等
工件可拒绝的有限等待置换流水车间调度算法 .....	王柏琳, 等
考虑参数不确定性的主动悬架 $H_2/H_\infty$ 保性能控制 .....	庞 辉, 等
基于置信规则库的海基系统性能退化机理分析与预测 .....	韩润繁, 等
带有不确定性的多电机卷绕系统的分散最优保性能控制 .....	侯海良, 等
基于递推近似最小一乘的多传感器系统偏差稳健估计算法 .....	郭蕴华, 等
求解多维背包问题的二级协作果蝇优化算法 .....	张清勇, 等
一种利用知识迁移的卷积神经网络训练策略 .....	罗 可, 等
知识嵌入的迁移孪生支持向量机 .....	王洪元, 等
加权犹豫模糊集的群决策方法 .....	曾文艺, 等
基于 Drift-Ah 积分法的 CKF 估算锂电池 SOC .....	刘新天, 等
一类不确定非线性离散系统的模糊自适应控制器设计 .....	范永青, 等