

# 需求损失下两产品联合生产动态批量决策及预测时阈

靖富营<sup>1</sup>, 汤敏<sup>1,2†</sup>

(1. 电子科技大学 经济与管理学院, 成都 610054; 2. 成都理工大学 传播科学与艺术学院, 成都 610059)

**摘要:** 研究需求损失下两产品联合生产(采购)动态批量决策问题. 在各周期成本变动情形下分析多周期动态批量决策的预测时阈和决策时阈, 构建包含联合启动成本、两产品的单独启动成本、库存持有成本、变动生产成本和需求损失成本在内的成本最小化模型. 在最优解结构特性的基础上, 设计出前向动态规划算法求解问题, 通过建立两产品生产点的单调性和建立生产集, 给出求解预测时阈和决策时阈的充分条件. 通过数值算例分析预测时阈求解的具体过程, 表明所构建模型的有效性.

**关键词:** 预测时阈; 动态批量; 前向算法; 联合生产; 需求损失; 生产集

**中图分类号:** TP274

**文献标志码:** A

## Dynamic lot-size model and forecast horizon study for two products under joint production and lost sales

JING Fu-ying<sup>1</sup>, TANG Min<sup>1,2†</sup>

(1. School of Management and Economics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China; 2. College of Communication Science and Art, Chengdu University of Technology, Chengdu 611059, China)

**Abstract:** This paper investigates a two-product dynamic lot-size problem under joint production and lost sales, and analyzes forecast and decision horizons for time-varying costs. We formulate a cost minimization model including the joint setup costs, individual setup costs, variable costs, holding costs and lost sale costs over a finite horizon of  $T$  periods. Based on some properties of the optimal solution, we develop an efficient forward dynamic programming algorithm to solve the problem. Based on the monotonicity of the production point and production set for both products, a sufficient condition for obtaining forecast horizon and decision horizon is given through a numerical example, the details of computing the forecast horizon is analyzed, which shows the effectiveness of the proposed model.

**Keywords:** forecast horizon; dynamic lot-size; forward algorithm; joint production; lost sales; production set

## 0 引 言

在企业的生产运作中,运营经理在做当前生产决策时,通常需要分析今后一定时期内的数据信息(如需求、成本、库存),在获取这些数据信息的基础上,通过优化方法决策出合理的生产批量.因此,运营经理在决策时面临的首要问题是:应该分析今后多长时间的数据信息?这一问题在运作管理领域被定义为预测时阈问题.预测时阈的确定对企业动态批量的生产决策至关重要,因为其长短与未来(需求、成本等)数据信息的收集紧密相关,较长的预测时阈意味着更多的未来信息和数据的加工和处理,预示着大量的人力、物力和时间的消耗,导致预测成本的增加,而

随着时间的向后推移,获取的数据的准确性也是逐渐降低的,进而后数据对前期决策的影响也变得不可靠;而较短的预测时阈又可能会导致未来信息数据的不完整,从而影响当前决策结果的准确性.因而,合理地预测时阈直接决定着企业成本的高低和决策结果的准确性,进一步影响企业的运营效率.所以,这一问题已经成为企业动态批量决策中的关键问题,也是企业应用ERP等决策支持系统的先决条件<sup>[1]</sup>.

Wagner等<sup>[2]</sup>最早研究了企业生产的动态批量问题:企业面对 $T$ 个周期外生确定的需求,但每一周期的需求是变化的,生产单一产品满足每一周期的需求,不允许缺货和延迟交货,可以通过当期的生产满

收稿日期: 2017-08-21; 修回日期: 2018-04-06.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71572030).

责任编委: 赵珺.

作者简介: 靖富营(1986—),男,博士生,从事物流与供应链管理的研究; 汤敏(1981—),女,副教授,博士生,从事企业管理等研究.

†通讯作者. E-mail: tangm@cdu.edu.cn.

足,也可以通过前一周期期末的库存满足,企业无生产能力和库存能力的约束.企业的生产启动成本与库存持有成本是变化的,但单位生产成本是固定的,企业的目标是达到 $T$ 个周期总成本最小,这就是著名的W-W模型.其最主要的贡献:1)提出了零库存性质,在此性质的基础上,给出了多项式时间的前向动态规划算法求解问题;2)求解了预测时阈问题.此后,大量的文献对W-W模型进行拓展,如考虑延迟交货问题、生产和库存能力约束问题、再制造问题、需求或生产时间窗问题、价格生产联合决策问题、生产平稳性问题等.预测时阈在生产与库存管理领域更多的拓展文献以及在能力扩张问题、机器设备的更换问题、工厂选址问题、资金的平衡问题、排序与排程问题的拓展文献请参见预测时阈综述文章<sup>[3]</sup>.之后文献[4-12]也对预测时阈问题进行了研究.

由于多产品联合生产(采购)能够给企业带来范围经济,多产品联合生产(采购)方式越来越受到企业的青睐. Akbalik等<sup>[13]</sup>研究了库存能力约束下的多产品动态批量问题,证明了即使在无库存成本和稳定的启动成本下此问题也是NP-hard问题.在投机性动机成本下和产品数目固定的情形下,此问题在多项式时间内可解.之后又拓展了库存能力约束下的多产品动态批量问题,考虑了生产能力与库存能力双重约束情形<sup>[14]</sup>. Melo等<sup>[15]</sup>研究了无生产能力约束但有库存能力约束的多产品动态批量模型,提出了两种启发式算法求解问题,并用数值实验比较了两种算法的效率. Cheung等<sup>[16]</sup>考虑了具有子模性的成本结构的多产品联合补货问题,并利用子模函数的性质设计算法求解问题. Li等<sup>[17]</sup>考虑两个具有终止使用期限限制的耐用品动态批量模型:单产品模型和两产品模型,设计动态规划算法求解单产品模型,设计拉格朗日松弛算法求解两产品模型. Cuha等<sup>[18]</sup>研究了再制造的多产品动态批量模型,利用有效不等式设计启发式算法,并用数值实验说明了算法的有效性.但以上多产品动态批量问题都要求每一周期的需求必须得到满足,不允许延迟交货也不允许缺货情况存在,也没有分析预测时阈问题.

Sandbothe等<sup>[19]</sup>最早研究了生产能力约束且允许缺货的单产品动态批量模型,但假设了各周期成本参数不变,在最优解性质的基础上给出了动态规划算法求解模型,并给出了寻找预测时阈的充分条件.之后又拓展了以上研究,考虑了生产能力和库存能力双重约束情形<sup>[20]</sup>. Aksen等<sup>[21]</sup>研究了在无能力约束下允许需求损失(缺货)的动态批量问题:企业面

对外生已知的市场价格和需求,企业的生产和库存成本也是确定已知的,企业的生产成本包括固定成本和变动成本,各个周期的成本和价格是变动的;顾客需求有可能得不到满足,需求损失(缺货)也产生了收益损失(缺货成本);企业要优化采购计划达到多个周期的收益最大,收益最大问题可以转化为解决成本最小问题. Aksen<sup>[22]</sup>考虑了缺货会产生商誉损失的情况,拓展了文献[21]的研究. Absi等<sup>[23]</sup>拓展了文献[19]的研究,考虑了多产品情形,证明了此问题是NP-hard问题,并利用有效不等式设计启发式算法求解问题. Absi等又在文献[24-25]中研究了单产品在生产时间窗下的动态批量模型,同时考虑了需求损失、延迟交货和提前生产,在最优解性质的基础上给出了多项式时间的动态规划算法. Narenji等<sup>[26]</sup>研究了多产品联合生产动态批量模型,考虑了生产能力约束和需求损失的情形,利用启发式方法求解模型并用数值实验分析了算法效率. Gayon等<sup>[27]</sup>考虑了一个仓库多个零售商的两级动态批量模型,零售商的需求允许延迟交货和缺货,提出了一种组合算法计算两种情形的近似解. Chu等<sup>[28-31]</sup>、Zhong等<sup>[32]</sup>研究了库存能力约束下允许缺货和延迟交货情况下单产品的动态批量问题,同时指出缺货(需求损失)可以视为生产外包(outsourcing),只是语义上的不同.其他考虑允许缺货(需求损失)的动态批量拓展模型请参见文献[33-37].考虑生产外包(缺货、需求损失)的动态批量,黄玲等<sup>[38-39]</sup>研究了一个非减库存能力约束下允许延期交货和外包的单产品动态批量问题,给出了多项式时间的动态规划算法,最后通过数值实验验证了算法的有效性.钟金宏等<sup>[40]</sup>研究了允许外包和延迟交货的单产品动态批量问题,成本函数均为带固定分量的线性函数,外包量、延迟交货量和库存容量均受限.王能民等<sup>[41]</sup>考虑了一个外包和再制造的单产品动态批量决策模型,讨论了最优解的性质,并给出多项式时间的动态规划算法.徐娟等<sup>[42]</sup>考虑了一个不同顾客环境下生产和外包的动态批量决策问题,分析了两类顾客和多类顾客情形.在两类顾客下,给出了一个多项式算法得到最优的生产及外包策略;在多类顾客下,设计了一种启发式算法得到企业的生产及外包策略.

以上大部分文献重点在于设计算法求解需求损失下的动态批量模型,而没有分析预测时阈问题.仅有文献[19-20]两篇文献在各周期的成本参数是固定不变的假设下考虑了需求损失的动态批量预测时阈问题,而且是针对单产品问题没有涉及多产品的联合生产问题.因此,本文将深入研究解决需求损失下两

产品联合生产的预测时阈问题,在变动成本参数下求解两产品动态批量的预测时阈. 国内学者关于生产(采购)计划<sup>[43]</sup>和库存管理<sup>[44-45]</sup>方面有大量研究,同样也都没有涉及预测时阈的分析.

### 1 模型构建

在模型构建中需要定义如下符号.

$T$ : 时间周期;

$X_{nt}$ : 第  $t$  期期初产品  $n$  的生产(采购)数量,  $1 \leq t \leq T, n = 1, 2$ ;

$d_{nt}$ : 第  $t$  期期初产品  $n$  的需求,  $1 \leq t \leq T, n = 1, 2$ ;

$I_{nt}$ : 第  $t$  期期末( $t + 1$  周期期初)产品  $n$  的库存数量,  $1 \leq t \leq T, n = 1, 2$ ;

$S_{nt}$ : 第  $t$  期产品  $n$  的需求损失(缺货)数量,  $1 \leq t \leq T, n = 1, 2$ ;

$c_{nt}$ : 第  $t$  期期初产品  $n$  的单位生产(采购)成本,  $1 \leq t \leq T, n = 1, 2$ ;

$h_{nt}$ : 第  $t$  期单位库存持有成本,  $1 \leq t \leq T, n = 1, 2$ ;

$s_{nt}$ : 第  $t$  期单位需求损失(缺货)成本,  $1 \leq t \leq T, n = 1, 2$ ;

$k_{nt}$ : 第  $t$  期期初生产产品  $n$  的单独启动成本,  $1 \leq t \leq T, n = 1, 2$ ;

$K_t$ : 第  $t$  期期初生产的联合启动成本,  $1 \leq t \leq T$ .

定义二元变量

$$\delta(X) = \begin{cases} 1, & X > 0; \\ 0, & X = 0. \end{cases}$$

根据文献[21]的研究,有如下假设成立.

**假设1**  $s_{nt} > c_{nt}, n = 1, 2, 1 \leq t \leq T$ , 即两产品需求损失(缺货)的成本大于单位生产成本. 这是一个合理的假设,否则,若需求损失的成本大于单位生产成本,则需求全部不满足是最优策略.

若第  $t$  期期初同时生产两种产品,则启动成本为  $K_t + k_{1t} + k_{2t}$ ,若第  $t$  期期初只生产产品1(产品2),则启动成本为  $K_t + k_{1t}(K_t + k_{2t})$ . 不失一般性,假设初始时期和结束时期两产品库存均为0. 在以上假设和定义的基础上,需求损失下的两产品联合生产动态批量决策问题可以用以下优化模型描述,企业的目标是在  $T$  周期内达到总成本最小,目标函数表示为

$$\min \sum_{t=1}^T \left( K_t \delta \left( \sum_{n=1}^2 X_{nt} \right) + \sum_{n=1}^2 (k_{nt} \delta(X_{nt}) + c_{nt} X_{nt} + h_{nt} I_{nt} + s_{nt} S_{nt}) \right). \quad (1)$$

s.t.  $I_{nt} = I_{n,t-1} + X_{nt} - (d_{nt} - S_{nt}),$

$$1 \leq t \leq T, n = 1, 2; \quad (2)$$

$$S_{nt} \leq d_{nt}, 1 \leq t \leq T, n = 1, 2; \quad (3)$$

$$X_{nt}, I_{nt}, S_{nt} \geq 0, 1 \leq t \leq T, n = 1, 2. \quad (4)$$

约束条件(2)表示两产品的库存平衡,当期的库存数量等于上一期的库存数量加上当期期初的生产数量减去实际满足的需求的数量. 约束条件(3)表示当期需求损失(缺货)的数量小于等于当期的需求. 约束条件(4)表示两产品的生产数量、库存数量和需求损失(缺货)数量均大于等于0.

以上构建的模型和 Aksen 等<sup>[21]</sup>的研究都是研究了允许需求损失(缺货)情形下的动态批量决策问题,但不是对文献[21]的简单拓展,主要有两个方面的不同: 1) 文献[21]考虑的是单产品生产决策问题,本文考虑的是两产品联合生产决策问题,本文设置的两产品联合生产的启动成本具有子模性<sup>[16]</sup>,具有子模性质的成本能很好地刻画企业在生产过程中的范围经济,这是单产品问题所不具备的. 另外,针对单产品动态批量问题设计的动态规划算法不适用于两产品联合生产的动态批量问题. 2) 文献[21]没有考虑预测时阈问题,本文的重点是研究两产品联合生产和需求损失下动态批量的预测时阈问题.

**定义1** 给定  $T$ -周期需求损失下的两产品联合生产动态批量决策问题的最优解,若  $X_{nt} > 0, 1 \leq t \leq T, n = 1, 2$ , 则周期  $t$  定义为产品  $n$  的生产点或者采购点.

### 2 前向动态规划算法

**引理1** 在  $T$ -周期问题的最优解中,对于产品  $n(n = 1, 2)$  和任意  $t(1 < t \leq T)$  有如下性质成立:

- 1)  $I_{n,t-1} X_{nt} = 0$ ;
- 2)  $S_{nt}(S_{nt} - d_{nt}) = 0$ ;
- 3)  $X_{nt} S_{nt} = 0$ .

**证明** 根据文献[21],性质1)是著名的零库存性质,某一周期  $t$  的生产如果大于0,则上一期的库存为0;性质2)是表明某一周期  $t$  如果有需求损失,则损失的数量一定为当期的需求;性质3)说明某一周期  $t$  如果生产大于0,则不会有需求损失,这一性质可以由假设1得到.  $\square$

文献[21]设计的前向动态规划算法只适用于单产品情况,不适用于两产品联合生产情况. 根据引理1中的3个性质,以下内容将设计出两产品联合生产的前向动态规划算法. 令  $F(t)$  为  $t$ -周期问题的最优成本,  $F(i, j, t)$  是产品1的最后一个生产点为  $i$ 、产品2的最后一个生产点为  $j$  时  $t$ -周期问题的成本. 由以上

定义可得

$$F(t) = \min_{1 \leq i \leq t; 1 \leq j \leq t} F(i, j, t).$$

若产品1或者产品2在  $t$ -周期问题中无生产点, 则设置  $i = 0$  或  $j = 0$ . 下面分类讨论计算动态规划循环式  $F(i, j, t)$ .

首先计算初始值  $F(1)$ , 若

$$K_1 + k_{11} + c_{11}d_{11} + k_{21} + c_{21}d_{21} \leq s_{11}d_{11} + s_{21}d_{21},$$

$$k_{11} + c_{11}d_{11} \leq s_{11}d_{11}, \quad k_{21} + c_{21}d_{21} \leq s_{21}d_{21},$$

则

$$F(1, 1, 1) = K_1 + k_{21} + c_{21}d_{21} + s_{11}d_{11};$$

若

$$k_{11} + c_{11}d_{11} > s_{11}d_{11},$$

$$K_1 + k_{21} + c_{21}d_{21} \leq s_{21}d_{21},$$

则

$$F(0, 1, 1) = K_1 + s_{11}d_{11} + k_{21} + c_{21}d_{21};$$

若

$$K_1 + k_{11} + c_{11}d_{11} \leq s_{11}d_{11},$$

$$k_{21} + c_{21}d_{21} > s_{21}d_{21},$$

则

$$F(1, 0, 1) = K_1 + k_{11} + c_{11}d_{11} + s_{21}d_{21};$$

若

$$k_{11} + c_{11}d_{11} > s_{11}d_{11},$$

$$k_{21} + c_{21}d_{21} > s_{21}d_{21},$$

则

$$F(0, 0, 1) = s_{11}d_{11} + s_{22}d_{22}.$$

当  $t \geq 2, 1 \leq i \leq t-1, 1 \leq j \leq t-1$  时, 定义

$$MC_{1it} = \min \left\{ s_{1t}, c_{1i} + \sum_{l=i}^{t-1} h_{1l} \right\},$$

$$MC_{2jt} = \min \left\{ s_{2t}, c_{2j} + \sum_{l=j}^{t-1} h_{2l} \right\},$$

则

$$F(i, j, t) = F(i, j, t-1) + MC_{1it} + MC_{2jt},$$

$$F(0, j, t) = F(0, j, t-1) + s_{1t}d_{1t} + MC_{2jt},$$

$$F(i, 0, t) = F(i, 0, t-1) + MC_{1it} + s_{2t}d_{2t},$$

$$F(0, 0, t) = F(0, 0, t-1) + s_{1t}d_{1t} + s_{2t}d_{2t}.$$

当  $t \geq 2, i = t$  或  $j = t$  时: 若

$$K_t + k_{1t} + c_{1t}d_{1t} + k_{2t} + c_{2t}d_{2t} \leq s_{1t}d_{1t} + s_{2t}d_{2t},$$

$$k_{1t} + c_{1t}d_{1t} \leq s_{1t}d_{1t}, \quad k_{2t} + c_{2t}d_{2t} \leq s_{2t}d_{2t},$$

则

$$F(t, t, t) = F(t-1) + K_t + \sum_{n=1}^2 k_{nt} + \sum_{n=1}^2 c_{nt}d_{nt};$$

若

$$k_{1t} + c_{1t}d_{1t} > s_{1t}d_{1t},$$

$$K_t + k_{2t} + c_{2t}d_{2t} \leq s_{2t}d_{2t},$$

则

$$F(0, t, t) = F(t-1) + s_{1t}d_{1t} + K_t + k_{2t} + c_{2t}d_{2t};$$

若

$$K_t + k_{1t} + c_{1t}d_{1t} \leq s_{1t}d_{1t},$$

$$k_{2t} + c_{2t}d_{2t} > s_{2t}d_{2t},$$

则

$$F(t, 0, t) = F(t-1) + K_t + k_{1t} + c_{1t}d_{1t} + s_{2t}d_{2t}.$$

算法复杂度为: 首先需要计算  $F(i, j, t)$  的值  $O(T)$  次,  $i = 1, 2, \dots, t, j = 1, 2, \dots, t, t = 1, 2, \dots, T$ , 对于固定的  $i, j$  和  $t$ , 计算  $MC_{1it}$  和  $MC_{2jt}$  需要考虑  $O(T)$  次的值, 因此算法的时间复杂度为  $O(T^2)$ .

### 3 预测时阈分析

预测时阈  $T$  是指这样一段时间周期, 给定  $1 \leq t \leq T$ , 如果  $[1, t]$  期的最优决策不受  $T$  之后所有周期的信息(成本、需求等)的影响, 则  $T$  为周期  $t$  的预测时阈; 这个最优的初始决策所覆盖的周期数  $t$  就是决策时阈.

令  $i(nt)$  代表  $t$  周期问题最优解中产品  $n$  的最后一个生产点,  $n = 1, 2, 1 \leq t \leq T$ . 令  $a_{1it} = c_{1i} + \sum_{l=i}^{t-1} h_{1l}, 1 \leq i \leq t \leq T$ , 如果  $i = t, a_{1ii} = c_{1i}$ , 则令  $m(1t)$  为使  $a_{1it}$  最小的周期  $i$  的取值,  $1 \leq i \leq t \leq T$ ; 如对于任意的  $k(1 \leq k \leq t)$  有  $a_{1kt} \geq a_{1it}$  成立, 则  $i = m(1t)$ . 同理令  $a_{2jt} = c_{2j} + \sum_{l=j}^{t-1} h_{2l}, 1 \leq j \leq t \leq T$ , 令  $m(2t)$  为使  $a_{2jt}$  最小的周期  $j$  的取值. 令  $i(t) = \min\{i(1t), i(2t)\}$ ,  $P(t)$  代表  $t$ -周期问题.

**引理 2** 在  $P(t)$  的最优解中, 如果  $i(nt) = m(nt), n = 1, 2, 1 \leq t \leq T$ , 则两产品最后一个生产点是单调的, 即  $i(nt^*) \geq i(nt), t^* \geq t + 1$ .

**证明** 在  $P(t+1)$  的最优解中, 如果  $i(1, t+1) = t+1, i(2, t+1) = t+1$ , 则可得  $i(1, t+1) > i(1t)$  和  $i(2, t+1) > i(2t)$ . 否则, 分3种情况讨论:

1) 若  $i(1, t+1) \leq t, i(2, t+1) = t+1$ , 则直接可得  $i(2, t+1) > i(2t)$ ; 若  $c_{1i(1, t+1)} + \sum_{l=i(1, t+1)}^t h_{1l} > s_{1, t+1}$ ,

则可得  $i(1, t+1) = i(1t)$ ; 若  $c_{1i(1,t+1)} + \sum_{l=i(1,t+1)}^t h_{1l} \leq s_{1,t+1}$ , 则运用反证法, 假设  $i(1, t+1) < i(1t)$ , 由  $i(1t) = m(1t)$  及  $m(1t)$  的定义, 有  $a_{1i(1t)t} = a_{1m(1t)t} \leq a_{1i(1,t+1)t}$  成立, 又由  $a_{1i(1,t+1),t+1} = a_{1i(1,t+1)t} + h_{1t}$ ,  $a_{1i(1t),t+1} = a_{1i(1t)t} + h_{1t} = a_{1m(1t),t+1} = a_{1m(1t)t} + h_{1t}$ , 可得  $a_{1i(1t),t+1} = a_{1m(1t),t+1} \leq a_{1i(1,t+1),t+1}$ , 说明在  $i(1t)$  期生产产品 1 满足第  $t+1$  期的需求成本不会大于在  $i(1, t+1)$  期生产产品 1 满足第  $t+1$  期的需求成本, 因此假设  $i(1, t+1) < i(1t)$  不成立, 即可得  $i(1, t+1) \geq i(1t)$ .

2) 若  $i(1, t+1) = t+1, i(2, t+1) \leq t$ , 则直接可得  $i(1, t+1) > i(1t)$ , 证明  $i(2, t+1) \leq i(2t)$  的过程与情况 1) 类似, 略.

3) 若  $i(1, t+1) \leq i(1t), i(2, t+1) \leq t$ , 证明过程同样与 1) 类似, 略.

综上所述可得  $i(n, t+1) \geq i(nt), n = 1, 2$ . 同理, 在  $P(t+2)$  的最优解中, 有  $i(n, t+2) \geq i(n, t+1)$ , 由以上分析类推, 若在  $P(t)$  的最优解中, 如果有  $i(nt) = m(nt)$  成立,  $n = 1, 2$ , 则可得  $i(nt^*) \geq i(nt), t^* \geq t+1$ .  $\square$

**引理 3** 在  $P(t)$  的最优解中, 若  $i(nt) = m(nt), n = 1, 2, 1 \leq t \leq T$ , 则对于任意  $t^*, t+1 \leq t^* \leq T, P(t^*)$  的最优解中至少有一个产品 1 的生产点和产品 2 的生产点属于集合  $\{i(t), i(t)+1, \dots, t\}$ .

**证明** 由引理 2, 在  $P(t)$  的最优解中, 若  $i(nt) = m(nt), n = 1, 2, 1 \leq t \leq T$ , 则可得  $i(nt^*) \geq i(nt), t+1 \leq t^* \leq T$ . 如果  $i(1t^*) \leq t$  和  $i(2t^*) \leq t$ , 则根据  $i(t)$  的定义可得  $i(1t^*)$  和  $i(2t^*)$  在集合  $\{i(t), i(t)+1, \dots, t\}$  中, 定理得证. 否则, 分 3 种情形讨论:

1) 若  $i(1t^*) \geq t+1, i(2t^*) \leq t$ , 则直接可得  $i(2t^*)$  在集合  $\{i(t), i(t)+1, \dots, t\}$  中, 同时可得  $i(1t^*)-1$  周期问题的最优解是  $t^*$ -周期问题最优解的一部分, 且有  $i(1(i(1t^*)-1)) \geq i(1t)$ . 如果  $i(1(i(1t^*)-1)) \leq t$ , 则  $i(1t) \leq i(1(i(1t^*)-1)) \leq t$ , 即  $i(1(i(1t^*)-1))$  和  $i(2t^*)$  在集合  $\{i(t), i(t)+1, \dots, t\}$  中. 如果有  $i(1(i(1t^*)-1)) \geq t+1$ , 则继续上述过程, 直到找到一个周期的最优解中有一个产品 1 的生产点和产品 2 的生产点属于集合  $\{i(t), i(t)+1, \dots, t\}$ .

2)  $i(1t^*) \leq t, i(2t^*) \geq t+1$ .

3)  $i(1t^*) \leq t, i(2t^*) \leq t$ .

情形 2) 和情形 3) 的证明与情形 1) 类似, 略. 综合以上各种情形可得在  $P(t)$  的最优解中, 如果  $i(nt) = m(nt), n = 1, 2, 1 \leq t \leq T$ , 则对于任意  $t^*, t+1 \leq t^* \leq T, P(t^*)$  的最优解中至少有一个产品

1 的生产点和产品 2 的生产点属于集合  $\{i(t), i(t)+1, \dots, t\}$ . 集合  $\{i(t), i(t)+1, \dots, t\}$  也称为两产品的生产集.  $\square$

**定义 2** 如果  $X_{ni}^t$  是  $P(t)$  最优解中产品  $n$  在第  $i$  期的生产数量, 则生产序列  $\{X_{n1}^t, X_{n2}^t, \dots, X_{nt}^t\}$  是产品  $n$  的最优生产序列,  $n = 1, 2$ .

**定义 3** 如果生产序列  $\{X_{n1}^t, X_{n2}^t, \dots, X_{nt}^t\}$  是产品  $n$  的最优生产序列, 则生产序列  $\{X_{n1}^{t'}, X_{n2}^{t'}, \dots, X_{nt'}^{t'}\} (t' \leq t)$  是产品  $n$  的最优生产子序列,  $n = 1, 2$ .

**定理 1** 在  $P(t)$  的最优解中, 若  $i(nt) = m(nt), n = 1, 2, 1 \leq t \leq T$ , 且有  $X_{11}^{i(t)-1} = X_{12}^{i(t)} = \dots = X_{1\tau}^{t-1}, X_{21}^{i(t)-1} = X_{22}^{i(t)} = \dots = X_{2\tau}^{t-1}$  成立, 则周期  $t$  为更长周期  $t^*$  预测时阈,  $\tau$  为决策时阈,  $t+1 \leq t^* \leq T$ .

**证明** 根据引理 3, 在  $P(t)$  的最优解中, 如果  $i(nt) = m(nt), n = 1, 2, 1 \leq t \leq T$ , 则对于任意  $t^*, t+1 \leq t^* \leq T, P(t^*)$  的最优解中至少有一个产品 1 的生产点和产品 2 的生产点属于集合  $\{i(t), i(t)+1, \dots, t\}$ . 因此, 对于  $r \in \{i(t)-1, i(t), \dots, t-1\}$ , 至少有一个  $P(r)$  的最优解是  $P(t^*)$  的最优解的一部分. 如果  $X_{1l}^{i(t)-1} = x_{1l}^{i(t)} = \dots = x_{1l}^{t-1}$  且  $X_{2l}^{i(t)-1} = x_{2l}^{i(t)} = \dots = x_{2l}^{t-1}$  对于  $l = 1, 2, \dots, \tau$  成立, 则意味着每一个问题  $P(i(t)-1), P(i(t)), \dots, P(t-1)$  有相同的  $\tau$  期最优生产子序列, 因此这个  $\tau$  期生产子序列是任何更长周期  $t^* (t \leq t^*)$  最优解的一部分,  $\tau$  为决策时阈. 又因为仅仅需要  $t$  周期的信息决定决策时阈, 所以  $t$  为预测时阈. 集合  $\{i(t)-1, i(t), \dots, t-1\}$  被称为两产品的再生集<sup>[46]</sup>.  $\square$

下面举例分析预测时阈的求解过程.

**例 1** 假设产品 1 和产品 2 前 7 期的需求分别为

$$d_{1t} = (10, 7, 6, 13, 8, 8, 12),$$

$$d_{2t} = (10, 6, 8, 12, 9, 6, 13).$$

成本参数为

$$K_t = (50, 60, 60, 50, 60, 70, 50),$$

$$k_{1t} = (10, 11, 9, 9, 11, 10, 10),$$

$$k_{2t} = (10, 11, 9, 9, 10, 11, 9),$$

$$s_{1t} = (8, 8, 6, 9, 9, 10, 10),$$

$$s_{2t} = (9, 8, 8, 9, 9, 7, 10),$$

$$h_{1t} = (1, 2, 2, 1, 1, 2, 1),$$

$$h_{2t} = (1, 1, 2, 2, 2, 1, 1),$$

$$c_{1t} = c_{2t} = (4, 5, 5, 5, 5, 5, 4).$$

运用前向动态规划算法, 计算结果如表 1 所示. 由表 1 可知,  $i(17) = m(17) = 7, i(27) = m(27) = 7$ , 因此生产集中只有周期 7 一个元素, 再生集中只有

周期6一个元素. 又由  $X_{11}^6 = 17, X_{12}^6 = 0, X_{13}^6 = 0, X_{14}^6 = 29, X_{15}^6 = 0, X_{16}^6 = 0; X_{21}^6 = 24, X_{22}^6 = 0, X_{23}^6 = 0, X_{24}^6 = 21, X_{25}^6 = 0, X_{26}^6 = 0$ , 可知周期7是预测时阈, 相应的决策时阈为  $\tau = 6$ .

表1 例1的计算结果

$t$	1	2	3	4	5	6	7
$(d_{1t}, d_{2t})$	(10,10)	(7,6)	(6,8)	(13,12)	(8,9)	(8,6)	(12,13)
$(X_{1t}^1, X_{2t}^1)$	(10,10)						
$(X_{1t}^2, X_{2t}^2)$	(17,16)	(0,0)					
$(X_{1t}^3, X_{2t}^3)$	(17,24)	(0,0)	(0,0)				
$(X_{1t}^4, X_{2t}^4)$	(17,24)	(0,0)	(0,0)	(13,12)			
$(X_{1t}^5, X_{2t}^5)$	(17,24)	(0,0)	(0,0)	(21,21)	(0,0)		
$(X_{1t}^6, X_{2t}^6)$	(17,24)	(0,0)	(0,0)	(29,21)	(0,0)	(0,0)	
$(X_{1t}^7, X_{2t}^7)$	(17,24)	(0,0)	(0,0)	(29,21)	(0,0)	(0,0)	(12,13)
$F(t)$	150	215	299	492	603	701	870

通过构造数值实验来进一步理解允许需求损失下两产品联合生产动态批量预测时阈的特征. 根据文献[5]的研究, 假设两种产品的需求服从正态分布, 均值为10, 标准差为1, 若产品需求小于0, 则设定为1.

图1描述了预测时阈作为联合启动成本和两产品单独启动成本函数的变化趋势.  $K_t$  取6个值, 即 50, 60, 80, 100, 150, 200; 对于  $n = 1, 2, k_{nt}$  取3个值, 即 10, 25, 40; 其他参数设为  $c_{nt} = 5, h_{nt} = 1, s_{nt} = 20$ . 为了方便找到预测时阈中值, 对每一组参数运行13次, 本实验运行的次数为  $6 \times 3 \times 13 = 234$ . 随着联合启动成本和两产品单独启动成本的增加, 发现预测时阈中值也显著递增. 这是因为随着联合启动成本和两产品单独启动成本的增加, 每一次决策所覆盖的周期数越长, 最优解的生产点需要在更长的时间周期中选择, 因而预测时阈递增.

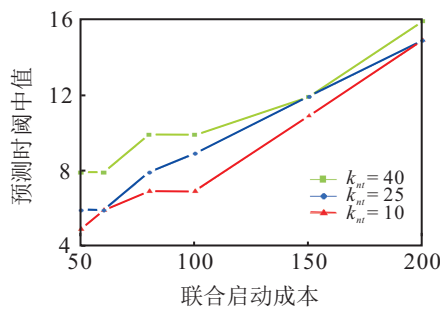


图1 作为联合启动成本和单独启动成本函数的预测时阈中值

图2描述了预测时阈作为两产品缺货(需求损失)成本和库存持有成本函数的变化趋势. 对于  $n = 1, 2, s_{nt}$  取6个值, 即 8, 9, 10, 11, 12, 15;  $h_{nt}$  取2个值, 即 1和2; 其他参数设为  $c_{nt} = 5, k_{nt} = 10, K_t = 100$ . 同样对每一组参数运行13次, 本实验运行的次

数为  $6 \times 2 \times 13 = 156$ . 可以发现, 随着缺货成本的增加, 预测时阈中值是增加的, 同样是因为较大的缺货成本导致最优解的生产点需要在更长的时间周期加以选择; 随着库存持有成本的增加, 预测时阈中值是降低的. 这是因为如果库存成本较大, 每一次决策所覆盖的周期数越小, 则最优解的生产点只需在较短的时间内加以选择, 因而预测时阈较小.

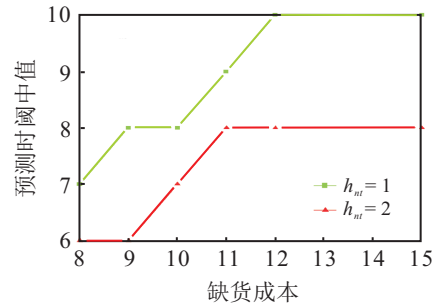


图2 作为缺货成本和库存持有成本函数的预测时阈中值

综合图1和图2可以得到, 最优解的生产点可选择的周期长度决定了预测时阈的长短, 企业当前的生产(采购)决策受到今后成本参数的影响, 对企业来讲, 如果启动成本(联合启动成本及两产品单独启动成本)和缺货成本相对较大, 库存持有成本相对较小, 则在作当前的生产计划时, 需要分析相对较长时期的数据信息; 反之, 则需要分析较短时期的未来数据信息.

### 4 结论

本文研究了两产品在需求损失条件下联合生产决策问题, 在最优解结构性质的基础上, 给出了前向动态规划算法求解问题. 在生产点单调性的基础上构造两产品的生产集, 给出了求解预测时阈和决策时阈的充分条件.

本文可以从以下两个方面进行拓展: 1) 在更加现实的约束下(生产能力约束, 库存能力约束)研究联合生产决策问题, 将显得更加实用和有意义. 2) 本文是在固定-线性和线性成本下求解预测时阈问题, 而在凹函数成本和凸函数成本下求解预测时阈也是一个有意义的拓展.

### 参考文献(References)

[1] 慕银平. 需求替代的两产品动态批量最优预测时阈研究[J]. 管理科学学报, 2011, 14(3): 10-23.  
(Mu Y P. Forecast horizon of dynamic lot-size for two products under demand and substitution[J]. J of Management Science in China, 2011, 14(3): 10-23.)

[2] Wagner H M, Whitin T M. Dynamic version of the economic lot size model[J]. Management Science, 1958,

- 5(1): 89-96.
- [3] Chand S, Hsu V N, Sethi S. Forecast, solution, and rolling horizons in operations management problems: A classified bibliography[J]. *Manufacturing and Service Operations Management*, 2002, 4(1): 25-43.
- [4] Dawande M, Gavirneni S, Naranpanawe S, et al. Forecast horizons for a class of dynamic lot-size problems under discrete future demand[J]. *Operations Research*, 2007, 55(4): 688-702.
- [5] Dawande M, Gavirneni S, Naranpanawe S, et al. Discrete forecast horizons for two-product variants of the dynamic lot-size problem[J]. *Int J of Production Economics*, 2009, 120(2): 430-436.
- [6] Dawande M, Gavirneni S, Mu Y P, et al. On the interaction between demand substitution and production changeovers[J]. *Manufacturing and Service Operations Management*, 2010, 12(4): 682-691.
- [7] Ghate A, Smith R L. Optimal backlogging over an infinite horizon under time varying convex production and inventory costs[J]. *Manufacturing and Service Operations Management*, 2009, 11(2): 362-368.
- [8] Zhao T G, Yang D W, Cai X M, et al. Identifying effective forecast horizon for real-time reservoir operation under a limited inflow forecast[J]. *Water Resources Research*, 2012, 48(1): 1-15.
- [9] Bardhan A, Dawande M, Gavirneni S, et al. Forecast and rolling horizons under demand substitution and production changeovers: Analysis and insights[J]. *IEE Transactions*, 2013, 45(3): 323-340.
- [10] You J Y, Yu C W. Theoretical error convergence of limited forecast horizon in optimal reservoir operating decisions[J]. *Water Resources Research*, 2013, 49(3): 277-297.
- [11] Teyarachakul S, Chand S, Tzur M. Lot sizing with learning and forgetting in setups: Analytical results and insights[J]. *Naval Research Logistics*, 2017, 63(2): 93-108.
- [12] Arena C, Cannarozzo M, Mazzola M R. Exploring the potential and the boundaries of the rolling horizon technique for the management of reservoir systems with one-year behaviour[J]. *Water Resources Management*, 2017, 31(3): 1-18.
- [13] Akbalik A, Penz B, Rapine C. Multi-item uncapacitated lot sizing problem with inventory bounds[J]. *Optimization Letters*, 2015, 9(1): 143-154.
- [14] Akbalik A, Penz B, Rapine C. Capacitated lot sizing problems with inventory bounds[J]. *Annals of Operations Research*, 2015, 229(1): 1-18.
- [15] Melo R A, Ribeiro C C. Formulations and heuristics for the multi-item uncapacitated lot-sizing problem with inventory bounds[J]. *Int J of Production Research*, DOI: 10.1080/00207543.2016.1215567.
- [16] Cheung M, Elmachtoub A N, Levi R, et al. The submodular joint replenishment problem[J]. *Mathematical Programming*, 2016, 158(1/2): 207-233.
- [17] Li Y J, Cai X Q, Xu L, et al. Heuristic approach on dynamic lot-sizing model for durable products with end-of-use constraints[J]. *Annals of Operations Research*, 2015, 242(2): 265-283.
- [18] Cuha J O, Konstantaras I, Melo R A, et al. On multi-item economic lot-sizing with remanufacturing and uncapacitated production[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, 50(6): 678-686.
- [19] Sandbothe R A, Thompson G L. A forward algorithm for the capacitated lot size model with stockouts[J]. *Operations Research*, 1990, 38(3): 474-486.
- [20] Sandbothe R A, Thompson G L. Decision horizons for the capacitated lot size model with inventory bounds and stockouts[J]. *Computers & Operations Research*, 1993, 20(5): 455-465.
- [21] Aksen D, Altinkemer K, Chand S. The single item lot-sizing problem with immediate lost sales[J]. *European J of Operational Research*, 2003, 147(3): 558-566.
- [22] Aksen D. Loss of customer goodwill in the uncapacitated lot-sizing problem[J]. *Computer and Operations Research*, 2007, 34(9): 2805-2823.
- [23] Absi N, Sidhoum S K. The multi-item capacitated lot-sizing problem with setup times and shortage costs[J]. *European J of Operational Research*, 2008, 185(3): 1351-1374.
- [24] Absi N, Sidhoum S K. The multi-item capacitated lot-sizing problem with safety stocks and demand shortage costs[J]. *Computers & Operations Research*, 2009, 36(11): 2926-2936.
- [25] Absi N, Sidhoum S K, Peres S D. Uncapacitated lot-sizing problem with production time window, early production, backlog and lost sale[J]. *Int J of Production Research*, 2011, 49(9): 2551-2566.
- [26] Narenji M, Ghomi S M T F, Nooraie S V R. Grouping in decomposition method for multi-item capacitated lot-sizing problem with immediate lost sales and joint and item-dependent setup cost[J]. *Int J of System Science*, 2011, 42(3): 489-498.
- [27] Gayon J P, Massonnet G, Rapine C, et al. Constant approximation algorithms for the one warehouse multiple retailers problem with backlog or lost-sales[J]. *European J of Operational Research*, 2016, 250(1): 155-163.
- [28] Chu F, Chu C C, Liu X. Lot sizing models with backlog and out-sourcing[C]. *IEEE Int Conf on Systems, Man, Cybernetics*. Hague, 2004: 4342-4347.

- [29] Chu F, Chu C C. Polynomial algorithms for single item lot-sizing models with bounded inventory and backlogging, or outsourcing[J]. IEEE Trans on Automation Science and Engineering, 2007, 4(2): 233-251.
- [30] Chu F, Chu C. Single-Item dynamic lot-sizing models with bounded inventory and outsourcing[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, 2008, 38(1): 70-77.
- [31] Chu C C, Chu F, Zhong J H, et al. A polynomial algorithm for lot-sizing problem with backlogging, outsourcing and limited inventory[J]. Computer and Industrial Engineering, 2013, 64(1): 200-210.
- [32] Zhong J H, Chu F, Chu H B, et al. Polynomial dynamic programming algorithms for lot sizing models with bounded inventory and stockout and or backlogging[J]. J of Systems Science and Systems Engineering, 2016, 25(3): 370-397.
- [33] Liu X, Chu F, Chu C, et al. Lot sizing with bounded and inventory and lost sales[J]. Int J of Production Research, 2007, 45(24): 5881-5894.
- [34] Liu X. A polynomial time algorithm for production planning with bounded inventory[J]. Int J of Advanced Manufacturing Technology, 2008, 39(7): 774-782.
- [35] Liu X, Tu Y L. Production planning with limited inventory capacity and allowed stockout[J]. Int J of Production Economics, 2008, 111(1): 180-191.
- [36] Berk E, Toy A O, Hazir O. Single item lot-sizing problem for a worm/cold process with immediate lost sales[J]. European J of Operational Research, 2008, 187(3): 1251-1267.
- [37] Hwang H C, Heuvel W V D, Wagelmans A P M. The economic lot-sizing problem with lost sales and bounded inventory[J]. IIE Transactions, 2013, 45(8): 912-924.
- [38] 黄玲, 钟金宏, 杨善林. 考虑延期交货、转包和非减库存能力约束的单产品批量模型[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(9): 87-95.  
(Huang L, Zhong J H, Yang S L. Single item lot sizing models with backlogging and outsourcing and non-decreasing inventory capacity[J]. System Engineering—Theory & Practice, 2007, 27(9): 87-95.)
- [39] 黄玲, 钟金宏, 倪志伟, 等. 允许缺货和转包的受限批量模型的多项式算法[J]. 系统仿真学报, 2008, 20(11): 2800-2805.  
(Huang L, Zhong J H, Ni Z W, et al. Polynomial algorithm for capacitated lot sizing models with shortage and outsourcing[J]. J of Systems Simulation, 2008, 20(11): 2800-2805.)
- [40] 钟金宏, 黄玲, 李兴国. 带延期交货和固定成本的库存受限转包模型[J]. 系统管理学报, 2010, 19(5): 578-583.  
(Zhong J H, Huang L, Li X G. Outsourcing models with backlogging and fixed costs and inventory capacity[J]. J of Systems and Management, 2010, 19(5): 578-583.)
- [41] 王能民, 孙青林, 孙林岩. 考虑外包的单产品再制造批量决策[J]. 运筹与管理, 2011, 20(5): 162-168.  
(Wang N M, Sun Q L, Sun L Y. Single-item dynamic lot sizing problem with remanufacturing and outsourcing[J]. Operations Research and Management Science, 2011, 20(5): 162-168.)
- [42] 徐娟, 汪小京, 刘志学. 不同顾客环境下生产及外包的动态批量问题[J]. 系统工程, 2014, 32(10): 63-70.  
(Xu J, Wang X J, Liu Z X. Dynamic lot sizing problem of production and outsourcing under the environment of different customer classes[J]. Systems Engineering, 2014, 32(10): 63-70.)
- [43] 伍景琼, 蒲云, 伍锦群. 价格波动下钢铁企业原材料采购多期优化模型[J]. 控制与决策, 2013, 28(9): 1383-1387.  
(Wu J Q, Pu Y, Wu J Q. Raw material purchasing multi-period optimization model with fluctuating prices in steel enterprise[J]. Control and Decision, 2013, 28(9): 1383-1387.)
- [44] 周炳海, 彭涛. 混流装配生产线准时化物料补给调度方法[J]. 控制与决策, 2017, 32(6): 976-982.  
(Zhou B H, Peng T. Scheduling methods of just in time material replenishment in mixed model assembly lines[J]. Control and Decision, 2017, 32(6): 976-982.)
- [45] 计国君, 韩尚清. 基于第三方的易变质产品库存决策[J]. 控制与决策, 2015, 30(4): 663-669.  
(Ji G J, Han S Q. Deteriorating item inventory decision-making research based on third-party[J]. Control and Decision, 2015, 30(4): 663-669.)
- [46] Lundin R A, Morton T E. Planning horizons for the dynamic lot size model: Zabel vs. Protective Procedures and Computational results[J]. Operations Research, 1975, 23(4): 711-734.

(责任编辑: 孙艺红)